ഗണിതം

ഭാഗം - 1

സ്റ്റാൻഡേർഡ്

X

കേരളസർക്കാർ
പൊതുവിദ്യാഭ്യാസവകുപ്പ്

തയ്യാറാക്കിയത്
സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി **(SCERT),** കേരളം

2025

ദേശീയഗാനം

ജനഗണമന അധിനായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ,
പഞ്ചാബസിന്ധു ഗുജറാത്ത മറാഠാ
ദ്രാവിഡ ഉത്ക്കല ബംഗാ,
വിന്ധ്യഹിമാചല യമുനാഗംഗാ,
ഉച്ഛല ജലധിതരംഗാ,
തവശുഭനാമേ ജാഗേ,
തവശുഭ ആശിഷ മാഗേ,
ഗാഹേ തവ ജയ ഗാഥാ
ജനഗണമംഗലദായക ജയഹേ
ഭാരത ഭാഗ്യവിധാതാ
ജയഹേ, ജയഹേ, ജയഹേ,
ജയ ജയ ജയ ജയഹേ!

പ്രതിജ്ഞ

ഇന്ത്യ എന്റെ രാജ്യമാണ്. എല്ലാ ഇന്ത്യക്കാരും എന്റെ സഹോദരീ സഹോദരന്മാരാണ്.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തെ സ്നേഹിക്കുന്നു; സമ്പൂർണ്ണവും വൈവിധ്യപൂർണ്ണവുമായ അതിന്റെ പാരമ്പര്യത്തിൽ ഞാൻ അഭിമാനം കൊള്ളുന്നു.

ഞാൻ എന്റെ മാതാപിതാക്കളെയും ഗുരുക്കന്മാരെയും മുതിർന്നവരെയും ബഹുമാനിക്കും.

ഞാൻ എന്റെ രാജ്യത്തിന്റെയും എന്റെ നാട്ടുകാരുടെയും ക്ഷേമത്തിനും ഐശ്വര്യത്തിനും വേണ്ടി പ്രയത്നിക്കും.

ഗണിതം

10

State Council of Educational Research and Training (SCERT)
Poojappura, Thiruvananthapuram 695012, Kerala
Website : www.scertkerala.gov.in
e-mail : scertkerala@gmail.com, Phone : 0471 - 2341883
Typesetting and Layout : SCERT
First Edition : 2025
Printed at : KBPS, Kakkanad, Kochi-30
© Department of General Education, Government of Kerala

പ്രിയപ്പെട്ട കുട്ടികളേ,

അളവുകളെ സംഖ്യകളായി മാറ്റുന്നതും, അളവുകളെ സംബന്ധിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ സംഖ്യാപ്രശ്നങ്ങളായും, ബീജഗണിതപ്രശ്നങ്ങളായും മാറ്റി പരിഹാരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതുമെല്ലാം മുൻക്ലാസുകളിൽ കണ്ടു. കേവലസംഖ്യകളുടെ ക്രിയാബന്ധങ്ങൾ ബീജഗണിതതത്വങ്ങളായി വികസിക്കുന്നതും അവ അളവുകളുടെ പ്രശ്നങ്ങളിൽ പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്നതും തിരിച്ചറിഞ്ഞു. രൂപങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ ജ്യാമിതീയ തത്വങ്ങളാകുന്നതിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങളും പരിചയപ്പെട്ടു.
ഈ വഴികളിലൂടെത്തന്നെ അല്പം കൂടി മുന്നോട്ടുപോകുകയാണ് ഈ പാഠപുസ്തകത്തിലും ചെയ്തിരിക്കുന്നത്. വ്യത്യസ്ത ശാഖകളായി വളരുന്ന ബീജഗണിതവും ജ്യാമിതിയും ചേർന്ന് പുതിയൊരു ഗണിതശാഖ രൂപപ്പെടുന്നത് ഇതിൽ കാണാം. എല്ലാ ശാസ്ത്രങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കുന്നതും, ഇന്നു വ്യാപകമായി പ്രയോഗിക്കപ്പെടുന്ന നിർമിതബുദ്ധിയുടെ സൃഷ്ടിയിൽ ഒഴിച്ചുകൂടാനാവാത്തതുമായ സാധ്യതാസിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആദ്യപാഠങ്ങളും ഇതിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.
ഗണിതം ഇഷ്ടവിഷയമായി തുടർന്നു പഠിക്കുന്നവർക്ക് ആവശ്യമായ അടിസ്ഥാന ഗണിതമെല്ലാം ഈ പാഠപുസ്തകത്തിലുണ്ട്. പ്രാഥമിക വിദ്യാഭ്യാസത്തിന്റെ ഒരു ഘട്ടം കഴിയുമ്പോൾ എല്ലാവരുടെയും ചിന്തയിൽ അവശ്യം ഉണ്ടാകേണ്ട ഗണിതസംസ്കാരമാണ് ഈ പുസ്തകങ്ങളുടെ ആന്തരികമൂല്യം. കാര്യകാരണബോധത്തോടുകൂടിയുള്ള വിശകലനങ്ങൾ നടത്താനും, അതിലൂടെ മാത്രം നിഗമനങ്ങൾ രൂപപ്പെടുത്തുവാനുമുള്ള മനോഭാവമാണ് ഈ സംസ്കാരത്തിന്റെ സത്ത.

സ്നേഹാശംസകളോടെ,

ഡോ. ജയപ്രകാശ് ആർ.കെ.
ഡയറക്ടർ
എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി., കേരളം

പാഠപുസ്തകരചനാസമിതി

അഡ്വൈസർ

ഡോ. ഈ. കൃഷ്ണൻ,
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്, തിരുവനന്തപുരം

ചെയർപേഴ്സൺ

ഡോ. പി. രമേശ് കുമാർ
ഗണിതവിഭാഗം മേധാവി (റിട്ട.),
യൂണിവേഴ്സിറ്റി ഓഫ് കേരള,
കാര്യവട്ടം, തിരുവനന്തപുരം

വിദഗ്ധർ

ഡോ. പ്രീനു സി. എസ്.
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ,
യൂണിവേഴ്സിറ്റി കോളേജ്,
തിരുവനന്തപുരം

ഡോ. സുമേഷ്
അസിസ്റ്റന്റ് പ്രൊഫസർ,
മാർ ഇവാനിയസ് കോളേജ്,
തിരുവനന്തപുരം

അംഗങ്ങൾ

ആർ. രാമാനുജം
എച്ച്.എസ്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം.എൻ.കെ.എം.
ഗവ: ഹയർസെക്കന്ററി സ്കൂൾ
പുലാപ്പറ്റ, പാലക്കാട്

വിജയകുമാരൻ ടി. കെ.
എച്ച് എസ് എസ് ടി (റിട്ട.),
ജി.എം.ആർ.എച്ച്.എസ്.എസ്.
ഫോർ ഗേൾസ്, പരവനടുക്കം,
കാസറഗോഡ്

സി. ടി. ഫിറോസ് ബാബു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.ജി.വി.എച്ച്.എസ്.എസ്.
വണ്ടൂർ, മലപ്പുറം

ഉണ്ണികൃഷ്ണൻ എം. വി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. കടന്നപ്പള്ളി
പി.ഒ കടന്നപ്പള്ളി കണ്ണൂർ

നന്ദകുമാർ സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ചോതാവൂർ ഹയർ
സെക്കൻഡറി സ്കൂൾ
ചമ്പാട്, കണ്ണൂർ

ശ്രീജിത്ത് മുറിയമ്പത്ത്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്.എസ്. മടപ്പള്ളി
വടകര, കോഴിക്കോട്

പത്മപ്രസാദ് കെ.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
പന്തല്ലൂർ എച്ച്.എസ്.എസ്.,
കടമ്പോട് പോസ്റ്റ്, മലപ്പുറം

ഉബൈദുള്ള കെ.സി.
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം
എസ്.ഒ.എച്ച്.എസ്., അരീക്കോട്,
മലപ്പുറം

ഫിറോസ മൊയ്തു
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
കാലിക്കറ്റ് ഗേൾസ് വി.എച്ച്.എസ്.
എസ്., കുണ്ടുങ്ങൽ, കല്ലായി,
കോഴിക്കോട്

പ്രിയ രാജ്
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
എം. ജി. ഡി. ഹൈസ്കൂൾ
പുതുശ്ശേരി,
പുതുശ്ശേരി സൗത്ത് പി.ഒ,
പത്തനംതിട്ട

ആയിഷകുട്ടി കെ.കെ
എച്ച്.എസ്.ടി. ഗണിതം,
ജി.എച്ച്.എസ്. ബീനാച്ചി,
സുൽത്താൻബത്തേരി, വയനാട്

രാജേഷ് എം.
എച്ച്. എസ്. ടി. (ഗണിതം)
കല്ലടി എച്ച്.എസ്.എസ്
കുമരംപുത്തൂർ, മണ്ണാർക്കാട്,
പാലക്കാട്

ഉല്ലാസ് യു.ജി., (ആർട്ടിസ്റ്റ്)
എച്ച്.എസ്.ടി. ഫിസിക്കൽ സയൻസ്, സി.ബി.എച്ച്.എസ്.എസ്. വള്ളിക്കുന്ന്, മലപ്പുറം

അക്കാദമിക് കോഡിനേറ്റർ

ഡോ. അനിൽകുമാർ എ.കെ.
റിസർച്ച് ഓഫീസർ, എസ്.സി.ഇ.ആർ.ടി.

സംസ്ഥാന വിദ്യാഭ്യാസ ഗവേഷണ പരിശീലന സമിതി (SCERT)
വിദ്യാഭവൻ, പൂജപ്പുര, തിരുവനന്തപുരം 695 012

ഉള്ളടക്കം

1	സമാന്തരശ്രേണികൾ	7
2	വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും	31
3	സമാന്തരശ്രേണിയും ബീജഗണിതവും	59
4	സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം	73
5	രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ	85
6	ത്രികോണമിതി	97
7	സൂചകസംഖ്യകൾ	127

ഈ പുസ്തകത്തിൽ സൗകര്യത്തിനായി
ചില ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു

കണക്കു ചെയ്തുനോക്കാം

ഗവേഷണം

ഐ.സി.റ്റി. സാധ്യത

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ആമുഖം

ഭാരതത്തിലെ ജനങ്ങളായ നാം ഭാരതത്തെ ഒരു [1]**[പരമാധികാര സ്ഥിതിസമത്വ മതേതര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്കായി]** സംവിധാനം ചെയ്യുവാനും അതിലെ പൗരന്മാർക്കെല്ലാം:

സാമൂഹ്യവും സാമ്പത്തികവും രാഷ്ട്രീയവും ആയ **നീതിയും;**

ചിന്തയ്ക്കും ആശയപ്രകടനത്തിനും വിശ്വാസത്തിനും മതനിഷ്ഠയ്ക്കും ആരാധനയ്ക്കും ഉള്ള **സ്വാതന്ത്ര്യവും;**

പദവിയിലും അവസരത്തിലും **സമത്വവും;** സംപ്രാപ്തമാക്കുവാനും;

അവർക്കെല്ലാമിടയിൽ

വ്യക്തിയുടെ അന്തസ്സും [2][രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും] ഉറപ്പുവരുത്തിക്കൊണ്ട് **സാഹോദര്യം** പുലർത്തുവാനും;

സഗൗരവം തീരുമാനിച്ചിരിക്കയാൽ;

നമ്മുടെ ഭരണഘടനാ നിർമ്മാണസഭയിൽ ഈ 1949 നവംബർ ഇരുപത്താറാം ദിവസം **ഇതിനാൽ ഈ ഭരണഘടനയെ സ്വീകരിക്കുകയും നിയമമാക്കുകയും നമുക്കു തന്നെ പ്രദാനം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു.**

---

1. 1976 - ലെ ഭരണഘടന (നാല്പത്തിരണ്ടാം ഭേദഗതി) ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "പരമാധികാര ജനാധിപത്യ റിപ്പബ്ലിക്" എന്നതിന് പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).
2. മേല്പറഞ്ഞ ആക്റ്റ് 2-ാം വകുപ്പു പ്രകാരം "രാഷ്ട്രത്തിന്റെ ഐക്യം" എന്നതിനു പകരം ചേർത്തത് (3.1.1977 മുതൽ പ്രാബല്യം).

1 സമാന്തരശ്രേണികൾ

സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ

പലതരം സംഖ്യാക്രമങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ;

എണ്ണൽസംഖ്യകൾ	1, 2, 3, ...
ഇരട്ടസംഖ്യകൾ	2, 4, 6, ...
ഒറ്റസംഖ്യകൾ	1, 3, 5, ...
എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ പകുതികൾ	$\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, ...
എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ	1, 4, 9, ...

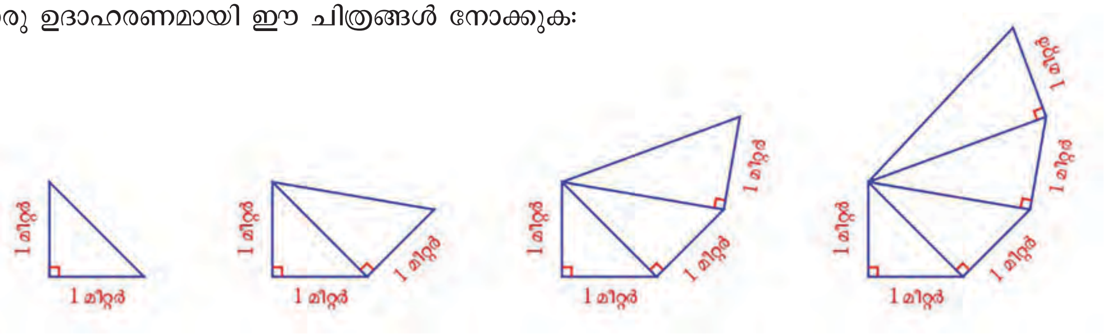
ഇതുപോലെ ഏതെങ്കിലും നിയമമനുസരിച്ച് ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായി എഴുതുന്ന ഒരു കൂട്ടം സംഖ്യകളെ, **സംഖ്യാശ്രേണി (Number sequence)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

പലതരം അളവുകൾ കണക്കാക്കുന്നതിന്റെ ഭാഗമായി ഇത്തരം ശ്രേണികൾ രൂപപ്പെടാം. ഉദാഹരണമായി, ത്രികോണം, ചതുർഭുജം, പഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണം അനുസരിച്ച് ബഹുഭുജങ്ങളെ ക്രമീകരിച്ചാൽ, അവയുടെ അകക്കോണുകളുടെ തുകയായി,

180, 360, 540, ...

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:



ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ഏറ്റവും വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം മീറ്ററിൽ എഴുതിയാൽ,

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \ldots$$

എന്നിങ്ങനെ 2 മുതലുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗമൂലങ്ങളുടെ ശ്രേണിയാണ് കിട്ടുന്നത്.

ഒരു ശ്രേണിയെത്തന്നെ പലതരത്തിൽ വിവരിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, 1 ൽ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണ്

$$1, 11, 21, 31, \ldots$$

ഇതിനെത്തന്നെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം:
10 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം കിട്ടുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി.

പലതരം ശ്രേണികൾ

കൂട്ടം, നിര എന്നെല്ലാം അർഥം വരുന്ന സംസ്കൃതപദമാണ് "ശ്രേണി". ഗണിതത്തിൽ ഈ വാക്കുപയോഗിക്കുന്നത്, ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ കൃത്യമായ സ്ഥാനങ്ങളിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നവയെ സൂചിപ്പിക്കാനാണ്. ഇങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കുന്നത് സംഖ്യകൾ തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാണ് ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

ബഹുപദങ്ങളുടെ ഒരു ശ്രേണിയാകാം:

$$1 + x, 1 + x^2, 1 + x^3, \ldots$$

ഒരു ഭാഷയിലെ പദങ്ങളെ അക്ഷരമാലാക്രമത്തിൽ അടുക്കുന്നതും ശ്രേണി തന്നെ.

(1) പൊട്ടുകളടുക്കി ത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം:

ഓരോ ത്രികോണത്തിലുമുള്ള പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം എഴുതുക. തുടർന്നുള്ള മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാൻ വേണ്ട പൊട്ടുകളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

(2) സമഭുജത്രികോണം, സമചതുരം, സമപഞ്ചഭുജം എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ ശ്രേണിയിൽ നിന്ന് ചുവടെ പ്പറയുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കുക:

ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത വര വശമായ സമബഹുഭുജങ്ങളുടെ ശ്രേണി വരയ്ക്കാം.

A, B എന്നീ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയതിനുശേഷം, Input Bar ൽ

Sequence[Polygon[A,B,n],n,3,10]

എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ മതി. n എന്ന സംഖ്യ, 3 മുതൽ 10 വരെ മാറ്റുക, അതിനൊപ്പം AB ഒരു വശമായി n വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക എന്നാണ് ഈ നിർദേശത്തിന്റെ അർഥം.

ബഹുഭുജങ്ങൾ ഓരോന്നായി വരയ്ക്കാൻ m എന്ന പേരിലൊരു Integer Slider ഉണ്ടാക്കി, വരയ്ക്കാനുള്ള നിർദേശം ഇങ്ങനെ മാറ്റുക.

Sequence[Polygon[A,B,$n + 2$],n,1,m]

Slider നീക്കി m എന്ന സംഖ്യ 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ മാറ്റുന്നതിനനുസരിച്ച്, 3, 4, 5, ... വശങ്ങളുള്ള സമബഹുഭുജങ്ങൾ വരയ്ക്കുക എന്നാണ് ഇതിന്റെയർഥം.

ഇതിൽ $n + 2$ നു പകരം $2n$ എന്നെഴുതിയാൽ, ഏതുതരം ബഹുഭുജങ്ങളാണ് കിട്ടുക ?

$2n + 1$ ആക്കിയാലോ ?

വശങ്ങളുടെ എണ്ണം 3, 4, 5, 6, ...

അകക്കോണുകളുടെ തുക

പുറംകോണുകളുടെ തുക

ഒരു അകക്കോണിന്റെ അളവ്

ഒരു പുറംകോണിന്റെ അളവ്

(3) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെയും, 2 ശിഷ്ടം വരുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യ കളുടെയും ശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(4) 1 ലോ 6 ലോ അവസാനിക്കുന്ന എണ്ണൽസംഖ്യകൾ വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക. ഈ ശ്രേണിയെ മറ്റു രണ്ടുതരത്തിൽ വിവരിക്കുക.

(5) ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:

ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിൽ നിന്ന് വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ചെറിയ ത്രികോണം വെട്ടി മാറ്റിയതാണ് ആദ്യ ചിത്രം. ഇതിലെ മൂന്നു ത്രികോണങ്ങളിൽ നിന്നും ഇതുപോലെ നടുവിലെ ത്രികോണം വെട്ടി മാറ്റിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ ചിത്രം. ഈ ക്രിയ ഒരിക്കൽക്കൂടി ചെയ്തതാണ് മൂന്നാമത്തെ ചിത്രം.

(i) ഓരോ ചിത്രത്തിലും എത്ര ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളുണ്ട് ?

(ii) ഒന്നും വെട്ടിമാറ്റാത്ത മുഴുവൻ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 1 എന്നെടുത്ത്, ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ഒരു ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(iii) ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും ചുവന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ ആകെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

(iv) ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ഈ മൂന്നു ശ്രേണികളിലെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു സംഖ്യകൾ എഴുതുക.

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ചും കണ്ടുപിടിക്കാം. 1, 4, 9, ... എന്നിങ്ങനെ വർഗസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പത്ത് സംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ Sequence($n^{2,}n$,1,10) എന്ന് Input Bar ൽ കൊടുത്താൽ മതി. m എന്ന പേരിൽ ഒരു Integer സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി Sequence(n^2, n,1,m) എന്നു കൊടുത്താൽ m മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം മാറും.

2, 4, 8, ... എന്ന ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിത രൂപം 2^n ആണല്ലോ. ഈ ശ്രേണി കിട്ടാൻ Sequence(2^n,n,1,m) എന്നു നൽകിയാൽ മതി.

വൃത്തവിഭജനം

ഒരു വൃത്തത്തിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് ഒരു വരകൊണ്ട് യോജിപ്പിച്ചാൽ, അത് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ:

വൃത്തത്തിലെ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളെടുത്തു യോജിപ്പിച്ചാൽ, നാലു ഭാഗങ്ങളാകും:

നാലു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് എല്ലാ ജോടികളെയും യോജിപ്പിച്ചാലോ ?

ബിന്ദുക്കൾ അഞ്ചായാൽ ?

ആറു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ എത്ര ഭാഗങ്ങളാകുമെന്നാണ് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത് ? ഇതു ശരിയാണോ എന്നു വരച്ചു നോക്കൂ.

സമാന്തരശ്രേണികൾ

ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി

$$2, 4, 6, \ldots$$

എന്നാണല്ലോ തുടരുന്നത്.

ഇതിലെ അടുത്ത സംഖ്യ എന്താണ് ?
അതിനടുത്ത സംഖ്യയോ ?

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ ഈ ശ്രേണിയിലെ ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്ന് തൊട്ടടുത്ത സംഖ്യ കിട്ടാൻ 2 കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഇനി ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി നോക്കാം:

$$1, 3, 5, \ldots$$

ഇതിലും ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്ന് തൊട്ടടുത്ത സംഖ്യ കിട്ടാൻ 2 കൂട്ടിയാൽ മതി.

തുടങ്ങുന്ന സംഖ്യയിലാണ് ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം: ആദ്യത്തെ ശ്രേണി 2 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 2 വീതം കൂട്ടി തുടരുന്നു; രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണി 1ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 2 വീതം കൂട്ടി തുടരുന്നു.

ഇനി എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പകുതി എടുത്താലോ ?

$$\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \ldots$$

തുടങ്ങുന്നത് ഏതു സംഖ്യയിൽ നിന്നാണ് ? ഏതു സംഖ്യയാണ് തുടരെ കൂട്ടുന്നത് ?

നിഗമനങ്ങളിലെ അപകടം

വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന ഭാഗങ്ങളെക്കുറിച്ച്, വൃത്തവിഭജനം എന്ന ഭാഗത്തു കണ്ടല്ലോ. ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം 2, 3, 4, 5 എന്നിങ്ങനെയാകുമ്പോൾ, ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം 2, 4, 8, 16 എന്നു കിട്ടും. ബിന്ദുക്കൾ 6 എണ്ണമാകുമ്പോഴോ ? 32 എന്നാകും ഊഹം. വരച്ചു നോക്കിയാലോ ?

ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ അകലത്തിലാണെങ്കിൽ 30 ഭാഗം അല്ലെങ്കിൽ 31 ഭാഗം.

ഏതായാലും, പരമാവധി 31 ഭാഗം. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, വൃത്തത്തിലെ n ബിന്ദുക്കൾ പരസ്പരം യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന പരമാവധി ഭാഗങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$\frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3)+\frac{1}{2}n(n-1)+1$$

ആണെന്നു തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

ഈ ബീജഗണിതവാചകത്തിലും 2^{n-1} എന്ന വാചകത്തിലും $n = 2, 3, 4, 5$ എന്നീ സംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നത് 2, 4, 8, 16 എന്നീ സംഖ്യകൾ തന്നെയാണെന്നതാണ് രസകരം. $n = 6$ മുതൽ, രണ്ടു വാചകത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമാകും.

മറ്റു ചില ശ്രേണികൾ നോക്കാം:

(i) ബഹുഭുജങ്ങളെ വശങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ ക്രമത്തിൽ എടുത്താൽ, പുറംകോണുകളുടെ തുകയായി കിട്ടുന്ന ശ്രേണി

$$360, 360, 360, \ldots$$

ഇവിടെ 360 ൽ നിന്നു തുടങ്ങുന്നു; വീണ്ടും വീണ്ടും 0 കൂട്ടുന്നു എന്നു പറയാം.

(ii) 100 ലിറ്റർ വെള്ളമുള്ള ഒരു ടാങ്കിൽ നിന്ന്, ഓരോ മണിക്കൂറിലും 5 ലിറ്റർ വെള്ളം പുറത്തേക്കൊഴുകുന്നു. ഓരോ മണിക്കൂർ കഴിയുമ്പോഴും ടാങ്കിൽ മിച്ചമുള്ള വെള്ളം ലിറ്ററിൽ കണക്കാക്കിയാൽ

$$95, 90, 85, \ldots$$

എന്ന ശ്രേണി കിട്ടും.

ഇവിടെ 95 ൽ തുടങ്ങി 5 വീതം കുറച്ചാണ് ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകൾ കിട്ടുന്നത്.

5 കുറയ്ക്കുക എന്നതിനു പകരം –5 കൂട്ടുക എന്നും പറയാമല്ലോ.

ഇവിടെ കണ്ട ശ്രേണികൾ രൂപീകരിച്ച രീതികൾ നോക്കാം:

നിയമം	ശ്രേണി
2ൽ തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 2 കൂട്ടുക	2, 4, 6, ...
1ൽ തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 2 കൂട്ടുക	1, 3, 5, ...
$\frac{1}{2}$ൽ തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും $\frac{1}{2}$ കൂട്ടുക	$\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \ldots$
360ൽ തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും 0 കൂട്ടുക	360, 360, 360, ...
95ൽ തുടങ്ങി, വീണ്ടും വീണ്ടും –5 കൂട്ടുക	95, 90, 85, ...

ഇത്തരം ശ്രേണികൾക്കെല്ലാം പൊതുവായ ഒരു പേരുണ്ട്.

ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്നു തുടങ്ങി, ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ വീണ്ടും വീണ്ടും കൂട്ടി കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയെ, സമാന്തരശ്രേണി (Arithmetic sequence) എന്നു പറയുന്നു

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളെ പൊതുവേ ശ്രേണിയിലെ **പദങ്ങൾ (Terms)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ പകുതി ക്രമമായെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \ldots$ എന്നിങ്ങനെയാണ്; കുറേക്കൂടി വ്യക്തമായി പറഞ്ഞാൽ, ഒന്നാം പദം $\frac{1}{2}$, രണ്ടാം പദം 1, മൂന്നാം പദം $1\frac{1}{2}, \ldots$

അപ്പോൾ സമാന്തരശ്രേണികളെക്കുറിച്ച് ഇങ്ങനെ പറയാം:

> സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ഏതു പദത്തിൽ നിന്നും തൊട്ടടുത്ത പദത്തിലെത്താൻ കൂട്ടേണ്ടത് ഒരേ സംഖ്യയാണ്.

ഇതുതന്നെ മറ്റൊരു വിധത്തിലും പറയാം:

> സമാന്തരശ്രേണിയിൽ ഏതു പദത്തിൽ നിന്നും തൊട്ടു പിന്നിലുള്ള പദം കിട്ടാൻ കുറയ്ക്കേണ്ടത് ഒരേ സംഖ്യയാണ്.

ഏതു പദത്തിൽ നിന്നും തൊട്ടു പിന്നിലുള്ള പദം കുറച്ചു കിട്ടുന്ന ഈ സംഖ്യയെ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ **പൊതുവ്യത്യാസം (Common difference)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി, 10 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 3 വീതം കൂട്ടി ഉണ്ടാക്കുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയാണ്

10, 13, 16, 19, 22, ...

ഈ ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം 3.

ഇനി 10 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 3 വീതം കുറച്ചാലോ ?

$$10, 7, 4, 1, -2, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണി കിട്ടും.

പൊതുവ്യത്യാസം

$$7 - 10 = 4 - 7 = 1 - 4 = -2 - 1 = \cdots = -3$$

പലപ്പോഴും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുന്നത്, ഏതു പദത്തിൽ നിന്നും തൊട്ടുപിന്നിലുള്ള പദം കുറച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് ഒരേ സംഖ്യയാണോ എന്നു നോക്കിയാണ്.

ഉദാഹരണമായി, 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി നോക്കാം;

$$1, 4, 7, \ldots$$

ശ്രേണീ നിയമം

3, 5, 7, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെ അടുത്ത പദം എന്താണ്?

ഇവിടെ സമാന്തരശ്രേണി എന്നു പറഞ്ഞിട്ടില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ അടുത്ത പദം 9 തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, ഉദ്ദേശിച്ചത് ഒറ്റസംഖ്യകളായ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, അടുത്ത പദം 11 ആണ്.

എന്താണിതിന്റെ ഗുണപാഠം ?

കുറേ സംഖ്യകൾ ക്രമമായി എഴുതിയതിൽ നിന്ന്, ശ്രേണിയിലെ തുടർന്നുള്ള പദങ്ങൾ കൃത്യമായി പറയാൻ കഴിയില്ല. ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച നിയമം, അല്ലെങ്കിൽ ശ്രേണി ഉണ്ടാകുന്ന സന്ദർഭം വ്യക്തമാക്കിയാലേ, തുടർന്നുള്ള പദങ്ങളെന്തെന്ന് പറയാൻ സാധിക്കൂ.

ഈ സംഖ്യകളെ ഇങ്ങനെ വിസ്തരിച്ച് എഴുതാമല്ലോ

$$(3 \times 0) + 1,\ (3 \times 1) + 1,\ (3 \times 2) + 1, \ldots$$

അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണിയിലെ ഒരു പദവും അടുത്ത പദവും എടുത്താൽ, ആദ്യത്തേത് 3 ന്റെ ഒരു ഗുണിതത്തോട് 1 കൂട്ടിയതും, അടുത്തത് 3 ന്റെ അടുത്ത ഗുണിതത്തോട് 1 കൂട്ടിയതും ആയിരിക്കും; രണ്ടാമത്തേതിൽ നിന്ന് ആദ്യത്തേത് കുറച്ചാൽ 3 തന്നെ കിട്ടുമല്ലോ.

അതിനാൽ, ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയാണ്; പൊതുവ്യത്യാസം 3

ഇനി 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ശിഷ്ടം 1 അല്ലാത്ത സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി എടുത്താലോ ?

$$2, 3, 5, 6, \ldots$$

ഇതിൽ

$$3 - 2 = 1$$

$$5 - 3 = 2$$

ഇവ ഒരേ സംഖ്യ അല്ല; ഇതൊരു സമാന്തരശ്രേണിയുമല്ല.

ഒരു സംഖ്യയെ 3 കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 1 അല്ല എന്നു പറഞ്ഞാൽ ശിഷ്ടം 0 ആകാം (സംഖ്യ 3 ന്റെ ഗുണിതമാകാം), അല്ലെങ്കിൽ ശിഷ്ടം 2 ആകാം. ശിഷ്ടം 0 വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയും ശിഷ്ടം 2 വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയും വെവ്വേറെ എഴുതിനോക്കൂ. ഇവ സമാന്തരശ്രേണികളാണോ ?

(1) ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ശ്രേണികളോരോന്നും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ എന്നു തീരുമാനിക്കുക. കാരണം എഴുതണം. സമാന്തരശ്രേണിയാണെങ്കിൽ, പൊതുവ്യത്യാസവും എഴുതണം.

(i) 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകൾ

(ii) 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 അല്ലെങ്കിൽ 2 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകൾ

(iii) എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ

(iv) എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ വിപരീതഭിന്നങ്ങൾ

(v) 2 ന്റെ കൃതികൾ

(vi) ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ പകുതി

(2) ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:

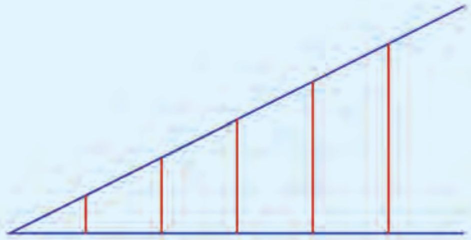
(i) ഓരോ ചതുരത്തിലും എത്ര ചെറിയ സമചതുരങ്ങളുണ്ട് ?

(ii) എത്ര വലിയ സമചതുരങ്ങളുണ്ട് ?

(iii) ആകെ എത്ര സമചതുരങ്ങളുണ്ട് ?

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ കിട്ടുന്ന ഓരോ ശ്രേണിയും സമാന്തരശ്രേണിയാണോ ?

(3) ചിത്രത്തിൽ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ടാണ് താഴത്തെ വരയിൽ നിന്ന് ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നത്.



ഇങ്ങനെ തുടരുന്ന ലംബങ്ങളുടെ ഉയരങ്ങളുടെ ശ്രേണി സമാന്തരശ്രേണിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(സൂചന: ഓരോ ലംബത്തിന്റെയും മുകളറ്റത്തു നിന്ന് അടുത്ത ലംബത്തിലേക്ക് ലംബം വരച്ചു നോക്കുക).

സ്ഥാനവും പദവും

1, 11 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും പദങ്ങളായി ഒരു സമാന്തരശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാമോ ?

എളുപ്പമല്ലേ ?

1 ൽ നിന്ന് 11 ൽ എത്താൻ 10 കൂട്ടണം. തുടർന്നും 10 തന്നെ കൂട്ടിക്കൊണ്ടിരുന്നാൽ സമാന്തരശ്രേണി ആകും;

1, 11, 21, 31, ...

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: 1, 11 എന്നീ സംഖ്യകൾ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും പദങ്ങളായി ഒരു സമാന്തര ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കാമോ ?

ഇങ്ങനെയൊരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ?

1 നോട് പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയതാണ് രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ; ആ സംഖ്യ നമുക്കറിയില്ല. ഒരിക്കൽക്കൂടി പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയായ 11 കിട്ടണം.

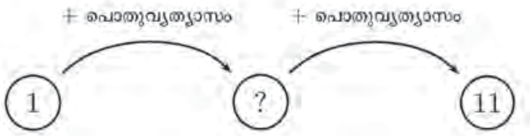
ശ്രേണിയും ശിഷ്ടവും

ഇരട്ടസംഖ്യകളായ 2, 4, 6, ... ഒരു സമാന്തര ശ്രേണിയാണ്. ഒറ്റസംഖ്യകളായ 1, 3, 5, ... ഉം സമാന്തരശ്രേണിയാണ്. രണ്ട് ശ്രേണികളുടെയും പൊതുവ്യത്യാസം 2 തന്നെ.

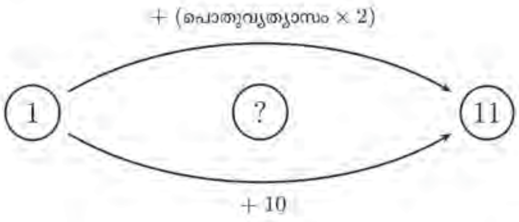
2 കൊണ്ടു പൂർണമായി ഹരിക്കാൻ കഴിയുന്ന (ശിഷ്ടം 0 ആയ) എണ്ണൽസംഖ്യകളാണല്ലോ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ; ശിഷ്ടം 1 വരുന്നവ ഒറ്റസംഖ്യകളും.

ഇതുപോലെ 3 കൊണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളെ ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടം 0, 1, 2 വരുന്ന മൂന്നു സമാന്തരശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം. ഇവയുടെയെല്ലാം പൊതുവ്യത്യാസം എന്താണ് ? ഹരിക്കുന്നത് 4 കൊണ്ടാണെങ്കിലോ ?

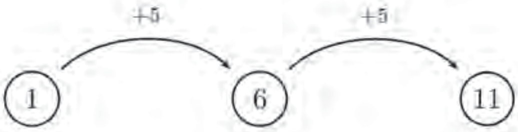
ഇനി മറിച്ചു ചിന്തിക്കാം. പദങ്ങളെല്ലാം എണ്ണൽസംഖ്യകളായ ഒരു സമാന്തരശ്രേണി എടുത്താൽ, ഏതു രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ ഗുണിതമാണ്; അതിനാൽ ഈ പദങ്ങളെ പൊതുവ്യത്യാസം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ തുല്യമാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?).



അതായത്, 1 നോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂട്ടുമ്പോഴാണ് 11 കിട്ടേണ്ടത്.



അപ്പോൾ പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് 10; പൊതുവ്യത്യാസം 5



ഇനി ശ്രേണി എഴുതാമല്ലോ

1, 6, 11, 16, 21, ...

ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലും ചില സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടില്ല. അവയുടെ സ്ഥാനം ◯ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) 24, 42, ◯, ◯, ...　　(ii) ◯, 24, 42, ◯, ...

(iii) ◯, ◯, 24, 42, ...　　(iv) 24, ◯, 42, ◯, ...

(v) ◯, 24, ◯, 42, ...　　(vi) 24, ◯, ◯, 42, ...

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

3-ാം പദം 37 ഉം, 7-ാം പദം 73 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം

(i) 3-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 7-ാം പദത്തിലെത്താൻ പൊതുവ്യത്യാസം $7 - 3 = 4$ തവണ കൂട്ടണം

(ii) കൂട്ടിയ സംഖ്യ $73 - 37 = 36$

(iii) അപ്പോൾ, പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 4 മടങ്ങ് 36

(iv) പൊതുവ്യത്യാസം $36 \div 4 = 9$

ആദ്യപദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

(i) 3-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 1-ാം പദത്തിലെത്താൻ, പൊതുവ്യത്യാസം $3 - 1 = 2$ തവണ കുറയ്ക്കണം

(ii) 1-ാം പദം, $37 - (9 \times 2) = 19$

ഇനി ശ്രേണി ആദ്യം മുതൽ എഴുതാമല്ലോ

19, 28, 37, 46, 55, ...

ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ രണ്ടു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തുള്ള പദങ്ങൾ ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ എഴുതുക.

(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
3-ാം പദം 34	3-ാം പദം 43	3-ാം പദം 2	5-ാം പദം 8	5-ാം പദം 7
6-ാം പദം 67	6-ാം പദം 76	5-ാം പദം 3	9-ാം പദം 10	7-ാം പദം 5

സ്ഥാനമാറ്റവും പദമാറ്റവും

ഈ സമാന്തരശ്രേണി നോക്കുക:

19, 28, 37, ...

ഇതിൽ

1-ാം പദം 19

2-ാം പദം 28

3-ാം പദം 37

....

എന്നിങ്ങനെയാണല്ലോ.

ഇക്കാര്യം അല്പം മാറ്റി ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

സ്ഥാനം	1	2	3	...
പദം	19	28	37	...

ഇതിലെ സ്ഥാനവും പദവും മാറുന്നതിന്റെ കണക്കെന്താണ് ?

സ്ഥാനം ഓരോന്നു കൂടുമ്പോഴും, പദം 9 വീതം കൂടുന്നു.

അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

പലതരത്തിൽ ആലോചിക്കാം

മുകളിൽ അവസാനമെഴുതിയ പദത്തിൽനിന്നു തുടങ്ങാം:

(i) 3-ാം സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 10-ാം സ്ഥാനത്തെത്താൻ, സ്ഥാനം 10 – 3 = 7 കൂടണം

(ii) 3-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 10-ാം പദത്തിലെത്താൻ 7 തവണ 9 കൂട്ടണം

(iii) 10-ാം പദം 37 + (9 × 7) = 100

ആദ്യത്തെ പദത്തിൽ നിന്നും തുടങ്ങാം:

(i) 1-ാം സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 10-ാം സ്ഥാനത്തെത്താൻ, സ്ഥാനം 10 – 1 = 9 കൂടണം

(ii) 1-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 10-ാം പദത്തിലെത്താൻ 9 തവണ 9 കൂട്ടണം

(iii) 10-ാം പദം 19 + (9 × 9) = 100

ഇതുപോലെ 2-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 10-ാം പദം കണക്കാക്കാമോ ?

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

4-ാം പദം 45 ഉം, 5-ാം പദം 56 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം എന്താണ് ?

ഇതിൽ, 4-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 5-ാം പദത്തിലെത്താൻ കൂട്ടിയത് 56 – 45 = 11 ആണല്ലോ. സമാന്തര ശ്രേണി ആയതിനാൽ, ഏതു പദത്തിൽനിന്നും അടുത്ത പദത്തിലെത്താൻ കൂട്ടേണ്ടത് 11 തന്നെ യാണ്.

ഇവിടെ കണക്കാക്കേണ്ടത് ഒന്നാം പദമാണല്ലോ.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം;

(i) 4-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 1-ാം പദത്തിലെത്താൻ, സ്ഥാനം 4 – 1 = 3 കുറയണം

(ii) 4-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 1-ാം പദത്തിലെത്താൻ 3 തവണ 11 കുറയ്ക്കണം

(iii) 1-ാം പദം 45 – (11 × 3) = 12

ഇനി ഈ ശ്രേണി ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ

12, 23, 34, ...

ഈ രണ്ടു കണക്കുകളിലും, പദങ്ങൾ ക്രമേണ വലുതാകുകയാണല്ലോ ചെയ്യുന്നത്.

പദങ്ങൾ ചെറുതാകുന്ന ശ്രേണിയാണെങ്കിലോ ?

ഉദാഹരണമായി ഈ സമാന്തരശ്രേണി നോക്കുക:

91, 82, 73, ...

ഇതിലെ 10-ാം പദം എങ്ങനെയെല്ലാം കണക്കാക്കാം ?

ഇതിൽ സ്ഥാനം കൂടുമ്പോൾ, പദം കുറയുകയാണല്ലോ. എത്ര കുറയുന്നു ?

സ്ഥാനം ഓരോന്നു കൂടുമ്പോഴും, പദം കുറയുന്നത് 91 – 82 = 9

അപ്പോൾ 10-ാം പദം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

(i) 3-ാം സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 10-ാം സ്ഥാനത്തെത്താൻ, സ്ഥാനം 10 – 3 = 7 കൂടണം

(ii) 3-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 10-ാം പദത്തിലെത്താൻ 7 തവണ 9 കുറയ്ക്കണം

(iii) 10-ാം പദം 73 – (9 × 7) = 10

ഇത്തരം ശ്രേണികളിൽ ഒരു സ്ഥാനത്തെ പദത്തിൽ നിന്ന് അതിനു പുറകിലെ ഒരു സ്ഥാനത്തെ പദം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

ഉദാഹരണമായി, ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

4-ാം പദം 65 ഉം, 5-ാം പദം 54 ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം എന്താണ് ?

ഇതിലും സ്ഥാനം കൂടുമ്പോൾ പദം കുറയുകയാണല്ലോ.

സ്ഥാനം ഓരോന്നു കൂടുമ്പോഴും, പദം കുറയുന്നത് 65 – 54 = 11

മറിച്ച്, സ്ഥാനം ഓരോന്നു കുറയുമ്പോഴോ ?

പദം 11 വീതം കൂടണമല്ലോ.

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ പദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം ?

(i) 4-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 1-ാം പദത്തിലെത്താൻ, സ്ഥാനം 4 – 1 = 3 കുറയണം

(ii) 4-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 1-ാം പദത്തിലെത്താൻ 3 തവണ 11 കൂട്ടണം

(iii) 1-ാം പദം 65 + (11 × 3) = 98

(1) 1, 11, 21, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 25-ാം പദം എന്താണ് ?

(2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദം 46 ഉം 11-ാം പദം 51 ഉം ആണ്.

 (i) ശ്രേണിയിലെ ഒന്നാമത്തെ പദം എന്താണ് ?

 (ii) ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ എഴുതുക.

(3) 100, 95, 90, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 21-ാം പദം എന്താണ് ?

(4) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദം 56 ഉം 11-ാം പദം 51 ഉം ആണ്.

 (i) ശ്രേണിയിലെ ഒന്നാമത്തെ പദം എന്താണ് ?

 (ii) ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങൾ എഴുതുക.

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ സ്ഥാനങ്ങൾ മാറുന്നതും, പദങ്ങൾ മാറുന്നതും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം അല്പം കൂടി വിശദമായി പരിശോധിക്കാം.

ഈ സമാന്തരശ്രേണി നോക്കുക:

5, 15, 25, ...

ഇത് സ്ഥാനങ്ങളും പദങ്ങളുമായി ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ:

സ്ഥാനം	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
പദം	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	...

ഇതിൽ സ്ഥാനങ്ങൾ ഓരോന്നു കൂടുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 10 വീതം കൂടുന്നു.

സ്ഥാനങ്ങൾ 2 വീതം കൂടിയാലോ ?

സ്ഥാനം	1	3	5	7	9	...
പദം	5	25	45	65	85	...

സ്ഥാനങ്ങൾ 3 വീതം കൂടിയാലോ ?

മറിച്ച്, സ്ഥാനങ്ങൾ കുറയുമ്പോഴോ ?

- സ്ഥാനങ്ങൾ ഓരോന്നു കുറയുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 10 വീതം കുറയുന്നു
- സ്ഥാനങ്ങൾ 2 വീതം കുറയുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 20 വീതം കുറയുന്നു
- സ്ഥാനങ്ങൾ 3 വീതം കുറയുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 30 വീതം കുറയുന്നു

ഇനി പദങ്ങൾ ചെറുതായി വരുന്ന ഒരു സമാന്തരശ്രേണി എടുത്താലോ ?

സ്ഥാനം	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
പദം	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	...

ഇതിലെ സ്ഥാനമാറ്റവും പദമാറ്റവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എന്താണ് ?

- സ്ഥാനങ്ങൾ ഓരോന്നു കൂടുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 5 വീതം കുറയുന്നു
- സ്ഥാനങ്ങൾ 2 വീതം കൂടുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 10 വീതം കുറയുന്നു
- സ്ഥാനങ്ങൾ 3 വീതം കൂടുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 15 വീതം കുറയുന്നു

സ്ഥാനങ്ങൾ കുറയുമ്പോഴോ ?

- സ്ഥാനങ്ങൾ ഓരോന്നു കുറയുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 5 വീതം കൂടുന്നു
- സ്ഥാനങ്ങൾ 2 വീതം കുറയുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 10 വീതം കൂടുന്നു
- സ്ഥാനങ്ങൾ 3 വീതം കുറയുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ 15 വീതം കൂടുന്നു

മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളിലും, സംഖ്യകൾ മാറുമെങ്കിലും സ്ഥാനമാറ്റവും പദമാറ്റവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇതുപോലെതന്നെ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലും പദങ്ങളിലെ മാറ്റം, സ്ഥാനങ്ങളുടെ മാറ്റത്തെ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്

ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ, **അനുപാതം** എന്ന പാഠത്തിലെ ആശയം ഉപയോഗിച്ച്, ഇത് ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലും പദങ്ങളിലെ മാറ്റം, സ്ഥാനങ്ങളുടെ മാറ്റത്തിന് ആനുപാതികമാണ്

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 3-ാം പദം 12 ഉം, 7-ാം പദം 32 ഉം ആണ്. ഇതിലെ 15-ാം പദം എന്താണ്?

ഇതിൽ 3-ാം സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 7-ാം സ്ഥാനത്തേക്കുള്ള സ്ഥാനമാറ്റവും പദമാറ്റവും എഴുതിനോക്കാം:

സ്ഥാനമാറ്റം $7 - 3 = 4$ കൂടി

പദമാറ്റം $32 - 12 = 20$ കൂടി

ഇതിൽനിന്ന് സ്ഥാനം ഓരോന്നു കൂടുമ്പോഴും, പദം $20 \div 4 = 5$ കൂടുമെന്നു കണക്കാക്കാം.

നമുക്കു വേണ്ടത് 15-ാം പദമാണല്ലോ. അതിന് 7-ാം സ്ഥാനത്തുനിന്ന് $15 - 7 = 8$ സ്ഥാനം മുന്നോട്ടു പോകണം; അപ്പോൾ പദം $5 \times 8 = 40$ കൂടും.

അതായത്, 15-ാം പദം $32 + 40 = 72$

മറ്റൊരു രീതിയിലും ഇതു ചെയ്യാം.

(i) സ്ഥാനം 4 കൂടിയപ്പോൾ, പദം 20 കൂടി

(ii) സ്ഥാനം $8 = 4 \times 2$ കൂടിയാൽ, പദം $20 \times 2 = 40$ കൂടണം

(iii) 15-ാം പദം $32 + 40 = 72$

ഈ രീതിയിൽ ഈ ശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം കണക്കാക്കാമോ?

(i) 3-ാം പദം 12

(ii) 3-ാം സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 2 സ്ഥാനം മുന്നിലാണ് 5-ാം സ്ഥാനം

(iii) സ്ഥാനം 4 കൂടുമ്പോൾ, പദം 20 കൂടുന്നു

(iv) സ്ഥാനം $2 = 4 \times \frac{1}{2}$ കൂടിയാൽ, പദം $20 \times \frac{1}{2} = 10$ കൂടുന്നു

(v) 5-ാം പദം $12 + 10 = 22$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 4-ാം പദം 81 ഉം, 6-ാം പദം 71 ഉം ആണ്. ഇതിലെ 20-ാം പദം എന്താണ്?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ ആദ്യം 4-ാം സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 6-ാം സ്ഥാനത്തേക്കുള്ള സ്ഥാനമാറ്റവും പദമാറ്റവും എഴുതിനോക്കാം:

സ്ഥാനമാറ്റം $6 - 4 = 2$ കൂടി

പദമാറ്റം $81 - 71 = 10$ കുറഞ്ഞു

നമുക്കു വേണ്ടത് 20-ാം പദം; അതായത്, 6-ാം പദത്തിൽനിന്ന് 20 – 6 = 14 സ്ഥാനം മുന്നിലെ പദം: ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) സ്ഥാനം 2 കൂടിയപ്പോൾ, പദം 10 കുറഞ്ഞു

(ii) സ്ഥാനം 14 = 2 × 7 കൂടിയാൽ, പദം 10 × 7 = 70 കുറയണം

(iii) 20-ാം പദം 71 – 70 = 1

(1) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 3-ാം പദം 15 ഉം 8-ാം പദം 35 ഉം ആണ്

(i) ശ്രേണിയിലെ 13-ാം പദം എന്താണ് ?

(ii) ശ്രേണിയിലെ 23-ാം പദം എന്താണ് ?

(2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 21 ഉം 9-ാം പദം 41 ഉം ആണ്

(i) ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദം എന്താണ് ?

(ii) ശ്രേണിയിലെ 3-ാം പദം എന്താണ് ?

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 4-ാം പദം 61 ഉം 7-ാം പദം 31 ഉം ആണ്

(i) ശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദം എന്താണ് ?

(ii) ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദം എന്താണ് ?

(4) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5-ാം പദം 10 ഉം 10-ാം പദം 5 ഉം ആണ്

(i) ശ്രേണിയിലെ 15-ാം പദം എന്താണ് ?

(ii) ശ്രേണിയിലെ 25-ാം പദം എന്താണ് ?

സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ മാറ്റം, സ്ഥാനമാറ്റത്തിന് ആനുപാതികമാണ് എന്ന കാര്യം, ഒരു സംഖ്യ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാനും ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി നേരത്തെ എഴുതിയ ഒരു ശ്രേണി നോക്കാം:

19, 28, 37, ...

ഇതിലെ 10-ാം പദം 100 ആണെന്നു കണ്ടല്ലോ.

1000 ഈ ശ്രേണിയിലെ പദമാണോ ?

ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദത്തിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തെ പദത്തിലേക്ക് നീങ്ങുമ്പോൾ പദം 28 – 19 = 9 കൂടുന്നുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ സ്ഥാനമാറ്റവും പദമാറ്റവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

സ്ഥാനമാറ്റം	1	2	3	...
പദമാറ്റം	9	9×2	9×3	...

അതായത്, ഏതു പദമാറ്റവും 9 ന്റെ ഗുണിതമാണ്.

അപ്പോൾ 1000 എന്ന സംഖ്യ, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദമാണോ എന്നറിയാൻ $1000 - 19 = 981$ എന്ന സംഖ്യ 9 ന്റെ ഗുണിതമാണോ എന്നു പരിശോധിച്ചാൽ മതി.

$$981 \div 9 = 109$$

ആയതിനാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ 110-ാം പദമാണ് 1000 എന്നു കാണാം.

ഇതുപോലെ 10000 എന്ന സംഖ്യ ഈ ശ്രേണിയിൽ ഉണ്ടോ എന്നും, ഉണ്ടെങ്കിൽ എത്രാമത്തെ പദമാണെന്നും പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ.

(1) 13, 24, 35, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, 101 ഒരു പദമാണോ ? 1001 ആയാലോ ?

(2) ചുവടെയുള്ള പട്ടികയിൽ ചില സമാന്തരശ്രേണികളും, ഓരോ ശ്രേണിയുടെയും നേർക്ക് രണ്ടു സംഖ്യകളും എഴുതിയിട്ടുണ്ട്. സംഖ്യകളോരോന്നും അതത് ശ്രേണിയിൽ ഉണ്ടാകുമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക:

ശ്രേണി	സംഖ്യ	ഉണ്ട്/ഇല്ല
11, 22, 33, ...	123	
	132	
12, 23, 34, ...	100	
	1000	
21, 32, 43, ...	100	
	1000	
$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$	3	
	4	
$\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{4}, \ldots$	3	
	4	

(3) മുകളിലെ പട്ടികയിൽ അതത് ശ്രേണിയിൽ വരുന്ന സംഖ്യകൾ ശ്രേണിയിലെ എത്രാമത്തെ പദമായിരിക്കും എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

പദബന്ധങ്ങൾ

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങൾ അറിഞ്ഞാൽ, ശ്രേണിയിലെ എല്ലാ പദങ്ങളും കണക്കാക്കാം എന്നു കണ്ടല്ലോ.

ഒരു പദവും അതിന്റെ സ്ഥാനവും മാത്രം അറിയാമെങ്കിൽ, സമാന്തരശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് എന്തെങ്കിലും പറയാൻ കഴിയുമോ ?

ഉദാഹരണമായി, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം 5 എന്നു മാത്രം പറഞ്ഞാൽ, ശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് മറ്റെന്തെങ്കിലും പറയാൻ പറ്റുമോ ?

പൊതുവ്യത്യാസം എന്തും ആകാമല്ലോ; അതനുസരിച്ച് ശ്രേണി എങ്ങനെയും തുടരാം.

പകരം, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 2-ാം പദം 5 എന്നു പറഞ്ഞാലോ ?

അപ്പോഴും പൊതുവ്യത്യാസം പലതായെടുത്ത് പല സമാന്തരശ്രേണികൾ ഉണ്ടാക്കാം.

പൊതുവ്യത്യാസമായി ചില സംഖ്യകളെടുത്ത്, 2-ാം പദമായ 5 ന്റെ തൊട്ടു പിന്നിലും, തൊട്ടു മുന്നിലും ഉള്ള പദങ്ങൾ (1-ാം പദവും, 3-ാം പദവും) മാത്രം എഴുതിനോക്കാം:

പൊതുവ്യത്യാസം 1 : 4, 5, 6

പൊതുവ്യത്യാസം 2 : 3, 5, 7

പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{2}$: $4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}$

പൊതുവ്യത്യാസം $\sqrt{2}$: $5 - \sqrt{2}, 5, 5 + \sqrt{2}$

പൊതുവ്യത്യാസം –1 : 6, 5, 4

ഈ സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധം കാണുന്നുണ്ടോ ?

എല്ലാറ്റിലും ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുക എന്താണ് ?

മൂന്നു സംഖ്യകളുടെയും തുകയോ ?

എന്തുകൊണ്ടാണിത് ?

പൊതുവ്യത്യാസം എന്തായാലും, 5 ൽ നിന്ന് ആ സംഖ്യ കുറച്ചതാണല്ലോ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ; 5 നോട് അതേ സംഖ്യ കൂട്ടിയത് അവസാനത്തെ സംഖ്യയും.

അപ്പോൾ, ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സംഖ്യകൾ കൂട്ടുക എന്നത്, ഫലത്തിൽ രണ്ടു അഞ്ചുകൾ കൂട്ടിയതു തന്നെയല്ലേ ?

ഇനി മൂന്നു സംഖ്യകളും കൂട്ടിയാൽ, നടുവിലത്തെ സംഖ്യയായ 5 കൂടി കൂട്ടണം. അപ്പോൾ 5 ന്റെ മൂന്നു മടങ്ങായി.

2-ാം പദമായി 5 നു പകരം മറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യയെടുത്താലോ ?

അപ്പോഴും മുകളിൽ പറഞ്ഞപോലെ തന്നെ 1-ാം പദത്തിന്റെയും 3-ാം പദത്തിന്റെയും തുക, ആ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങുതന്നെ ആയിരിക്കില്ലേ ?

ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുകയോ ?

ഇനി രണ്ടാം സ്ഥാനത്തിനു പകരം, മറ്റേതെങ്കിലും സ്ഥാനത്തെ ഒരു പദം എടുത്താലോ ?

അതിനു തൊട്ടു പിന്നിലുള്ള പദം, അതിൽനിന്ന് പൊതുവ്യത്യാസം കുറച്ചതാണ്; തൊട്ടു മുന്നിലുള്ള പദം, അതിനോട് പൊതുവ്യത്യാസം കൂട്ടിയതും;

അപ്പോൾ അവയുടെ തുക ആദ്യമെടുത്ത (നടുവിലെ) പദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ.

മൂന്നു പദങ്ങളുടെയും തുകയോ ?

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

(i) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, ഒരു പദത്തിന്റെ തൊട്ടു പിന്നിലും തൊട്ടു മുന്നിലും ഉള്ള പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യമെടുത്ത പദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

(ii) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, ഒരു പദത്തിന്റെയും അതിന്റെ തൊട്ടു പിന്നിലും തൊട്ടു മുന്നിലും ഉള്ള പദങ്ങളുടെയും തുക, ആദ്യമെടുത്ത പദത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു പദവും അതിന്റെ തൊട്ടു പിന്നിലും തൊട്ടു മുന്നിലും ഉള്ള പദങ്ങളും എടുത്താൽ, ശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങളായില്ലേ ?

അപ്പോൾ മുകളിൽ രണ്ടാമതു പറഞ്ഞ കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക, നടുവിലെ പദത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

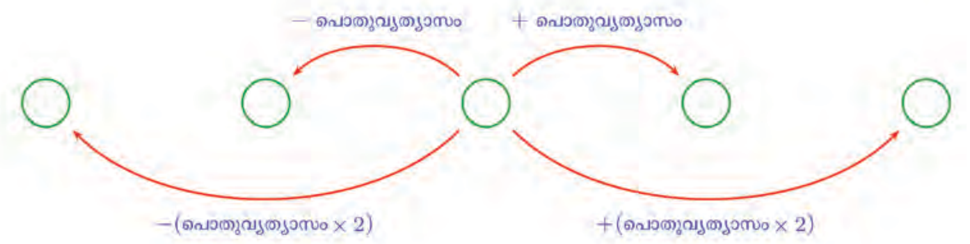
ഇതു തിരിച്ചു പറഞ്ഞാലോ ?

തുടർച്ചയായ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ മൂന്നിലൊന്നാണ് നടുവിലെ പദം.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 5, 6, 7 സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങളുടെ തുക 30 ആണെങ്കിൽ, 6-ാം പദം $30 \times \frac{1}{3} = 10$ ആയിരിക്കും.

ഇനി ഒരു പദത്തിന്റെ തൊട്ടു പിന്നിലും മുന്നിലും ഉള്ള പദങ്ങൾക്കു പുറമേ, അതിൽനിന്ന് രണ്ടു സ്ഥാനം പുറകിലുള്ള പദവും, രണ്ടു സ്ഥാനം മുമ്പിലുള്ള പദവും കൂടി എടുത്താലോ ?

രണ്ടു സ്ഥാനം പുറകോട്ടു നീങ്ങുമ്പോൾ, പദത്തിൽനിന്ന് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കുറയും; രണ്ടു സ്ഥാനം മുന്നോട്ട് നീങ്ങുമ്പോൾ, പദത്തിൽനിന്ന് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കൂടും.



തൊട്ടു പിന്നിലും മുന്നിലുമുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യമെടുത്ത പദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

രണ്ടു സ്ഥാനം പിന്നിലും, രണ്ടു സ്ഥാനം മുന്നിലും ഉള്ള പദങ്ങളുടെ തുകയോ ?

അവയിൽ ഒരെണ്ണം, ആദ്യമെടുത്ത പദത്തിൽനിന്ന് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങ് കുറച്ചതും മറ്റൊരെണ്ണം, ആദ്യമെടുത്ത പദത്തിനോട് പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുതന്നെ കൂട്ടിയതും ആണല്ലോ. അപ്പോൾ അവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാലും, ആദ്യമെടുത്ത പദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുതന്നെയല്ലേ ?

ഈ അഞ്ചുപദങ്ങളും കൂട്ടിയാലോ ?

ഇവയിലെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യയും അവസാനത്തെ സംഖ്യയും കൂട്ടിയാലും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയും, നാലാമത്തെ സംഖ്യയും കൂട്ടിയാലും നടുക്കുള്ള (മൂന്നാമത്തെ) സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. അപ്പോൾ അഞ്ചും കൂട്ടിയാൽ, മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയുടെ $2 + 2 + 1 = 5$ മടങ്ങായി.

ഇനി ഒരു പദത്തിന്റെ ഇരു വശത്തുമായി ഒരു സ്ഥാനം അകലെയും, രണ്ടു സ്ഥാനം അകലെയും, മൂന്നു സ്ഥാനം അകലെയുമായി ഏഴു പദങ്ങൾ എടുത്താലോ ?

പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

(i) **ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഒരു പദത്തിന്റെ മുന്നിലും പിന്നിലും ഒരേ അകലത്തിലുള്ള രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക, നടുവിലെ പദത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്**

(ii) **ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഒരു പദത്തിന്റെയും, അതിന്റെ മുന്നിലും പിന്നിലും തുടർച്ചയായ ഒരേ എണ്ണം പദങ്ങളുടെയും തുക, നടുവിലെ പദത്തിന്റെയും, മൊത്തം പദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്**

ഉദാഹരണമായി ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 10-ാം പദം 25 ആണെങ്കിൽ, മുകളിൽ ആദ്യം പറഞ്ഞതനുസരിച്ച് ഏതൊക്കെ തുകകൾ കണക്കാക്കാം ?

- 9-ാം പദത്തിന്റെയും 11-ാം പദത്തിന്റെയും തുക $25 \times 2 = 50$
- 8-ാം പദത്തിന്റെയും 12-ാം പദത്തിന്റെയും തുക $25 \times 2 = 50$

മറ്റേതൊക്കെ തുകകൾ 50 ആണെന്നു കണക്കാക്കാം ?

മുകളിൽ രണ്ടാമതു പറഞ്ഞ കാര്യം ഉപയോഗിച്ച് ഏതെല്ലാം തുകകൾ കണക്കാക്കാം ?

- 9, 10, 11 സ്ഥാനങ്ങളിലെ തുക $25 \times 3 = 75$
- 8, 9, 10, 11, 12 സ്ഥാനങ്ങളിലെ തുക $25 \times 5 = 125$

മറ്റേതൊക്കെ തുകകൾ കണക്കാക്കാം ?

ഇതിൽ മറ്റൊരു കാര്യം ശ്രദ്ധിച്ചോ ? ഒരു പദവും അതിന്റെ മുന്നിലും പിന്നിലും തുടർച്ചയായ ഒരേ എണ്ണം പദങ്ങളും എടുത്താൽ, ആകെ കിട്ടുന്ന പദങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യ ആണല്ലോ; തുടങ്ങിയത് അവയുടെ നടുക്കുള്ള പദവും. അപ്പോൾ മുകളിൽ രണ്ടാമതു പറഞ്ഞ കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങൾ, എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയായി എടുത്താൽ, അവയുടെ തുക, നടുവിലെ പദത്തിന്റെയും പദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമാണ്

(1) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 4-ാം പദം 8 ആണ്.

(i) ചുവടെപ്പറയുന്ന 2 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

(a) 3-ാം പദവും 5-ാം പദവും

(b) 2-ാം പദവും 6-ാം പദവും

(c) 1-ാം പദവും 7-ാം പദവും

(ii) 3-ാം പദം, 4-ാം പദം, 5-ാം പദം എന്നീ 3 പദങ്ങളുടെ തുക എന്താണ് ?

(iii) 2-ാം പദം മുതൽ 6-ാം പദം വരെയുള്ള 5 പദങ്ങളുടെ തുക എന്താണ് ?

(iv) 1-ാം പദം മുതൽ 7-ാം പദം വരെയുള്ള 7 പദങ്ങളുടെ തുക എന്താണ് ?

(2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസം 2 ഉം, 9-ാം പദം, 10-ാം പദം, 11-ാം പദം ഇവയുടെ തുക 90 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ പദം 10 ഉം, ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെ തുക 250 ഉം ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

ആദ്യത്തെ 5 പദങ്ങളുടെ തുക 250 ആയതിനാൽ, 3-ാം പദം (നടുവിലെ പദം) 50 എന്നു കണക്കാക്കാമല്ലോ (എങ്ങനെ?). 1-ാം പദം 10 ഉം, 3-ാം പദം 50 ഉം ആയതിനാൽ, പൊതുവ്യത്യാസം 20 എന്നും കണക്കാക്കാം. അപ്പോൾ ശ്രേണി 10, 30, 50, ...

(1) ആദ്യത്തെ 7 പദങ്ങളുടെ തുക 70 ആകുന്ന മൂന്നു സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 3 പദങ്ങളുടെ തുക 30 ഉം ആദ്യത്തെ 7 പദങ്ങളുടെ തുക 140 ഉം ആണ്.

(i) ശ്രേണിയിലെ 2-ാം പദം എന്താണ്?

(ii) ശ്രേണിയിലെ 4-ാം പദം എന്താണ് ?

(iii) ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 150 ഉം, ആദ്യത്തെ പത്തു പദങ്ങളുടെ തുക 550 ഉം ആണ്.

(i) ശ്രേണിയുടെ മൂന്നാം പദം എന്താണ്?

(ii) എട്ടാം പദം എന്താണ് ?

(iii) ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(4) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 11-ാം പദത്തിന്റെയും 21-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 80 ആയാൽ 16-ാം പദം എന്താണ് ?

(5) ഒരു പഞ്ചഭുജത്തിലെ കോണുകൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണ്.

(i) കോണുകൾ വലുപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതിയാൽ, മൂന്നാമത്തെ കോൺ എന്തായിരിക്കും ?

(ii) ഏറ്റവും ചെറിയ കോണളവ് 40° ആയാൽ മറ്റു കോണുകൾ എന്തൊക്കെയാകും ?

(iii) ഏറ്റവും ചെറിയ കോൺ 36° ആകുമോ ?

സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഒരു നിശ്ചിത സ്ഥാനത്തെ പദം മാത്രം അറിഞ്ഞാലും, അതിലെ പല പദങ്ങളുടെയും തുക കണക്കാക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ.

മറ്റൊരുതരത്തിലുള്ള കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 2-ാം പദത്തിന്റെയും 5-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 35 എന്നു പറഞ്ഞാൽ, ശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് മറ്റെന്തെങ്കിലും പറയാൻ കഴിയുമോ?

ഇതിലെ 2-ാം പദമായി ഏതു സംഖ്യയും എടുക്കാമല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 2-ാം പദം 10 എന്നെടുത്താലോ ?

5-ാം പദം $35 - 10 = 25$

ഇനി പൊതുവ്യത്യാസം $(25 - 10) \div 3 = 5$ എന്നും കണക്കാക്കാം. തുടർന്ന് ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ കുറേ പദങ്ങളും കണക്കാക്കാം;

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots$$

ഇതിൽ ഒരു കാര്യം ശ്രദ്ധിച്ചോ ?

3-ാം പദത്തിന്റെയും 4-ാം പദത്തിന്റെയും തുക = 15 + 20 = 35

1-ാം പദത്തിന്റെയും 6-ാം പദത്തിന്റെയും തുക = 5 + 30 = 35

2-ാം പദമായി മാറ്റേതെങ്കിലും സംഖ്യ എടുത്ത്, ഈ തുകകൾ കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഈ തുകകളെല്ലാം 35 തന്നെ ആകുന്നത് ?

കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന കാര്യം ഒരു ചിത്രമാക്കിനോക്കാം:

2-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 3-ാം പദത്തിലേയ്ക്ക് മാറാൻ പൊതുവ്യത്യാസം ഒരു തവണ കൂട്ടണം.

5-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 4-ാം പദത്തിലേയ്ക്ക് മാറാൻ പൊതുവ്യത്യാസം ഒരു തവണ കുറയ്ക്കണം.

അപ്പോൾ 3-ാം പദത്തിന്റെയും 4-ാം പദത്തിന്റെയും തുകയും 35 തന്നെയല്ലേ ?

ഇതുപോലെ 1-ാം പദവും 6-ാം പദവും കൂട്ടിയാലോ ?

ഇതുപോലെ 4-ാം പദത്തിന്റെയും 8-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 45 എന്നു പറഞ്ഞാൽ, മറ്റെന്തൊക്കെ തുകകൾ കണക്കാക്കാം ?

- 4-ാം പദത്തിൽനിന്ന് ഒരു സ്ഥാനം മുന്നോട്ടും 8-ാം പദത്തിൽനിന്ന് ഒരു സ്ഥാനം പിന്നോട്ടും നീങ്ങി, 5-ാം പദവും 7-ാം പദവും കൂട്ടിയാൽ 45

- 4-ാം പദത്തിൽനിന്ന് ഒരു സ്ഥാനം പിന്നോട്ടും 8-ാം പദത്തിൽനിന്ന് ഒരു സ്ഥാനം മുന്നോട്ടും നീങ്ങി, 3-ാം പദവും 9-ാം പദവും കൂട്ടിയാൽ 45

ഇനിയും ഏതൊക്കെ സ്ഥാനങ്ങളിലെ തുക 45 തന്നെയാകും ?

സ്ഥാനങ്ങൾ	4, 8	5, 7	3, 9	...	...
പദങ്ങളുടെ തുക	45	45	45	...	...

ഇതുപോലെ 2-ാം സ്ഥാനത്തെയും 6-ാം സ്ഥാനത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുക 30 എന്ന് പറഞ്ഞാൽ മറ്റേതെല്ലാം സ്ഥാനങ്ങളുടെ തുക 30 തന്നെയാണെന്ന് പറയാം ?

ഈ കണക്കുകളെക്കുറിച്ച് പൊതുവായി എന്തു പറയാം ?

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഒരു സ്ഥാനം കൂട്ടുകയും, മറ്റൊരു സ്ഥാനം അത്രതന്നെ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ ഈ സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങളുടെ തുക മാറുന്നില്ല

ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുകയും, മറ്റൊരു സംഖ്യ അത്രതന്നെ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ, തുക മാറില്ലല്ലോ; മറിച്ച് ഒരു ജോടി സംഖ്യകളുടെ തുക മറ്റൊരു ജോടി സംഖ്യകളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഒരു സംഖ്യ കൂടുകയും മറ്റൊരു സംഖ്യ അത്രതന്നെ കുറയുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ മുകളിൽ പറഞ്ഞ കാര്യം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളുടെ തുക, മറ്റു രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണെങ്കിൽ, ഈ ജോടി സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും തുല്യമാണ്

അപ്പോൾ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളുടെ തുക 100 എന്നു പറഞ്ഞാൽ, ശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് മറ്റെന്തെങ്കിലും പറയാൻ കഴിയുമോ ?

ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളെ, ഒരേ തുക വരുന്ന രണ്ടു ജോടികളാക്കാമല്ലോ.

- 1-ാം പദവും 4-ാം പദവും
- 2-ാം പദവും 3-ാം പദവും

ഈ നാലു പദങ്ങളുടെയും തുക 100 ആയതിനാൽ ഈ ജോടികൾ ഓരോന്നിന്റെയും തുക 50 ആകണം; അതായത്,

- 1-ാം പദത്തിന്റെയും 4-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 50
- 2-ാം പദത്തിന്റെയും 3-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 50

ഈ കണക്കിൽത്തന്നെ 1-ാം പദം 10 എന്നും കൂടി പറഞ്ഞാലോ ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

- 4-ാം പദം 50 – 10 = 40
- 1-ാം പദം 10 ഉം 4-ാം പദം 40 ഉം ആയതിനാൽ, പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ 3 മടങ്ങ് 40 – 10 = 30
- പൊതുവ്യത്യാസം 30 ÷ 3 = 10
- ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ നാലു പദങ്ങൾ 10, 20, 30, 40

(1) ആദ്യത്തെ 4 പദങ്ങളുടെ തുക 100 ആയ നാല് സമാന്തരശ്രേണികൾ എഴുതുക.

(2) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 1-ാം പദം 5 ഉം; ആദ്യത്തെ 6 പദങ്ങളുടെ തുക 105 ഉം; ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ 7-ാം പദത്തിന്റെയും 8-ാം പദത്തിന്റെയും തുക 50; ആദ്യത്തെ 14 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

(4) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങൾ എഴുതുക

(i) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക 300.

(ii) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ നാലു പദങ്ങളുടെ തുക 300.

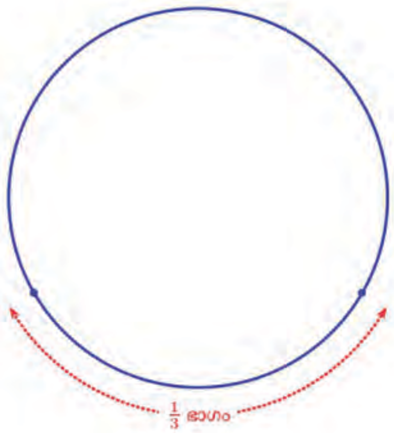
(iii) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ അഞ്ചു പദങ്ങളുടെ തുക 300.

(iv) ആദ്യപദം 30; ആദ്യത്തെ ആറു പദങ്ങളുടെ തുക 300.

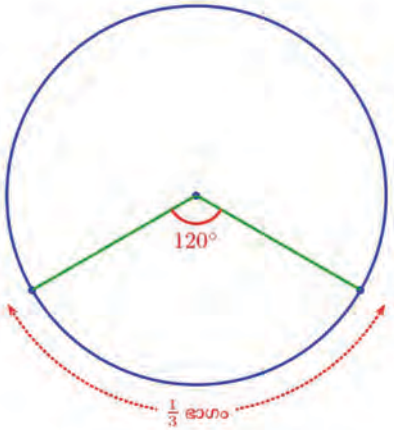
2 വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും

വൃത്തഭാഗങ്ങൾ

ഒരു വളയത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം മുറിച്ചെടുക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

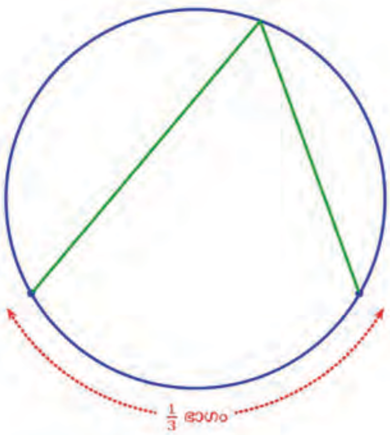


ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തഭാഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **നീളവും കോണും** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഇത്തരം ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $360° \times \frac{1}{3} = 120°$ ആയിരിക്കണമല്ലോ.

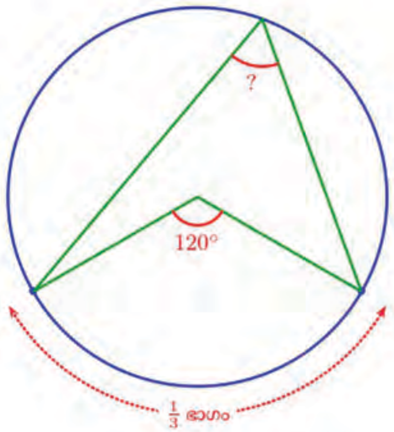


അപ്പോൾ ആദ്യം, എട്ടാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഞാണുകൾ** എന്ന ഭാഗത്തിൽ കണ്ട ഏതെങ്കിലും രീതി ഉപയോഗിച്ച്, വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക; കേന്ദ്രത്തിൽ 120° കോൺ വരച്ച്, $\frac{1}{3}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപം അടയാളപ്പെടുത്തുക.

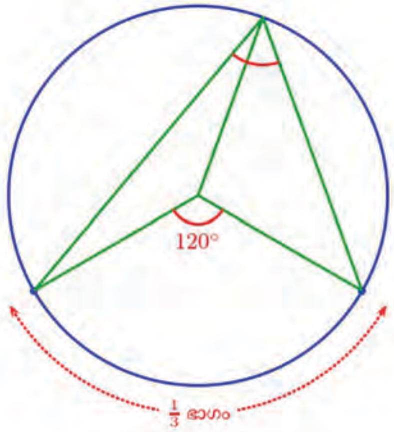
കേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്താതെ, നേരിട്ട് ഈ ചാപം അടയാളപ്പെടുത്താൻ കഴിയുമോ ? അതായത്, വൃത്തത്തിലെ തന്നെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ടു വര വരച്ച്, ഈ ചാപം അടയാളപ്പെടുത്താൻ വല്ല വഴിയുമുണ്ടോ ?



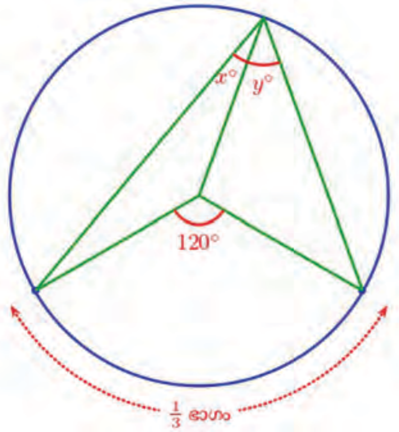
ചോദ്യം കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കാം. മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെ കോൺ എത്രയായി എടുത്താലാണ്, കേന്ദ്രത്തിലെ കോൺ 120° ആകുക ?

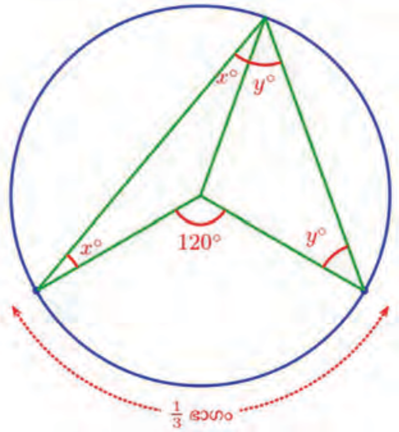


ഇതു കണക്കാക്കാൻ, ഈ കോണിന്റെ മൂലയും വൃത്തകേന്ദ്രവും തമ്മിൽ യോജിപ്പിച്ച്, ഈ കോണിനെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കാം:

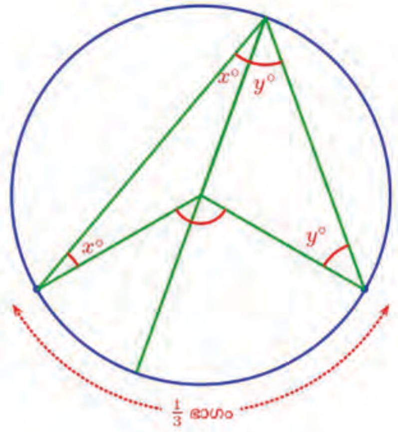


ഇപ്പോൾ ചിത്രത്തിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുണ്ടല്ലോ. രണ്ടിന്റെയും ഒരു ജോടി വശങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ ആയതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണ്; അതായത് ഇവ രണ്ടും സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ്. അപ്പോൾ മുകളിലെ കോണിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ $x°$, $y°$ എന്നെടുത്താൽ, ത്രികോണങ്ങളിലെ താഴത്തെ കോണുകളും ഇവ തന്നെയാണ്.

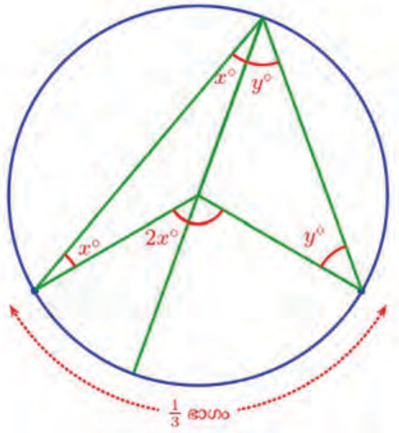


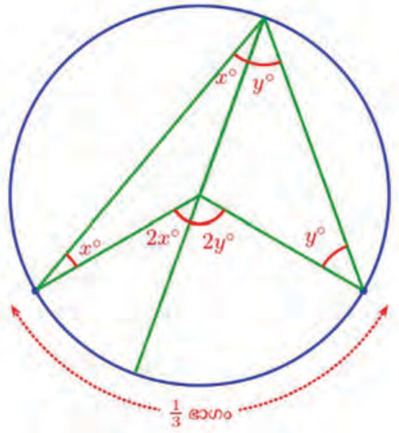


ഇനി ത്രികോണങ്ങളുടെ പൊതുവായ വശം നീട്ടി വരച്ചാൽ, കേന്ദ്രകോണും രണ്ടു ഭാഗമാകും:



കേന്ദ്രകോണിന്റെ ഈ ഭാഗങ്ങൾ, ഇടതും വലതുമുള്ള സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാം മൂലകളിലെ പുറംകോണുകളാണ്; അതിനാൽ ഇവ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകകളാണ് (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **ബഹുഭുജങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പുറംകോണുകൾ** എന്ന ഭാഗം).





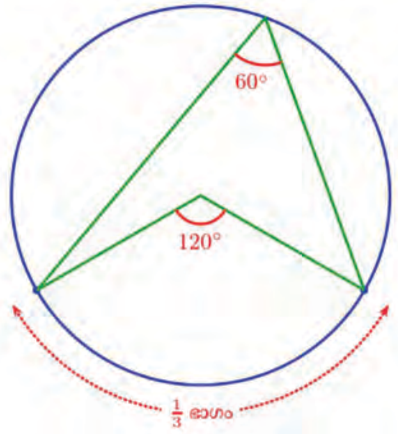
കേന്ദ്രകോൺ 120° ആയതിനാൽ

$$2x + 2y = 120$$

എന്നും, ഇതിൽനിന്ന്

$$x + y = 60$$

എന്നും കാണാമല്ലോ. അതായത്, ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, 60°.



a എന്ന പേരിൽ ഒരു Angle Slider നിർമ്മിക്കുക. *A* എന്ന ഒരു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ *B* എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Angle With Given Size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് *B* യിലും തുടർന്ന് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി '*a*' എന്ന് നൽകുക. വൃത്തത്തിൽ ഒരു പുതിയ ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. BA, AB' എന്നീ വരകൾ വരച്ച് കേന്ദ്രകോൺ അടയാളപ്പെടുത്തുക. കേന്ദ്രകോൺ 180° യിൽ കുറവാകത്തക്കവിധം ക്രമീകരിക്കുക. വൃത്തത്തിലെ വലിയ ചാപത്തിൽ *C* എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി BC, $B'C$ എന്നീ വരകൾ വരച്ച് $\angle C$ അടയാളപ്പെടുത്തുക. $\angle A$, $\angle C$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ് ? *C* യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. സ്ലൈഡർ ഉപയോഗിച്ച് $\angle A$ മാറ്റി നോക്കൂ.

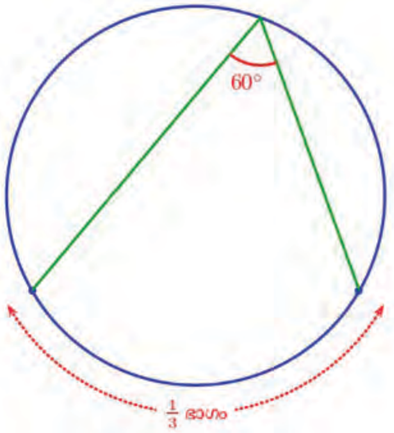
ഇവിടെ കണ്ടത് എന്താണ് ?

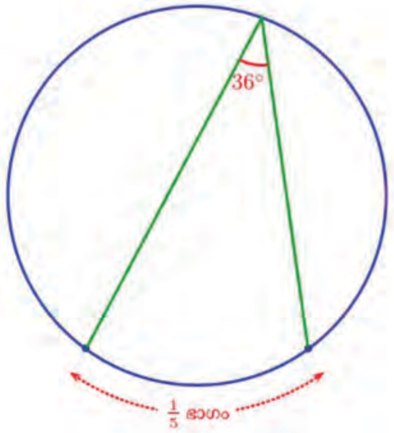
വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം അടയാളപ്പെടുത്താൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ 120° അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിനു പകരം, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ 60° അടയാളപ്പെടുത്തിയാലും മതി.

ഇതുപോലെ, ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം അടയാളപ്പെടുത്താൻ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കേണ്ട കോണിന്റെ അളവ് എത്രയാണെന്നു കണക്കാക്കുക.

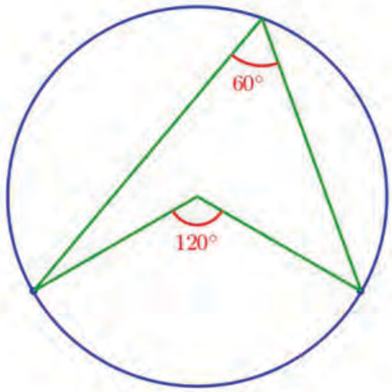
ചാപവും കോണും

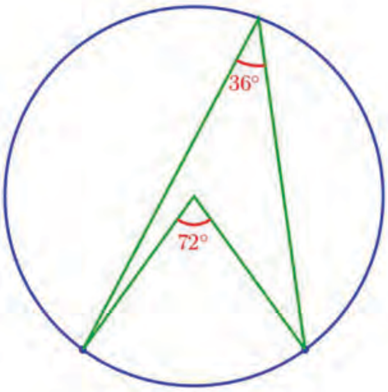
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ 60° അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമായ ചാപം കിട്ടുമെന്നും, 36° അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗമായ ചാപം കിട്ടുമെന്നും കണ്ടല്ലോ.





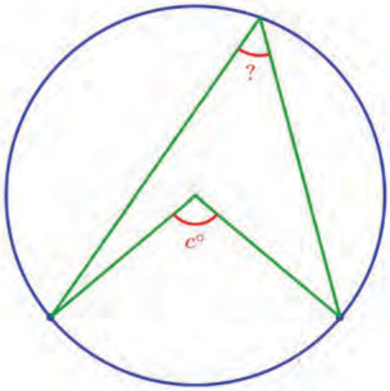
ഇക്കാര്യങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങൾക്കു പകരം, ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകൾ ഉപയോഗിച്ചും പറയാം.





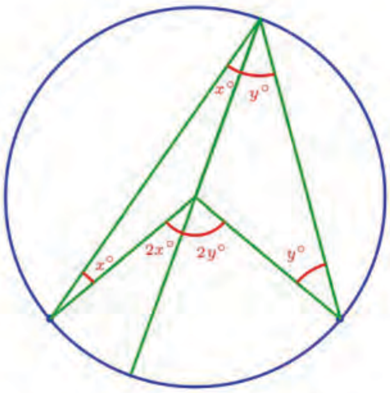
അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യം: വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതികോൺ കിട്ടുമോ?

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $c°$ എന്നെടുക്കാം.



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, വൃത്തകേന്ദ്രവും, വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര മുകളിലെ കോണിനെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ $x°, y°$ എന്നെടുക്കാം.

ഈ വര നീട്ടിവരച്ച് കോണുകൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ.



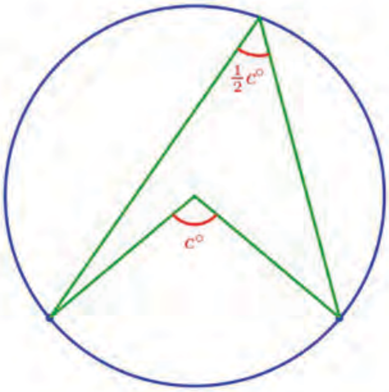
കേന്ദ്രകോൺ $c°$ എന്നാണല്ലോ എടുത്തത്. അപ്പോൾ

$$2x + 2y = c$$

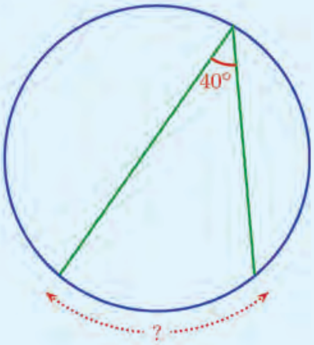
എന്നും ഇതിൽനിന്ന്

$$x + y = \frac{1}{2}c$$

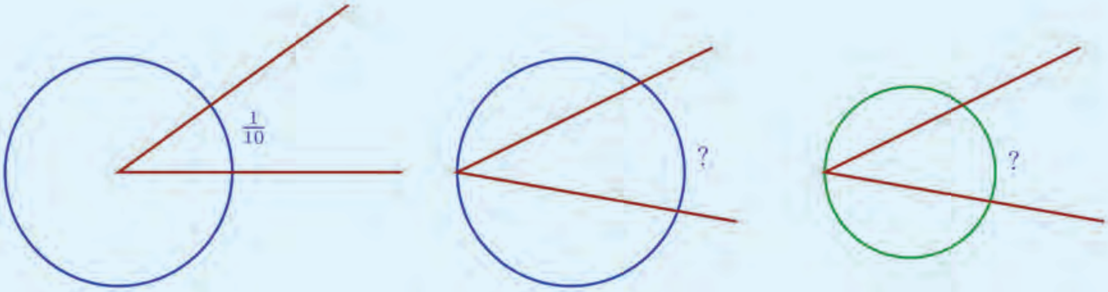
എന്നും കാണാം.



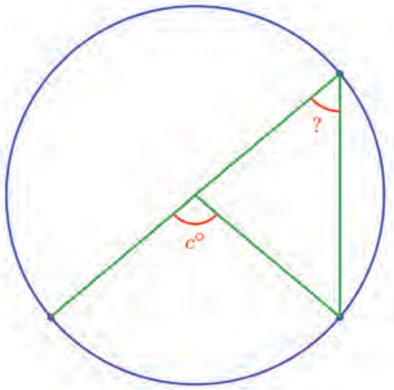
(1) ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?



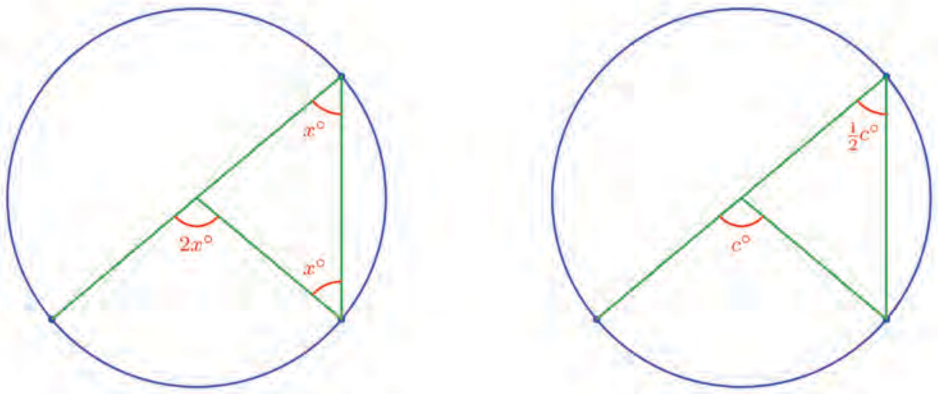
(2) ഒരു കമ്പി രണ്ടായി മടക്കി, അതിന്റെ മൂല ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ വച്ചപ്പോൾ, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{10}$ ഭാഗം അതിനുള്ളിൽപ്പെട്ടു. ഇതേ കമ്പിയുടെ മൂല, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ചേർത്തു വച്ചാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് അതിനുള്ളിലുണ്ടാകുക? മറ്റേതെങ്കിലും വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ചേർത്തുവച്ചാലോ?



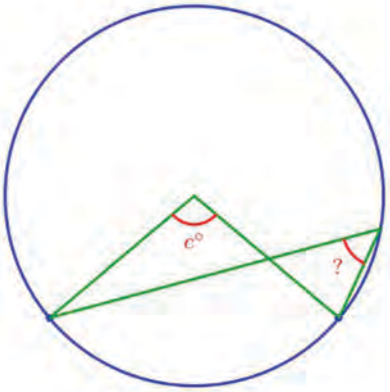
അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും പകുതിക്കോൺ കിട്ടുമോ? ചിത്രം ഇങ്ങനെ ആയാലോ ?



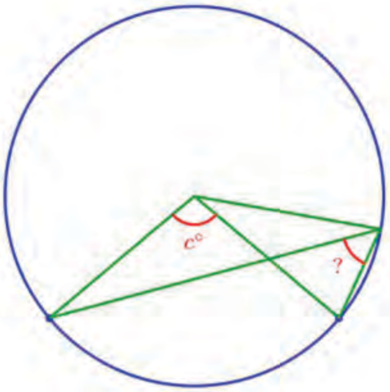
ഇതിൽ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദു, ചാപത്തിന്റെ ഒരറ്റത്തിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന വ്യാസം വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ്. അപ്പോൾ ഈ ബിന്ദുവിൽ ചാപം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ $x°$ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റു കോണുകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമല്ലോ.



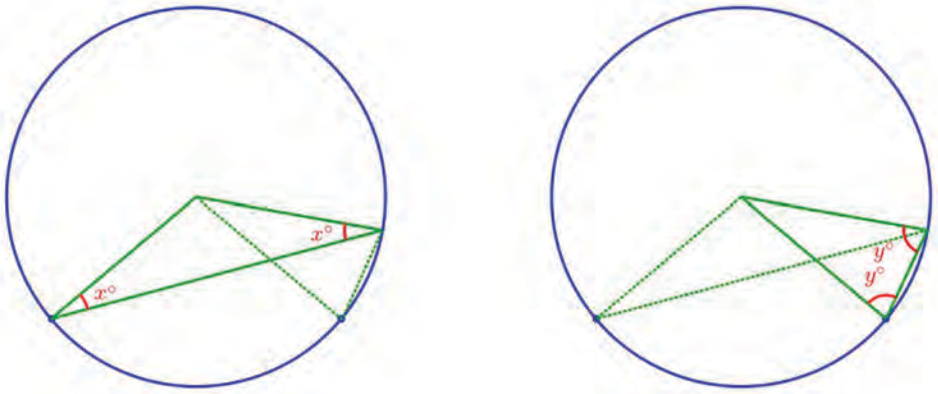
ഇനി വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദു വീണ്ടും താഴ്ത്തി ഇങ്ങനെ എടുത്താലോ ?



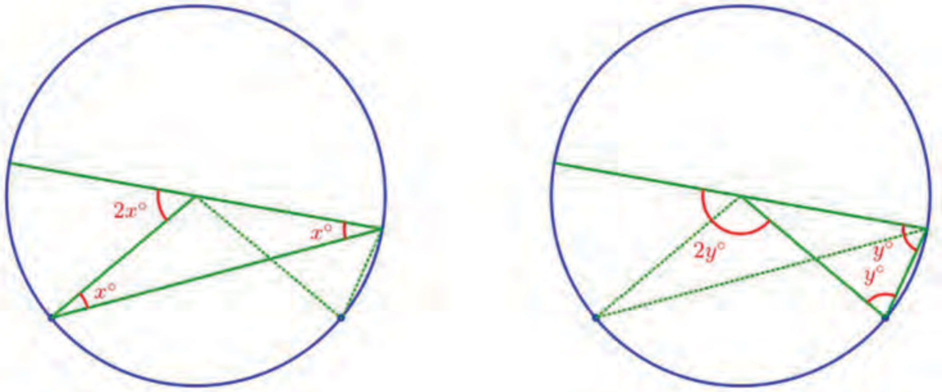
വീണ്ടും ഈ ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കാം.



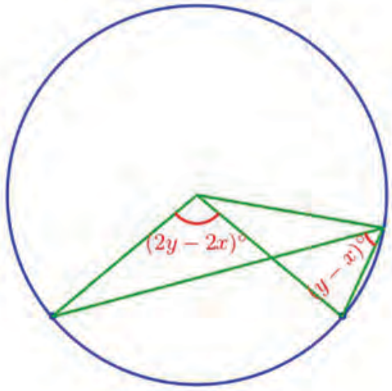
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളിലെ തുല്യമായ കോണുകൾ $x°$, $y°$ എന്നെടുക്കാം:

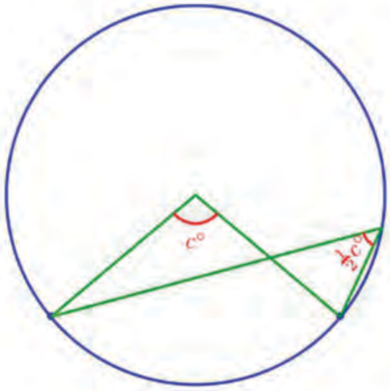


ഇനി ത്രികോണങ്ങളുടെ പൊതുവായ വശം നീട്ടി വരച്ച്, പുറംകോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം:

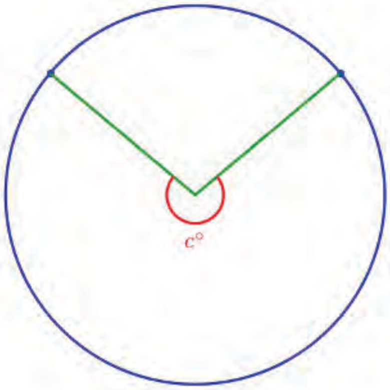


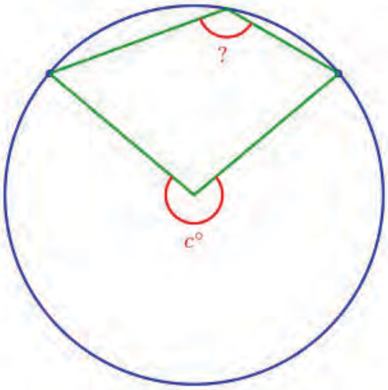
ഇതിൽനിന്ന്, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും കണക്കാക്കാമല്ലോ.



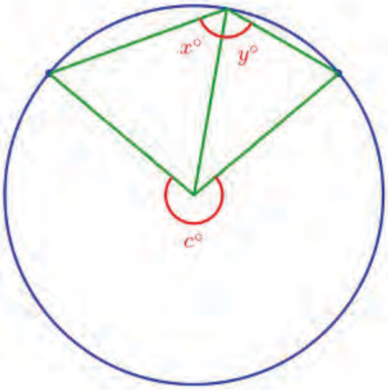


ഇതുവരെ ഉപയോഗിച്ചതെല്ലാം, കേന്ദ്രകോൺ 180° യേക്കാൾ കുറവായ ചാപങ്ങളാണ്. കേന്ദ്രകോൺ 180° യേക്കാൾ കൂടുതലായാലോ?

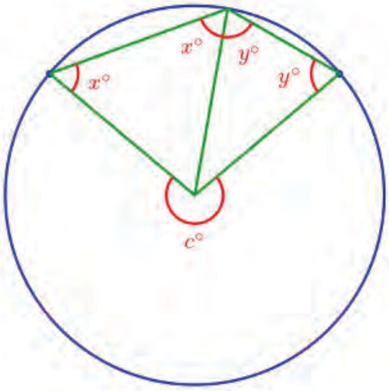




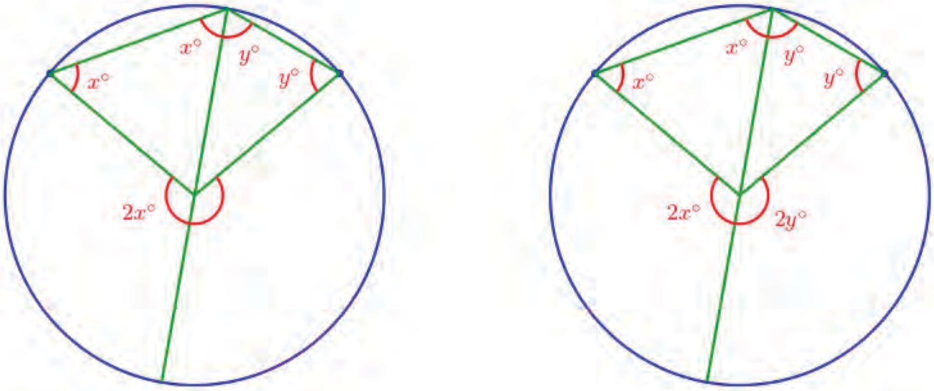
മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ വൃത്തകേന്ദ്രവും ചാപത്തിലല്ലാത്ത വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഈ ബിന്ദുവിലെ കോണിനെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ $x°$, $y°$ എന്നെടുക്കാം.



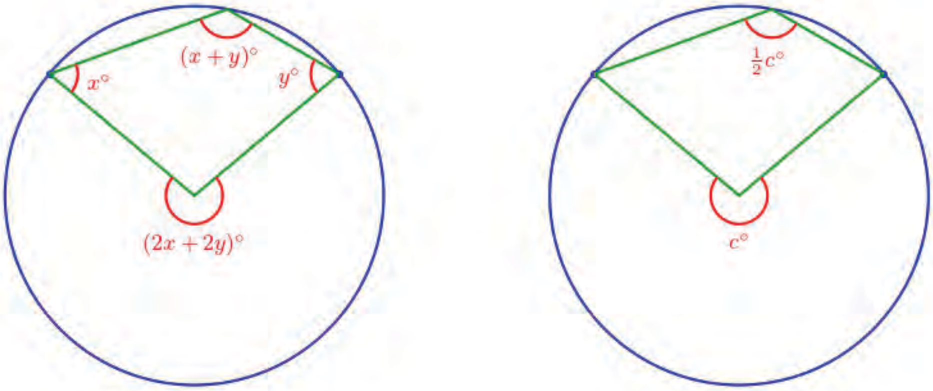
വൃത്തത്തിലെ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സമപാർശ്വമായതിനാൽ, ഇടതും വലതും കോണുകളും x° യും y° യും തന്നെ.



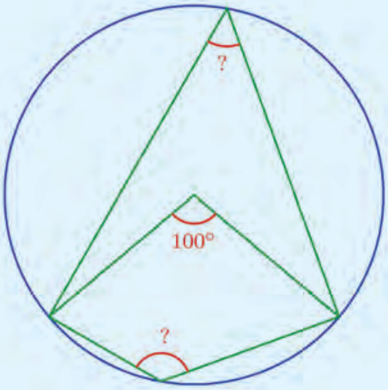
ഇനി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെതന്നെ, ഈ വര നീട്ടി വരച്ച്, കേന്ദ്രകോണിനെ ത്രികോണങ്ങളുടെ പുറംകോണുകളായി ഭാഗിക്കാം.

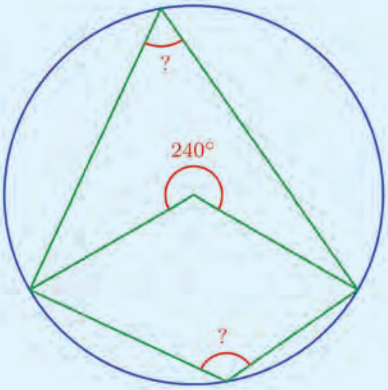


ഇതിൽനിന്ന്, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും കണക്കാക്കാമല്ലോ.



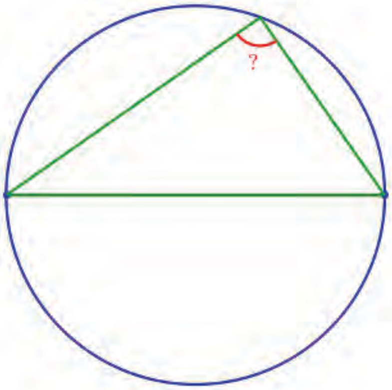
ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്.



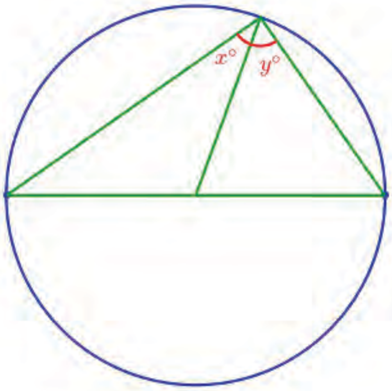


ഓരോ ചിത്രത്തിലും ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

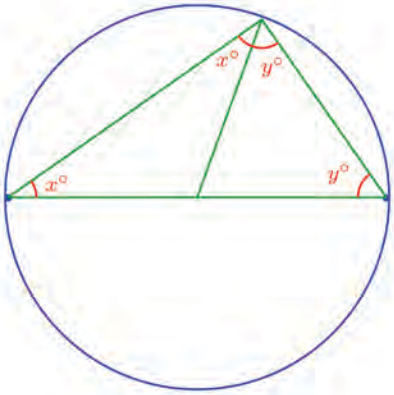
ഇനി ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 180° തന്നെയായാലോ ? അതായത്, ചാപം അർധവൃത്തമായാലോ ?

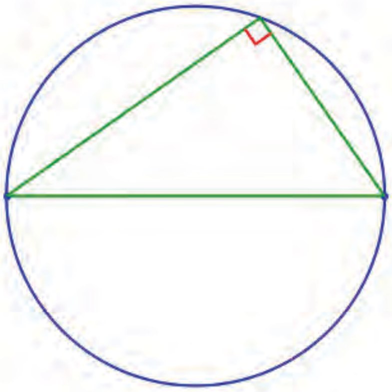


വൃത്തകേന്ദ്രവും വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ബിന്ദുവിലെ കോണിനെ, $x°, y°$ എന്നീ ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു എന്നെടുക്കാം.



സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളിലെ താഴത്തെ കോണുകളും $x°$, $y°$ ഇവതന്നെയാണ്.





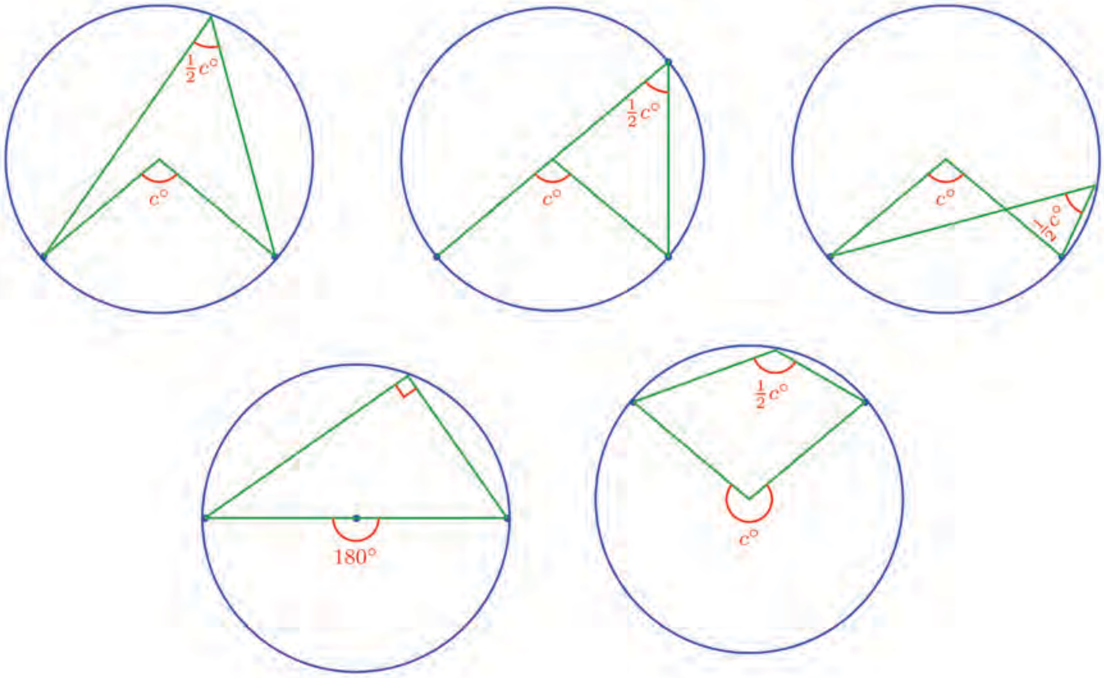
വൃത്തത്തിനകത്തെ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ

$$(x + y) + x + y = 180$$

എന്നും ഇതിൽ നിന്ന് $x + y = 90$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

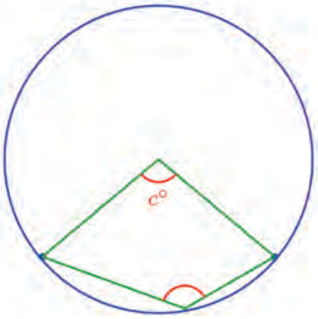
ഈ കണക്കുകളിലെല്ലാം ചെയ്തത് എന്താണ്?

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന കോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കി:



ഇതിലെല്ലാം ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദു, ചാപത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ചാപത്തിലെ തന്നെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോൺ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയല്ലെന്ന് എളുപ്പം കാണാമല്ലോ:



ഇതുവരെ കണ്ടതെല്ലാം ചേർത്ത് പൊതുതത്വമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ ആ ചാപത്തിൽ അല്ലാത്ത, ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലുണ്ടാകുന്ന കോൺ, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്

ഇതിൽ അർധവൃത്തത്തിന്റെ കാര്യം പ്രത്യേകം പറയേണ്ടതാണ്.

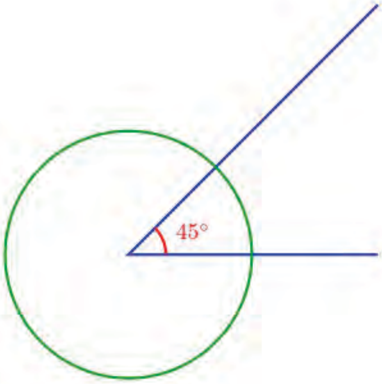
അർധവൃത്തത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ മട്ടമാണ്

ഇതല്പം ചുരുക്കി, ഇങ്ങനെയും പറയാം:

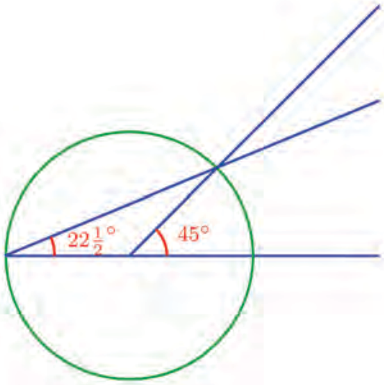
അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടമാണ്

ഈ തത്വങ്ങളുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾ നോക്കാം.

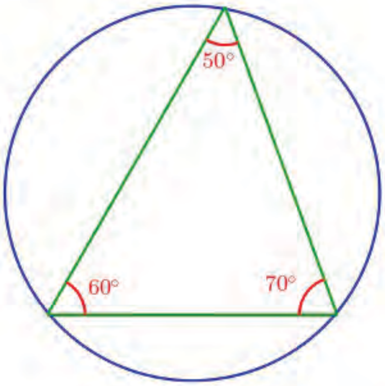
കോണുകൾ പകുതിയാക്കാൻ ആദ്യം പറഞ്ഞ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



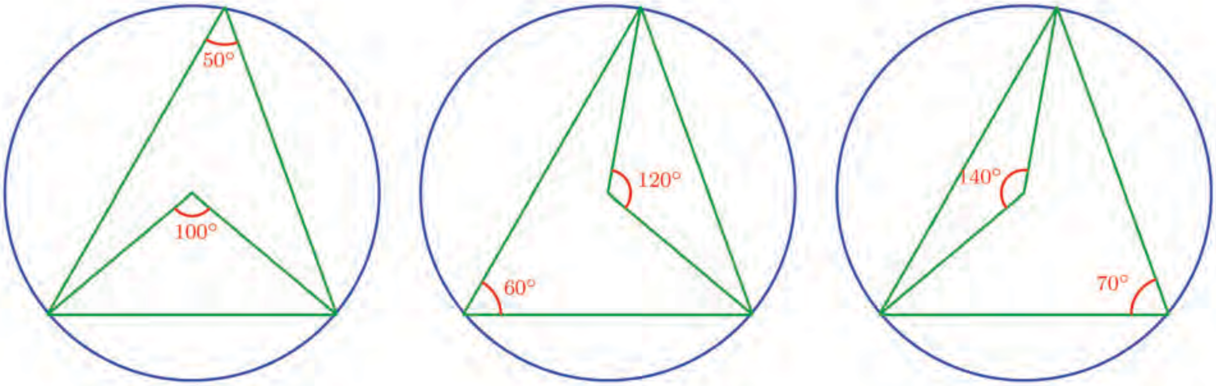
കോണിന്റെ മൂല കേന്ദ്രമായാണ് വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇനി കോണിന്റെ താഴത്തെ വര നീട്ടി വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും, കോണിന്റെ മുകളിലെ വര വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചാൽ പകുതിക്കോണായി.



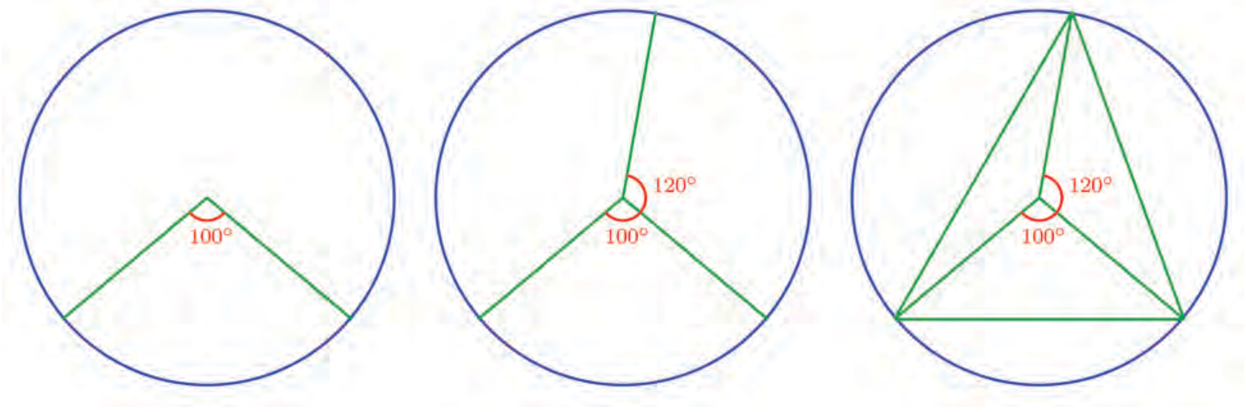
ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ നിശ്ചിത കോണുകളുള്ള ത്രികോണം വരയ്ക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലായതും, കോണുകൾ 50°, 60°, 70° യും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.



ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ, വൃത്തത്തെ മൂന്നു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നുണ്ടല്ലോ. അവയുടെ കേന്ദ്രകോണുകൾ എന്താണ് ?

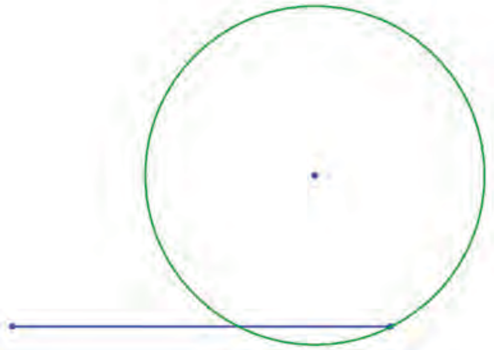


അപ്പോൾ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ ഇതിലെ രണ്ടു കോണുകൾ വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

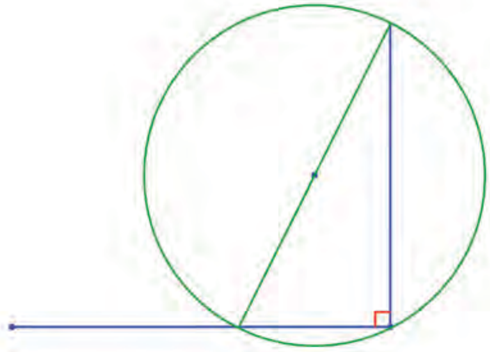


ഇനി അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടമാണ് എന്ന തത്വം ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. ചിത്രത്തിലെ വരയുടെ വലത്തെ അറ്റത്തുകൂടി വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കണം.

അതിന് ആദ്യം, ഈ ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതും, വരയെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്നതുമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കണം:



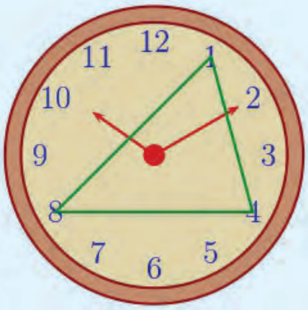
ഇനി ഈ ബിന്ദുവിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസം വരച്ച്, അതിന്റെ മറ്റേ അറ്റം, ആദ്യത്തെ വരയുടെ അറ്റവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:



അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടമായതിനാൽ, ഈ വര, ആദ്യത്തെ വരയ്ക്ക് ലംബമാണ്.

സ്കെയിലും കോമ്പസും ഉപയോഗിച്ച് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കാനുള്ള മറ്റൊരു മാർഗം എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ (**സമഭാജികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വരയുടെ സമഭാജികൾ** എന്ന ഭാഗം).

(1) ഒരു ക്ലോക്കിലെ 1, 4, 8 എന്നീ സംഖ്യകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.



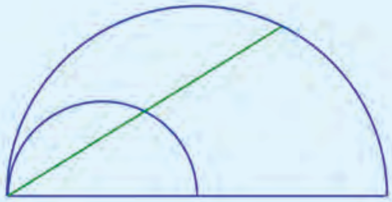
(i) ഈ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

(ii) ക്ലോക്കിലെ സംഖ്യകൾ യോജിപ്പിച്ച് എത്ര സമഭുജത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം ?

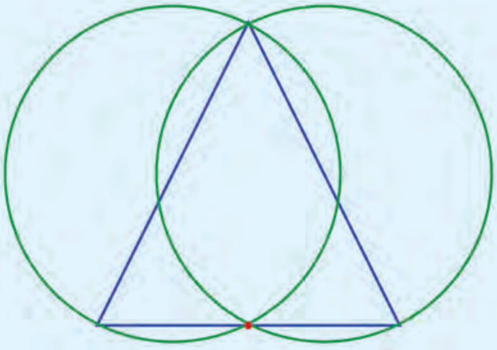
(2) പരിവൃത്തആരം 3.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(3) പരിവൃത്തആരം 3 സെന്റിമീറ്ററും, രണ്ടു കോണുകൾ $32\frac{1}{2}^\circ$ യും $37\frac{1}{2}^\circ$ യും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു വര വ്യാസമായി വലിയ അർധവൃത്തവും, വരയുടെ പകുതി വ്യാസമായി ചെറിയ അർധവൃത്തവും വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വലിയ അർധവൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ, ചെറിയ അർധവൃത്തം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

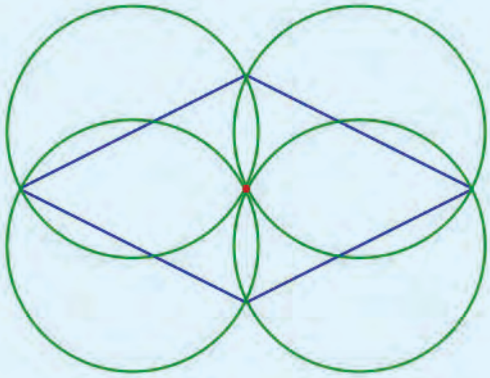


(5) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങൾ വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങൾ, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക:

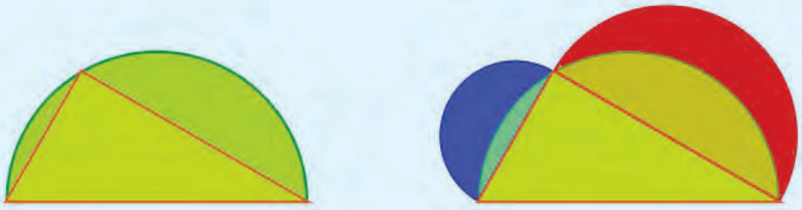


(*സൂചന : ഓരോ വൃത്തമായി പരിശോധിക്കുക*).

(6) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളും വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളെല്ലാം പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക.



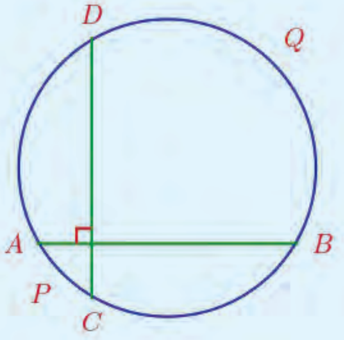
(7) ഒരു അർധവൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവും, വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളും ചേർത്ത് ഒരു ത്രികോണം വരച്ചു. തുടർന്ന്, ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ വ്യാസമായി അർധ വൃത്തങ്ങളും വരച്ചിട്ടുണ്ട്.



രണ്ടാം ചിത്രത്തിലെ നീലയും ചുവപ്പുമായ ചന്ദ്രക്കലകളുടെ പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

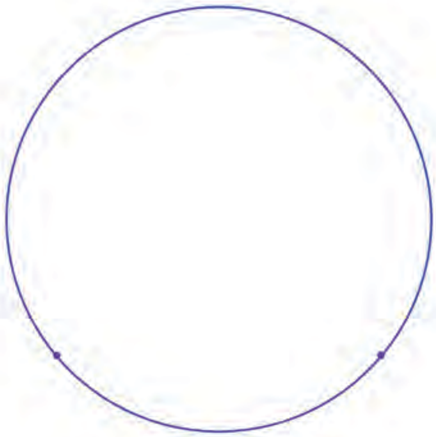
(സൂചന: ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തഭാഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ അവസാനത്തെ ചോദ്യം ഓർക്കുക).

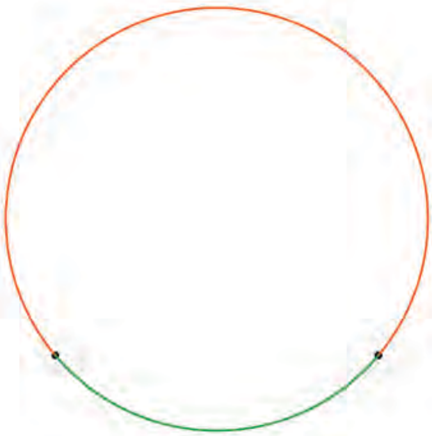
(8) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിൽ, *AB*, *CD* ഇവ പരസ്പരം ലംബമായ ഞാണുകളാണ്. *APC*, *BQD* എന്നീ ചാപങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ചാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ പകുതിയാകും എന്നു തെളിയിക്കുക.



വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ

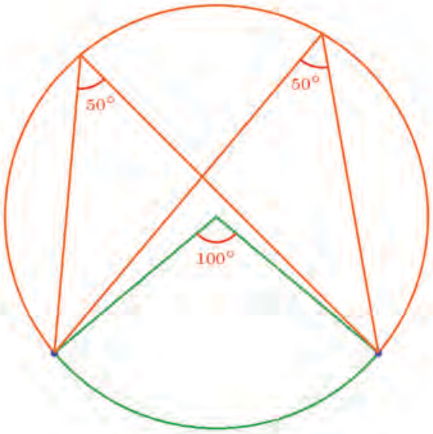
വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും അതിനെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുമല്ലോ.

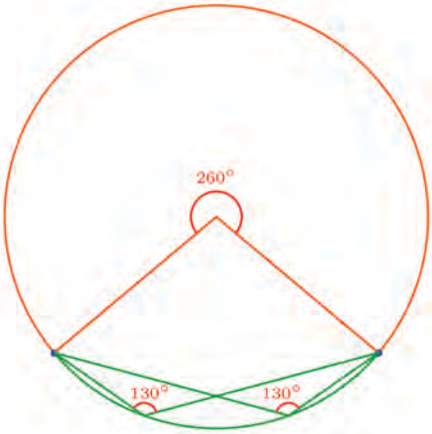




ഇവയിൽ ഓരോ ചാപത്തിനേയും മറ്റേ ചാപത്തിന്റെ **മറുചാപം (Alternate arc)** എന്നു വിളിക്കാം. വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു, ഇവയിലെ ഒരു ചാപത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ അതിന്റെ മറുചാപത്തിലാണ്. അപ്പോൾ ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെ പറയാം:

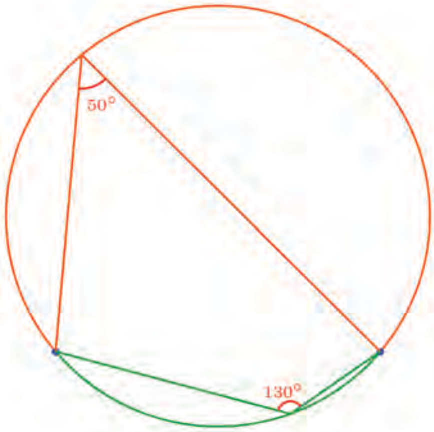
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, മറുചാപത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായും യോജിപ്പിച്ചാലുണ്ടാകുന്ന കോൺ, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്



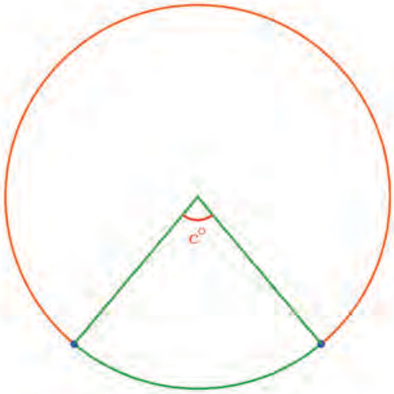


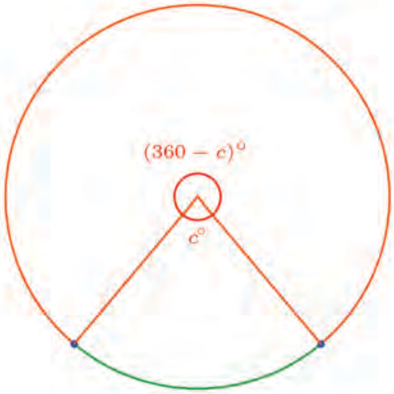
അതായത്, വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തെ രണ്ട് ചാപങ്ങളായി മുറിക്കുന്നു; ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഇവയിലെ ഒരു ചാപത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്.

ഒരു ചാപത്തിലെയും മറുചാപത്തിലെയും ബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം ?

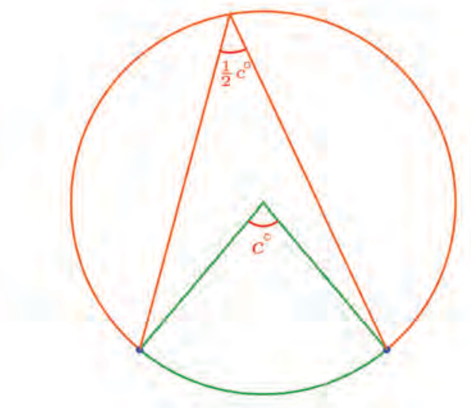


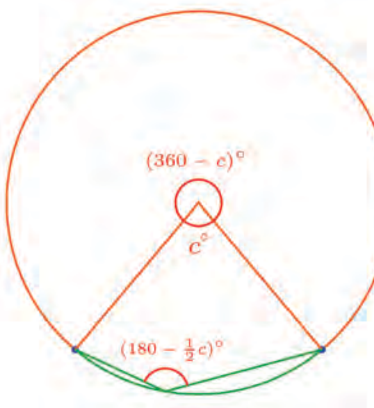
വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു ചാപത്തിന്റെയും മറുചാപത്തിന്റെയും കേന്ദ്രകോണുകളുടെ തുക 360° ആണല്ലോ.





ഒരു ചാപത്തിലെയും മറുചാപത്തിലെയും ബിന്ദുക്കളിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ ഇവയുടെ പകുതിയും.

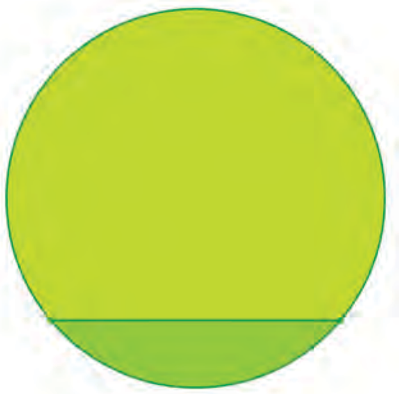




അപ്പോൾ എന്തു പറയാം ?

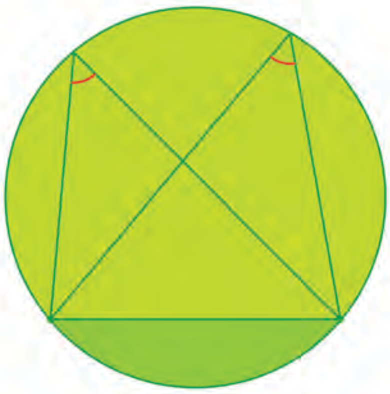
> വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ, അവ നിശ്ചയിക്കുന്ന ഒരു ചാപത്തിലും മറുചാപത്തിലും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളുടെ തുക 180° ആണ്.

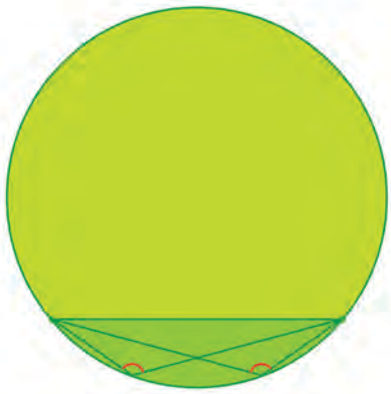
ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം. വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഒരു ഞാൺ, വൃത്തപ്പരപ്പിനെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ.



ഇത്തരം വൃത്തഭാഗങ്ങളെ **വൃത്തഖണ്ഡം (Circular segment)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഒരു ഞാൺ മുറിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ മറ്റൊന്നിന്റെ **മറുഖണ്ഡം (Alternate segment)** എന്നും പറയാം.

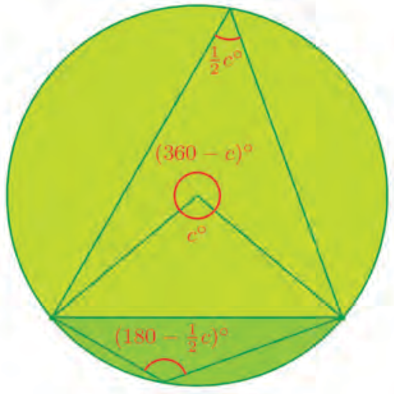
അപ്പോൾ വൃത്തത്തിലെ കോണുകളെക്കുറിച്ച് ചാപങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞത്, വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും പറയാം.



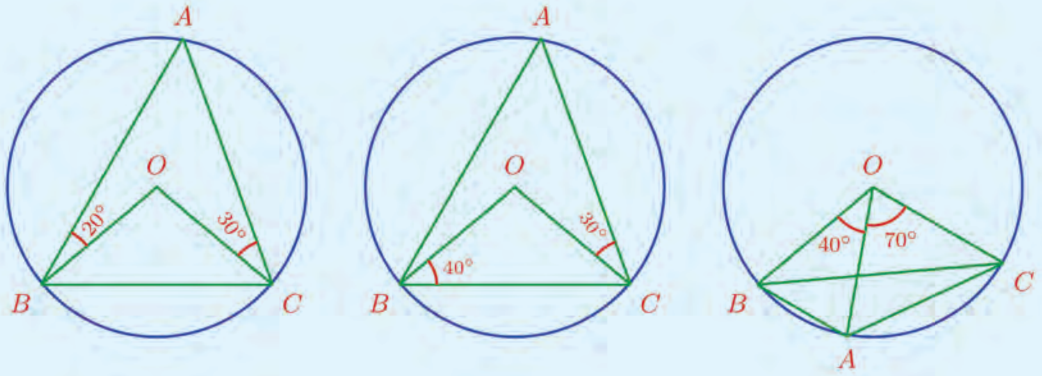


ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്. ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെയും മറുഖണ്ഡത്തിലെയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണ്

വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തെ ഭാഗിക്കുന്ന ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളും, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച ഞാൺ വൃത്തപ്പരപ്പിനെ ഭാഗിക്കുന്ന വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാണ്:



(1) ചുവടെയുള്ള മൂന്നു ചിത്രങ്ങളിലും O വൃത്ത കേന്ദ്രവും A, B, C വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്. ഓരോന്നിലും ABC, OBC എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കുക.



(2) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ കണക്കിലും ഒരു വൃത്തവും അതിലൊരു ഞാണും വരച്ച് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കണം. ഭാഗങ്ങൾ കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പോലെയാകണം:

(i) ഒരു ഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം $80°$

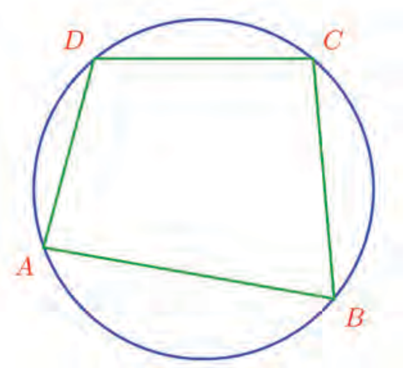
(ii) ഒരു ഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം $110°$

(iii) ഒരു ഭാഗത്തെ കോണുകളെല്ലാം, മറുഭാഗത്തെ കോണുകളുടെ പകുതി

(iv) ഒരു ഭാഗത്തെ കോണുകളെല്ലാം, മറുഭാഗത്തെ കോണുകളുടെ ഒന്നര മടങ്ങ്

വൃത്തവും ചതുർഭുജവും

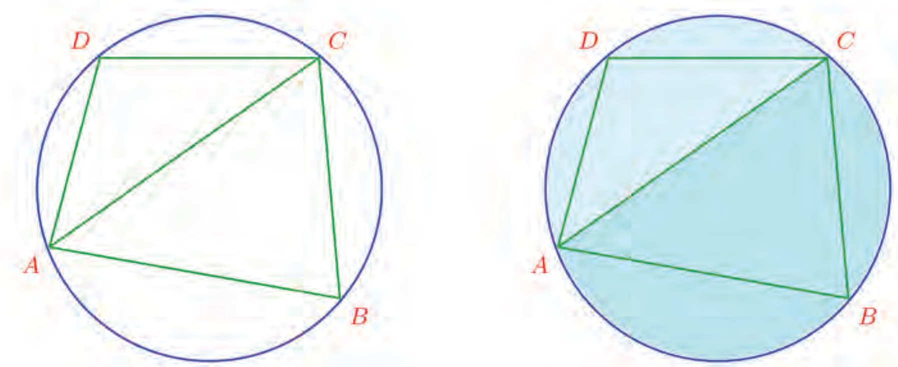
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച്, മൂലകൾ വൃത്തത്തിൽ വരത്തക്കവിധം ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ കോണുകളെല്ലാം അടയാളപ്പെടുത്തുക (Angle ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ മതി). എതിർകോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണെന്ന് പരിശോധിക്കൂ. ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.

വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ചതുർഭുജത്തിലെ എതിർകോണുകൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

കിട്ടിയില്ലെങ്കിൽ AC യോജിപ്പിച്ചുനോക്കൂ:



ഇപ്പോൾ B യിലെയും D യിലെയും കോണുകൾ, AC എന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകളാണ്. അതിനാൽ അവയുടെ തുക $180°$ ആണ്.

ഇതുപോലെ, BD വരച്ചുനോക്കിയാൽ A യിലെയും C യിലെയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണെന്നു കിട്ടും.

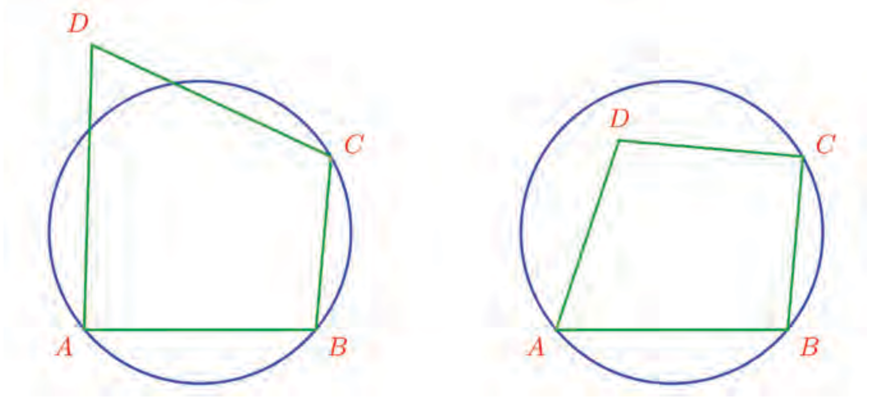
അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ, അതിലെ എതിർകോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണ്

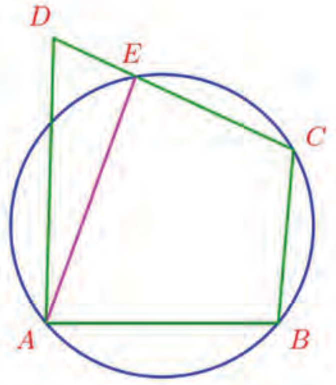
മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ ? അതായത്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. ഏതു ചതുർഭുജത്തിന്റെയും മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വരകളും വൃത്തങ്ങളും** എന്ന ഭാഗം).

ഇനി നാലാമത്തെ മൂല ചിലപ്പോൾ വൃത്തത്തിൽ തന്നെയാകാം, അല്ലെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന് അകത്തോ പുറത്തോ ആകാം. വൃത്തത്തിലായാൽ ആ മൂലയിലെയും എതിർമൂലയിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180° ആയിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടല്ലോ.



ആദ്യത്തെ ചിത്രം നോക്കാം. വൃത്തം *CD* യെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവും *A* യും യോജിപ്പിച്ചാൽ, നാലു മൂലയും വൃത്തത്തിലായ ചതുർഭുജമായി.



ഇപ്പോൾ *A*, *B*, *C*, *E* ഇവയെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ,

$$\angle B + \angle AEC = 180° \quad (1)$$

ഇതിലെ $\angle AEC$ എന്നത്, *AED* എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, *E* യിലെ പുറംകോണാണ്. അപ്പോൾ

$$\angle AEC = \angle D + \angle EAD$$

ഇതിൽനിന്ന്

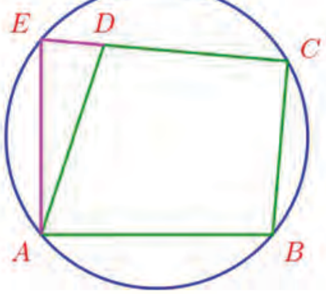
$$\angle D < \angle AEC \quad (2)$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ (1), (2) എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളുടെ അർഥം ആലോചിച്ചാൽ,

$\angle B + \angle D < 180°$ എന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല.

അപ്പോൾ നാലാം മൂല വൃത്തത്തിന് പുറത്തായാൽ ആ മൂലയിലേയും എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ ൽ കുറവായിരിക്കും.

ഇനി രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, *CD* നീട്ടി, അതു വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും *A* യും യോജിപ്പിക്കാം:



Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു ചതുർഭുജം *ABCD* വരയ്ക്കുക. Circle through 3 points ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് *A, B, C* എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. $\angle D$, $\angle B$ എന്നിവ നിരീക്ഷിക്കുക. *D* യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. *D* എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിന് പുറത്തായിരിക്കുമ്പോൾ ഈ കോണളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? വൃത്തത്തിനകത്തായിരിക്കുമ്പോഴോ ? വൃത്തത്തിലായാലോ ?

ഇതിൽ

$$\angle B + \angle E = 180° \qquad (3)$$

എന്നു കാണാം. കൂടാതെ *AED* എന്ന ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$\angle ADC > \angle E \qquad (4)$$

(3), (4) എന്നീ ബന്ധങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle ADC > 180°$$

എന്നു കാണമല്ലോ.

അപ്പോൾ നാലാം മൂല വൃത്തത്തിന് അകത്തായാൽ ആ മൂലയിലെയും എതിർമൂലയിലെയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ യിൽ കൂടുതൽ.

> ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിനു പുറത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ, ആ മൂലയിലേയും, എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ യേക്കാൾ കുറവാണ്; അകത്താണെങ്കിൽ, തുക $180°$ യേക്കാൾ കൂടുതലും.

ഇനി *ABCD* എന്ന ഒരു ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle B + \angle D = 180°$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. *A, B, C* ഇവയിൽക്കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

D വൃത്തത്തിനു പുറത്താകുമോ ? പുറത്താണെങ്കിൽ, $\angle B$, $\angle D$ ഇവയുടെ തുക $180°$ യേക്കാൾ കുറവാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തല്ല.

D അകത്താണോ ? അകത്താണെങ്കിൽ $\angle B$, $\angle D$ ഇവയുടെ തുക $180°$ യേക്കാൾ കൂടുതലാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു അകത്തുമല്ല.

പുറത്തും അകത്തുമല്ലാത്തതുകൊണ്ട്, *D* വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

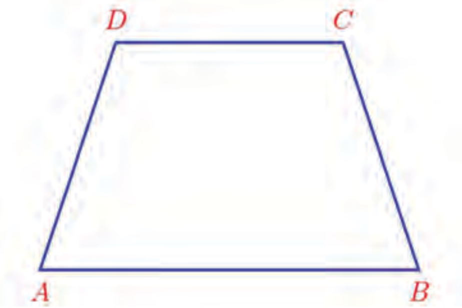
അതായത്,

> **ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം**

നാല് മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജം എന്നതിനെ ചുരുക്കി **ചക്രീയചതുർഭുജം (Cyclic quadrilateral)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, എതിർകോണുകളുടെ തുക 180° ആയ ചതുർഭുജങ്ങളാണ് ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങൾ.

ചതുരങ്ങളെല്ലാം ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങളാണല്ലോ.

സമപാർശ്വലംബകങ്ങളും ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ABCD ഒരു സമപാർശ്വലംബകമാണ്. അപ്പോൾ

$$\angle A = \angle B$$

മാത്രമല്ല, *AB* യും *CD* യും സമാന്തരമായതിനാൽ

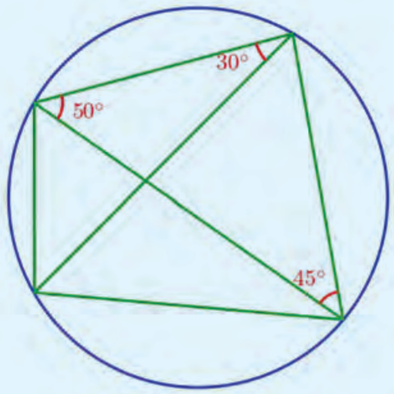
$$\angle A + \angle D = 180°$$

ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന്

$$\angle B + \angle D = 180°$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്, *ABCD* ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്.

(1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളും, വികർണ്ണങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകളും കണക്കാക്കുക:

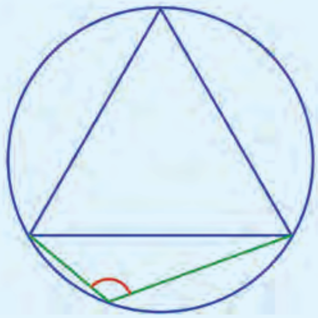


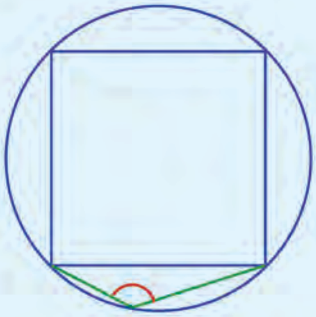
(2) ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിലെ ഏതു മൂലയിലെയും പുറംകോൺ, എതിർ മൂലയിലെ അകക്കോണിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

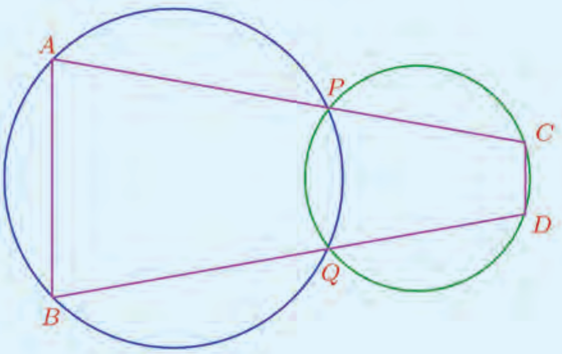
(5) ചുവടെയുള്ള ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായ സമഭുജത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടു മൂലകൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായ സമചതുരം വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടു മൂലകൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



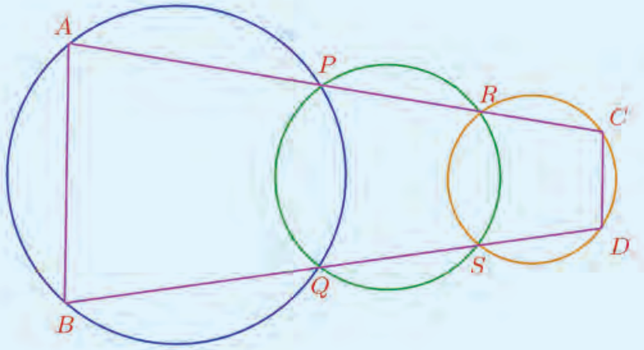


രണ്ടു ചിത്രത്തിലെയും അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോൺ കണക്കാക്കുക.

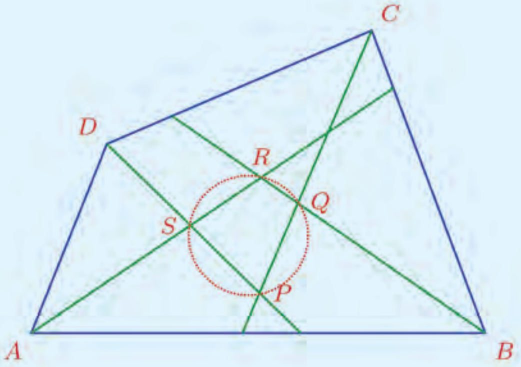
(6) (i) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തങ്ങൾ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള രണ്ട് വരകൾ, വൃത്തങ്ങളുമായി A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. AC, BD എന്നീ വരകൾ സമാന്തരമല്ല. ഈ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെങ്കിൽ, $ABDC$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



(ii) ചിത്രത്തിലെ ഇടതും വലതും വൃത്തങ്ങൾ നടുവിലെ വൃത്തത്തിനെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് *P, Q, R, S;* ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ഇടതും വലതും വൃത്തങ്ങളുമായി *A, B, C, D* എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. *ABDC* ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



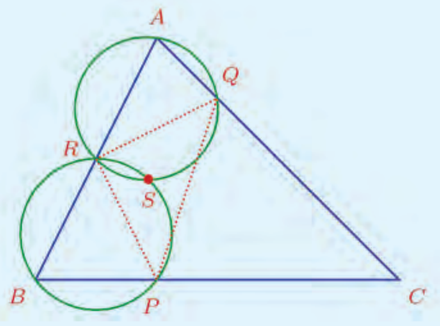
(7) ചിത്രത്തിൽ *ABCD* എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് *P, Q, R, S*

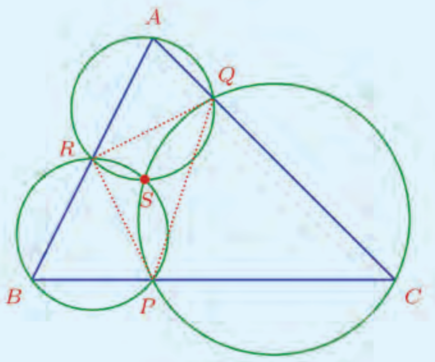


PQRS ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(സൂചന : *PCD* എന്ന ത്രികോണത്തിലെയും *RAB* എന്ന ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ തുക നോക്കുക).

(8) ചുവടെയുള്ള ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ BC, CA, AB എന്നീ വശങ്ങളിൽ P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി, AQR, BRP എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരിവൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു; അവ ത്രികോണത്തിനകത്തെ S എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ മുറിച്ചുകടക്കുന്നു.





രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ, CPQ എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തവും S ൽക്കൂടി കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക.

(സൂചന: ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ PS, QS, RS യോജിപ്പിച്ച്, S ൽ ഉണ്ടാകുന്ന മൂന്നു കോണുകൾക്ക് $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ഇവയുമായുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക).

3 സമാന്തരശ്രേണിയും ബീജഗണിതവും

ബീജഗണിതരൂപം

ഒരു നിശ്ചിത നിയമമനുസരിച്ച്, സംഖ്യകളെ ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കുന്നതാണ് ഒരു സംഖ്യാശ്രേണി എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. ഒരു ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കുന്നതിന്റെ നിയമം എങ്ങനെയാണ് പറയുന്നത് ?

ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയെ എങ്ങനെ പറയും ? ഓരോ സ്ഥാനത്തേയും സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് ആ സ്ഥാനത്തെ പദം.

സ്ഥാനം	1	2	3	...
പദം	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	...

1, 3, 5, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണെങ്കിലോ ?

ഓരോ സ്ഥാനത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിൽ നിന്ന് ഒന്നു കുറച്ചതാണ് ആ സ്ഥാനത്തെ പദം:

സ്ഥാനം	1	2	3	...
പദം	$(1 \times 2) - 1 = 1$	$(2 \times 2) - 1 = 3$	$(3 \times 2) - 1 = 5$	...

ഇതെല്ലാം ചുരുക്കിപ്പറയാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാമല്ലോ.

ആദ്യത്തെ ശ്രേണിയെ ഇങ്ങനെ പറയാം:

n-ാം സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ $2n$

രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണിയെയോ ?

n-ാം സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ $2n - 1$

പൊതുവായ ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ ഓരോന്നിനെയും വ്യത്യസ്ത അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാൻ സാധ്യമല്ലല്ലോ. അതിനാൽ, ഒരക്ഷരത്തിന്റെ കൂടെ പദസ്ഥാനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയും ചേർത്ത് എഴുതുകയാണ് പതിവ്.

ഉദാഹരണമായി, ഒന്നാമത്തെ പദം x_1, രണ്ടാമത്തെ പദം x_2, മൂന്നാമത്തെ പദം x_3 എന്നിങ്ങനെ തുടരാം. x നു പകരം മറ്റക്ഷരങ്ങളും ഉപയോഗിക്കാം.

ഇതനുസരിച്ച്, മുകളിലെഴുതിയ ശ്രേണികൾ അല്പം കൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാം:

2, 4, 6, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി : $x_n = 2n$

1, 3, 5, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി : $y_n = 2n - 1$

ഇങ്ങനെ ഒരു ശ്രേണിയിൽ സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറയുന്നതിനെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എന്നു പറയാം.

ഇനി ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഈ സമാന്തരശ്രേണി നോക്കുക:

12, 23, 34, ...

ഇതിലെ അടുത്ത പദം എന്താണ്? അതിനടുത്ത പദമോ ?

ഇങ്ങനെ ഓരോന്നായി നോക്കാതെ, ഏതു സ്ഥാനത്തേയും പദം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഇതിലെ 10-ാം പദം കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയാണ്?

(i) ശ്രേണിയിലെ 1-ാം പദം 12

(ii) പൊതുവ്യത്യാസം 11

(iii) 1-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 10-ാം പദത്തിലേക്കുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $10 - 1 = 9$

(iv) 10-ാം പദം $12 + (11 \times 9) = 111$

ഇങ്ങനെ ഏതു സ്ഥാനത്തേയും പദം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

പൊതുവേ n-ാം സ്ഥാനത്തെ പദം എങ്ങനെ എഴുതാം ?

(i) 1-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് n-ാം പദത്തിലേക്കുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $n - 1$

(ii) n-ാം പദം $12 + 11(n - 1)$

ഇതിലെ $11(n - 1)$ എന്നതിനെ അല്പം മാറ്റി എഴുതാം:

$$11(n - 1) = 11n - 11$$

അപ്പോൾ

$$12 + 11(n - 1) = 12 + (11n - 11) = 11n + 1$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 11n + 1$$

ഇതിൽ n ആയി 1, 2, 3, ... എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ആയി അതതു സ്ഥാനത്തെ പദം കിട്ടും:

$$x_1 = (11 \times 1) + 1 = 12$$
$$x_2 = (11 \times 2) + 1 = 23$$
$$x_3 = (11 \times 3) + 1 = 34$$

....

പൊതുരൂപങ്ങൾ

1, 3, 5, ... എന്നീ ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = 2n - 1$ എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. ഇതിൽ n എന്നത് ഓരോ പദത്തിന്റെയും സ്ഥാനത്തെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ, ഒന്നാം പദം 1, രണ്ടാം പദം 3, എന്നിങ്ങനെ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും കിട്ടും.

ഏഴാം ക്ലാസിലെ ബീജഗണിതം എന്ന പാഠത്തിൽ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപം $2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ n എന്നത്, ഒറ്റസംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലമാണ്.

അപ്പോൾ $n = 0, 1, 2, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ, 2 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ

ഹരണഫലം 0 ഉം മിച്ചം 1 ഉം ആയ 1,

ഹരണഫലം 1 ഉം മിച്ചം 1 ഉം ആയ 3,

എന്നിങ്ങനെ എല്ലാ ഒറ്റ സംഖ്യകളും കിട്ടും.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. $\frac{1}{4}$ ൽ തുടങ്ങി, $\frac{1}{2}$ വീതം കൂട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണി

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, \ldots$$

ഇതിലെ n-ാം പദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം ?

(i) 1-ാം പദം $\frac{1}{4}$

(ii) പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{2}$

(iii) 1-ാം പദത്തിൽനിന്ന് n-ാം പദത്തിലേക്കുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $n - 1$

(iv) n-ാം പദം $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1)$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ n-ാം പദം, n നെ 11 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടിയതാണ്;

രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ n-ാം പദം, n നെ $\frac{1}{2}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് $\frac{1}{4}$ കുറച്ചതാണ്;

അഥവാ $-\frac{1}{4}$ കൂട്ടിയതാണ്.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലും n-ാം പദം, n നെ ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയതാണോ ?

പൊതുവേ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം f എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നും എടുക്കാം. n-ാം പദം, ആദ്യപദമായ f നോട് $n - 1$ തവണ പൊതുവ്യത്യാസമായ d കൂട്ടിയതാണല്ലോ;

അതായത് n-ാം പദം

$$f + d(n-1) = dn + (f - d)$$

അതായത് n നെ d കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $f - d$ കൂട്ടിയതാണ് n-ാം പദം

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലും, സ്ഥാനസംഖ്യയെ ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ ആ സ്ഥാനത്തെ പദം കിട്ടും. അതായത് ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

എന്നാണ്; ഇതിൽ a, b ഇവ നിശ്ചിത സംഖ്യകളാണ്

ഇതിൽ n ആയി 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താൽ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ

$$a + b, 2a + b, 3a + b, \ldots$$

എന്നിങ്ങനെ കിട്ടുമല്ലോ. ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം:

1, 2, 3, ... എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യാശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെയെല്ലാം ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്നതാണ് ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും പദങ്ങൾ.

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം ഗുണിക്കുന്ന നിശ്ചിത സംഖ്യയാണ് പൊതുവ്യത്യാസം.

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{2}$ ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, തുടർച്ചയായി $\frac{1}{3}$ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണി നോക്കാം:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \dots$$

പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{3}$ ആയതിനാൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം $\frac{1}{3}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയതാണ് ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം.

ഏതു സംഖ്യയാണ് കൂട്ടിയത്?

$\frac{1}{3}$ നോട് ഈ സംഖ്യ കൂട്ടിയതാണല്ലോ ആദ്യത്തെ പദം

ആദ്യത്തെ പദമായ $\frac{1}{2}$ കിട്ടാൻ, $\frac{1}{3}$ നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടണം?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

അപ്പോൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം $\frac{1}{3}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $\frac{1}{6}$ കൂട്ടിയതാണ് ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ;

അതായത്

$$x_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽനിന്ന് ശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് പലതും മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഈ ഉദാഹരണത്തിലെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2n+1}{6}$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ.

n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n + 1$ ഒറ്റസംഖ്യ ആണ്; ഛേദം ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും; അതിനാൽ $\frac{2n+1}{6}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളിലൊന്നും, അംശം ഛേദത്തിന്റെ ഗുണിതമല്ല. അതായത്, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളൊന്നും എണ്ണൽ സംഖ്യകളല്ല.

നിയമത്തിന്റെ ഭാഷ

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം വ്യക്തമാക്കണമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഈ നിയമം ബീജഗണിതത്തിൽപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളും കണ്ടു. എന്നാൽ, ചില ശ്രേണികളുടെ നിയമം ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... എന്നു തുടരുന്ന അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം ഇതുവരെ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടില്ല.

അതുപോലെ, π യുടെ ദശാംശരൂപത്തിൽ വരുന്ന 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെയും ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബീജഗണിതവാചകമൊന്നുമില്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം, സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറയാനേ നിവൃത്തിയുള്ളൂ.

ഇനി $\frac{1}{2}$ ൽ തുടങ്ങി $\frac{1}{4}$ വീതം കൂട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയായാലോ ?
ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{4}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x_n = \frac{n+1}{4}$$

ഇതിൽ n ആയി, 3, 7, 11, ... എന്നെല്ലാമെടുത്താൽ

$$x_3 = 1$$

$$x_7 = 2$$

$$x_{11} = 3$$

....

എന്നെല്ലാം കിട്ടും. അതായത്, എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളാണ്.

(1) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) 1, 6, 11, 16, ... (ii) 2, 7, 12, 17, ... (iii) 21, 32, 43, 54, ...

(iv) 19, 28, 37, ... (v) 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, ... (vi) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, ...

(2) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങൾ ചുവടെ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഓരോന്നിന്റെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(i) 1-ാം പദം 5	(ii) 1-ാം പദം 5	(iii) 5-ാം പദം 10	(iv) 8-ാം പദം 2
10-ാം പദം 23	7-ാം പദം 23	10-ാം പദം 5	12-ാം പദം 8

(3) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{6}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{2}{3}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്നും ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും ഇല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.

(5) 4, 7, 10, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങൾ ഈ ശ്രേണിയിൽത്തന്നെ ഉണ്ട് എന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) 5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പൂർണവർഗങ്ങളൊന്നും ഇല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളെല്ലാം ആ ശ്രേണിയിൽത്തന്നെ ഉണ്ടാകുമല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട്?).

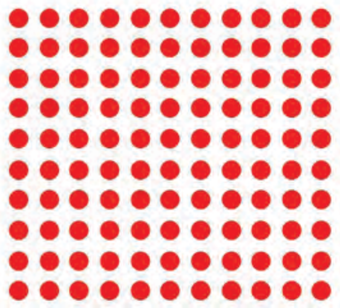
മറ്റു കൃതികളോ?

ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ആയാലോ?

മറ്റേതെങ്കിലും സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, പദങ്ങളുടെ എല്ലാ കൃതികളും ആ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ആകുമോ?

തുകകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ചതുരത്തിൽ ആകെ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

ഓരോന്നായി എണ്ണേണ്ട കാര്യമില്ലല്ലോ. ഓരോ വരിയിലും 11, അങ്ങനെ

$$11 \times 10 = 110$$

ഈ ത്രികോണത്തിൽ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട്?

ഓരോന്നായി എണ്ണിയെടുക്കാം:

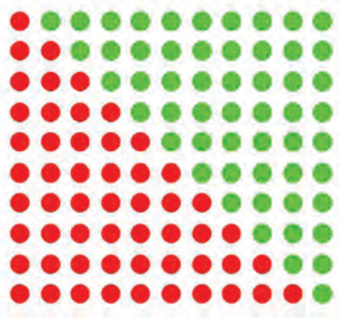
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

ഇതിനും എളുപ്പവഴി വല്ലതുമുണ്ടോ?

ഇതിനെ ചതുരമാക്കിയാലോ?

അതിന് ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക:

ഇത് തലകീഴായി, ആദ്യത്തെ ത്രികോണവുമായി ഇങ്ങനെ ചേർത്തുവയ്ക്കുക:



ഈ ചതുരത്തിൽ, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, $11 \times 10 = 110$ പൊട്ടുകളുണ്ട്.

ഒരു ത്രികോണത്തിലോ ?

110 ന്റെ പകുതി 55

ചിത്രമുപയോഗിച്ചു ചെയ്തത് സംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ചും എഴുതാം:

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

എന്നെടുക്കാം. ഇതുതന്നെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$s = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ ?

$$2s = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 110$$

അപ്പോൾ

$$s = 110 \div 2 = 55$$

ഇതുപോലെ 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളും കൂട്ടിയെടുക്കാമല്ലോ.

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ,

$$2s = \overbrace{101 + 101 + \cdots + 101 + 101}^{100 \text{ എണ്ണം}}$$

$$= 101 \times 100$$

ഒരു ഗണിതകഥ

ഗൗസ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടില്ലേ? നന്നേ ചെറുപ്പത്തിൽത്തന്നെ ഗണിതത്തിൽ ഇദ്ദേഹം അസാധാരണമായ കഴിവു പ്രകടിപ്പിച്ചിരുന്നുവത്രെ. അതിനെക്കുറിച്ചൊരു കഥയുണ്ട്.

ഗൗസിനു പത്തു വയസ്. ക്ലാസിലെ അധ്യാപകൻ, കുട്ടികളെ അടക്കിയിരുത്താനായി, ഒന്നു മുതൽ നൂറു വരെയുള്ള സംഖ്യകളെല്ലാം കൂട്ടി തുക കാണാൻ പറഞ്ഞു. വളരെപ്പെട്ടെന്നു തന്നെ കൊച്ചു ഗൗസ് ഉത്തരം പറഞ്ഞു: 5050. ഇങ്ങനെ വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്തു: 1 ഉം 100 ഉം 101; അതുപോലെ 2 ഉം 99 ഉം 101; ഇങ്ങനെ 50 ജോടികൾ

ആകെ തുക

$$101 \times 50 = 5050$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$s = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

100 നു പകരം ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, ഇതേ രീതിയിൽ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത്

ഒന്നു മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ കുറേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, അവസാനസംഖ്യയുടെയും അതിനടുത്ത സംഖ്യയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6, ..., 100 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക നോക്കാം.

ഈ തുക ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$$

നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ആദ്യത്തെ n ഇരട്ടസംഖ്യകൾ

$$2, 4, 6, \ldots, 2n$$

ഇവയുടെ തുക

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2 \times \frac{1}{2} \times n(n + 1) = n(n + 1)$$

2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ 2, 4, 6, ... എന്ന ശ്രേണിക്കു പകരം, 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ 3, 6, 9, ... എന്ന ശ്രേണി ആയാലോ ?

ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങൾ

$$3, 6, 9, \ldots, 3n$$

ഇവയുടെ തുക

$$\begin{aligned} 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n &= 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \\ &= 3 \times \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{3}{2}n(n + 1) \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെയും 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെയുമെല്ലാം തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. ചെയ്തു നോക്കൂ:

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക നോക്കാം.

ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാം.

1 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 2 വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയാണല്ലോ ഇത്.

അപ്പോൾ n-ാം ഒറ്റസംഖ്യ x_n എന്നെഴുതിയാൽ

$$x_n = 1 + (2 \times (n - 1)) = 2n - 1$$

ഇതിൽ $n = 1, 2, 3, \dots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായെടുത്താൽ, ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി കിട്ടും.

അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണി ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\begin{aligned} x_1 &= (2 \times 1) - 1 \\ x_2 &= (2 \times 2) - 1 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= (2 \times n) - 1 \end{aligned}$$

ഇവയെല്ലാം മുകളിൽനിന്ന് താഴോട്ട് കൂട്ടിയാലോ ?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= ((2 \times 1) + (2 \times 2) + \cdots + (2 \times n)) - \overbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}^{n \text{ എണ്ണം}} \\ &= 2(1 + 2 + \cdots + n) - n \end{aligned}$$

ഇതിൽ $1 + 2 + \dots + n$ നേരത്തെ കണക്കാക്കിയല്ലോ.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n &= \frac{1}{2} n(n + 1) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 2 \times \frac{1}{2} n(n + 1) - n \\ &= n(n + 1) - n \\ &= n^2 + n - n = n^2 \end{aligned}$$

എന്നു കാണാം.

അതായത്, 1 മുതൽ തുടർച്ചയായ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക, സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗമാണ്.

ഇതുപോലെ ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുക കണക്കാക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും

$$x_n = an + b$$

എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, $n = 1, 2, 3, \dots$ എന്നെഴുതി, കൂട്ടാം

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b \\ x_2 &= 2a + b \\ &\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= na + b \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (a + 2a + \cdots + na) + \overbrace{(b + b + \cdots + b)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= a(1 + 2 + \cdots + n) + nb$$

$$= \frac{1}{2}an(n + 1) + nb$$

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

ആണെങ്കിൽ, അതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}an(n + 1) + nb$$

ഉദാഹരണമായി

$$1, 4, 7, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 3n - 2$$

അപ്പോൾ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$3 \times \frac{1}{2} \times 100 \times 101 - (2 \times 100) = 14950$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$3 \times \frac{1}{2}n(n + 1) - 2n = 3 \times \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക കാണാൻ sum എന്ന നിർദേശം ഉപയോഗിക്കാം.

L=Sequence($n^{2,}n$,1,10) എന്ന് input നിർദേശം കൊടുത്താൽ L എന്ന പേരിൽ ആദ്യത്തെ പത്ത് പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ ലഭിക്കും. sum(L) എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകളുടെ തുക കിട്ടും. sum(n^2,n,1,10) എന്ന് നിർദേശം നേരിട്ട് കൊടുത്താലും മതി.

5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടാൻ sum(3n + 2,n,1,20) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി. ഈ ശ്രേണിയുടെ 10 മുതൽ 20 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ sum(3n + 2,n,10,20) എന്നു കൊടുക്കണം.

സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുക മറ്റൊരു രീതിയിലും കണക്കാക്കാം. അതിന് തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അല്പം മാറ്റിയെഴുതാം:

$$\frac{1}{2}an(n + 1) + bn = \frac{1}{2}n(a(n + 1) + 2b)$$

$$= \frac{1}{2}n(an + a + 2b)$$

$$= \frac{1}{2}n((an + b) + (a + b))$$

ഇതിൽ $an + b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ n-ാം പദമായ x_n ഉം, $a + b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ 1-ാം പദമായ x_1 ഉം ആണല്ലോ.

അപ്പോൾ

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}n(x_1 + x_n)$$

സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തേയും പദങ്ങളുടെ തുകയെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ്

ഇതനുസരിച്ച്, 1, 4, 7, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം 100-ാം പദം കണക്കാക്കുക

$$1 + (3 \times 99) = 298$$

ഇനി ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (1 + 298) = 14950$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് പൊതുവായ ഒരു ബീജഗണിതരൂപമുണ്ട്. ഇതു കാണാൻ, തുക ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{1}{2}an(n + 1) + bn = \frac{1}{2}an^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)n$$

ഇതിൽ $\frac{1}{2}a$ യും $\frac{1}{2}a + b$ യും ശ്രേണിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിശ്ചിത സംഖ്യകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ തുക, n^2 നെയും n നെയും നിശ്ചിത സംഖ്യകൾ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയതാണ്.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$pn^2 + qn$$

എന്നാണ്; ഇതിൽ p, q നിശ്ചിതസംഖ്യകളാണ്

ഉദാഹരണമായി,

$$3, 10, 17, \ldots$$

എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$7n - 4$$

എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയോ ?

$$\frac{1}{2} \times 7 \times n(n + 1) - 4n = \frac{1}{2}(7n^2 + 7n - 8n) = \frac{1}{2}(7n^2 - n)$$

വിസ്തരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ, $\frac{1}{2}(7n^2 - n)$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ, $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ, നമ്മുടെ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദമായ 3 കിട്ടും;

$n = 2$ എന്നെടുത്താൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുകയായ 13 ഉം,

$n = 3$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുകയായ 30 ഉം കിട്ടും.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം:

> ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക
>
> $$3n^2 + n$$
>
> ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ ആദ്യപദം കിട്ടും

(ii) $(3 \times 1^2) + 1 = 4$

(iii) തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ $n = 2$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടും

(iv) ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക $(3 \times 2^2) + 2 = 14$

(v) ഇതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ പദം കുറച്ചാൽ രണ്ടാമത്തെ പദം കിട്ടും

(vi) രണ്ടാമത്തെ പദം $14 - 4 = 10$

(vii) ശ്രേണി 4, 10, 16, ...

(viii) ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = 6n - 2$

ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അറിയാമെങ്കിൽ, അതിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക കാണാൻ പൈഥൻ ഭാഷയിലെ sum ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെ നൂറു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ

```
sum(x**2 for x in range(1,101))
```

എന്നെഴുതിയാൽ മതി.

വർഗങ്ങളുടെ തുക

$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ എന്ന സർവ്വസമവാക്യം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതുപോലെ

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നതും ഒരു സർവ്വസമവാക്യമാണ്.

ഇതിൽ നിന്ന്, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ $x = 1, 2, 3, ..., n$ എന്നെടുത്താൽ

$x = 1,\quad 2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$

$x = 2,\quad 3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$

....

$x = n - 1,\quad n^3 - (n - 1)^3 = 3(n - 1)^2 + 3(n - 1) + 1$

$x = n,\quad (n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

ഇവയെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ

$$2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + ... + n^3 - (n - 1)^3 + (n + 1)^3 - n^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്

$$(n + 1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

അതായത്, $n^3 + 3n^2 + 3n$

$$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + \frac{3}{2}n(n + 1) + n$$

അപ്പോൾ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n(n + 1) - n\right)$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതുഭാഗം ലഘൂകരിച്ച്,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$$

എന്നാക്കാം.

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം.

4, 10, 16, ...

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$x_n = 6n - 2$$

ഇതിലെ ആദ്യപദം, ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കിയാൽ

4, 14, 30, ...

എന്ന മറ്റൊരു ശ്രേണി കിട്ടുമല്ലോ. അതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$y_n = 3n^2 + n$$

(1) ചുവടെയുള്ള സമാന്തരശ്രേണികളുടെ തുകകൾ, മനക്കണക്കായി കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) 51 + 52 + 53 + ... + 70

(ii) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + \dots + 12\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + \dots + 12\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{1}{101} + \frac{3}{101} + \frac{5}{101} + \dots + \frac{201}{101}$

(2) ചുവടെയുള്ള ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക:

(i) 11, 22, 33, ... (ii) 12, 23, 34, ... (iii) 21, 32, 43, ... (iv) 19, 28, 37, ...

(3) ഒമ്പതിന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

(4) ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ n-ാം പദം ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിന്റെയും n പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $2n + 3$ (ii) $3n + 2$ (iii) $2n - 3$ (iv) $3n - 2$

(5) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഓരോ ശ്രേണിയിലെയും n-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $n^2 + 2n$ (ii) $2n^2 + n$ (iii) $n^2 - 2n$ (iv) $2n^2 - n$ (v) $n^2 - n$

(6) (i) 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

(ii) എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 5 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടിയ ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക. ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

(7) 7, 13, 19, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് 15, 21, 27, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക.

(8) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദം 50 ഉം 21-ാം പദം 75 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 30 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

1 മുതൽ തുടർച്ചയായ എത്ര ഒറ്റ സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലും ഒരു പൂർണ്ണവർഗം കിട്ടുമെന്ന് അറിയാമല്ലോ.

4, 12, 20, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദം മുതൽ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങൾ കൂട്ടി നോക്കൂ.

ആദ്യപദം മുതൽ തുടർച്ചയായ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും പൂർണ്ണവർഗം കിട്ടുന്ന മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളുണ്ടോ ?

4 സാധ്യതകളുടെ ഗണിതം

സാധ്യതകളും സംഖ്യകളും

ഒരു ചെപ്പിൽ പത്തു മുത്തുകളുണ്ട്, ഒമ്പതെണ്ണം കറുത്തതും, ഒരെണ്ണം മാത്രം വെളുത്തതും, ഇതിൽ നിന്ന് (നോക്കാതെ) ഒരു മുത്തെടുത്താൽ...

മിക്കവാറും കറുപ്പാകും, അല്ലേ ? വെളുത്തതായിക്കൂടായ്കയില്ല.

മറ്റൊരു ചെപ്പിൽ എട്ടു കറുത്ത മുത്തും, രണ്ടു വെളുത്ത മുത്തും, ഇതിൽ നിന്ന് നോക്കാതെ ഒരെണ്ണമെടുത്താലോ ?

അപ്പോഴും എടുക്കുന്ന മുത്ത് മിക്കവാറും കറുത്തതുതന്നെയാകാനാണ് വഴി. മൂന്നാമതൊരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്തതും അഞ്ചു വെളുത്തതും. ഇതിൽനിന്നൊരു മുത്തെടുത്താലോ ? കറുത്തതാകാം, വെളുത്തതാകാം എന്നല്ലാതെ കൂടുതലൊന്നും പറയാനില്ല, അല്ലേ ?

ഇതെല്ലാം മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം; ആദ്യത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നും രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നും കറുത്തത് കിട്ടാനാണ് കൂടുതൽ സാധ്യത; മൂന്നാമത്തെ ചെപ്പിൽനിന്നാണെങ്കിൽ, കറുപ്പാകാനും വെളുപ്പാകാനും ഒരേ സാധ്യതയാണ്.

ചെപ്പും മുത്തും വച്ചൊരു കളിയാകാം; ഒരു ചെപ്പിൽ അഞ്ചു കറുത്ത മുത്തും, അഞ്ചു വെളുത്ത മുത്തും; മറ്റൊന്നിൽ ആറു കറുത്ത മുത്തും നാലു വെളുത്ത മുത്തും. ഏതെങ്കിലുമൊരു ചെപ്പിൽ നിന്നൊരു മുത്തെടുക്കണം. കറുത്തതായാൽ കളി ജയിച്ചു. ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത് ?

രണ്ടാമത്തെ ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തുകൾ കൂടുതലുള്ളത്, അപ്പോൾ അതിലല്ലേ കറുത്തതു കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ ?

രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നൊരു കറുത്ത മുത്തെടുത്ത് ഒന്നാം ചെപ്പിലിട്ടാലോ ? ചെപ്പുകൾക്കുള്ളിലെ കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാകും.

ഒന്നാം ചെപ്പ് : 6 കറുത്തത് 5 വെളുത്തത്

രണ്ടാം ചെപ്പ് : 5 കറുത്തത് 4 വെളുത്തത്

ഇനി കളിയിൽ ജയിക്കാൻ ഏതു ചെപ്പിൽനിന്നെടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത് ?
ഇപ്പോൾ ഒന്നാം ചെപ്പിലാണ് കറുത്ത മുത്തു കൂടുതൽ.
കറുപ്പു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയും ഇതിലാണോ ?

മൊത്തമായി ആലോചിച്ചുനോക്കാം; ഒന്നാം ചെപ്പിൽ മൊത്തം 11 മുത്ത്, അതിൽ 6 കറുത്തത്.
അതായത്, മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{6}{11}$ ഭാഗം കറുത്തത്.
രണ്ടാം ചെപ്പിലോ? മൊത്തം മുത്തിന്റെ $\frac{5}{9}$ ഭാഗമാണ് കറുത്തത്.

$\frac{6}{11}$, $\frac{5}{9}$ ഇവയിലേതാണു വലുത് ?

$\frac{5}{9}$ അല്ലേ ?

(ആറാം ക്ലാസിലെ **ഭാഗക്കണക്കുകൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ **വലുതും ചെറുതും** എന്ന ഭാഗം).
അതായത്, രണ്ടാം ചെപ്പിലാണ് കൂടുതൽ ഭാഗം കറുത്തത്, അപ്പോൾ രണ്ടാം ചെപ്പിൽ നിന്നു തന്നെ എടുക്കുന്നതല്ലേ ഇപ്പോഴും നല്ലത് ?
മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്നാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യത.
അല്പംകൂടി കടന്ന്, ഒന്നാം ചെപ്പിൽനിന്ന് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{6}{11}$, രണ്ടാം ചെപ്പിൽ നിന്ന് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{5}{9}$ എന്നെല്ലാം പറയാം.
വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടാനുള്ള സാധ്യതയോ ?
ഒന്നാം ചെപ്പിൽ നിന്ന് $\frac{5}{11}$, രണ്ടാം ചെപ്പിൽനിന്ന് $\frac{4}{9}$; ഇതിൽ വലുതേതാണ് ?
അപ്പോൾ വെളുത്ത മുത്തു കിട്ടിയാലാണ് ജയമെങ്കിൽ, ഏതു ചെപ്പിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ് നല്ലത് ?

ഈ കണക്കിലെ സാധ്യതകളെല്ലാം ഇങ്ങനെ പട്ടികയാക്കാം:

		ഒന്നാം ചെപ്പ്		രണ്ടാം ചെപ്പ്	
		കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്	കറുപ്പ്	വെളുപ്പ്
ആദ്യം	എണ്ണം	5	5	6	4
	സാധ്യത	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
പിന്നീട്	എണ്ണം	6	5	5	4
	സാധ്യത	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$

ഒരു ചോദ്യവുമാകാം.
തുടക്കത്തിലും, മുത്തു മാറ്റിയിട്ടതിനു ശേഷവും രണ്ടാം ചെപ്പിൽ നിന്നുതന്നെയാണ് കറുത്ത മുത്തു കിട്ടാൻ കൂടുതൽ സാധ്യതയെന്നു കണ്ടു. ഈ സാധ്യത തന്നെ ആദ്യമോ പിന്നീടോ കൂടുതൽ ?

(1) ഒരു പെട്ടിയിൽ 6 കറുത്ത പന്തുകളും, 4 വെളുത്ത പന്തുകളും. ഇതിൽ നിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അത് കറുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ? വെളുത്തതാകാനോ ?

(2) ഒരു സഞ്ചിയിൽ 3 ചുവന്ന പന്തും, 7 പച്ച പന്തുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ 8 ചുവന്ന പന്തും, 7 പച്ച പന്തും.

(i) ആദ്യത്തെ സഞ്ചിയിൽനിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(ii) രണ്ടാമത്തെ സഞ്ചിയിൽ നിന്നെടുത്താലോ ?

(iii) രണ്ടു സഞ്ചിയിലെയും പന്തുകൾ ഒരു സഞ്ചിയിലാക്കി അതിൽ നിന്നൊരു പന്തെടുത്താൽ, അതു ചുവന്നതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(3) ഒരു സഞ്ചിയിൽ 3 ചുവന്ന മുത്തുകളും 7 പച്ച മുത്തുകളുമുണ്ട്. മറ്റൊരു സഞ്ചിയിൽ ചുവന്ന മുത്തുകളും പച്ച മുത്തുകളും ഓരോന്ന് കൂടുതലാണ്. ചുവന്ന മുത്ത് കിട്ടാൻ സാധ്യത കൂടുതൽ ഏത് സഞ്ചിയിൽ നിന്ന് എടുക്കുന്നതാണ് ?

സംഖ്യാസാധ്യത

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം:

1 മുതൽ 25 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഒരോ കടലാസു കഷണത്തിലെഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു കടലാസ് എടുത്തു. കടലാസിലെ സംഖ്യ ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

ആകെയുള്ള 25 സംഖ്യകളിൽ 13 എണ്ണം ഒറ്റയും, 12 എണ്ണം ഇരട്ടയുമാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഇരട്ട സംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{12}{25}$

ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ ? ഈ പെട്ടിയിൽനിന്നുതന്നെ മൂന്നിന്റെ ഗുണിതം കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ? ആറിന്റെ ഗുണിതമോ ?

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

1, 2, 3, ..., 1000 എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽനിന്ന് ഒരെണ്ണം എടുത്താൽ, അത് 1000 ത്തിന്റെ ഘടകമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

ഇതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ, ആദ്യം 1, 2, 3, ..., 1000 എന്നീ സംഖ്യകളിൽ 1000 ത്തിന്റെ എത്ര ഘടകങ്ങളുണ്ടെന്ന് കണക്കാക്കണം.

1000 ത്തിന്റെ എല്ലാ ഘടകങ്ങളും ഇതിൽ ഉണ്ടാകുമല്ലോ; അപ്പോൾ 1000 ത്തിന് ആകെ എത്ര ഘടകങ്ങളുണ്ട് എന്നാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്.

ഇത്തരം കണക്കുകൾ ഏഴാം ക്ലാസിൽ ചെയ്തതല്ലേ ? (**സംഖ്യാബന്ധങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഘടകങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

1000 ത്തിനെ വ്യത്യസ്ത അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ കൃതികളായി പിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$1000 = 2^3 \times 5^3$$

അപ്പോൾ ഘടകങ്ങളുടെ എണ്ണം

$$(3 + 1) \times (3 + 1) = 4 \times 4 = 16$$

അതായത്, 1, 2, 3, ..., 1000 എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ, 16 എണ്ണമാണ് 1000 ത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ.

അപ്പോൾ 1, 2, 3, ..., 1000 എന്നീ എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ നിന്ന് ഒരെണ്ണം എടുത്താൽ അത് 1000 ത്തിന്റെ ഘടകമാകാനുള്ള സാധ്യത

$$\frac{16}{1000} = \frac{2 \times 8}{125 \times 8} = \frac{2}{125}$$

സാധ്യതകൾ ചിലപ്പോഴൊക്കെ ദശാംശരൂപത്തിലും, ശതമാനമായും പറയാറുണ്ട്,

അതനുസരിച്ച് ഈ കണക്കിലെ സാധ്യത ദശാംശമായി പറയാം:

$$\frac{16}{1000} = 0.016$$

ആയതിനാൽ,

$$\text{സാധ്യത} = 0.016$$

അല്ലെങ്കിൽ ഈ ഭിന്നസംഖ്യയെ ശതമാനമാക്കാം:

$$\frac{16}{1000} \times 100 = \frac{16}{10} = 1.6$$

അതായത്,

$$\text{സാധ്യത} = 1.6\%$$

(1) ചുവടെയുള്ള കണക്കുകളിലെല്ലാം സാധ്യത ഭിന്നസംഖ്യയായി കണക്കാക്കി, ദശാംശ രൂപത്തിലും, ശതമാനമായും എഴുതുക.

(i) 1, 2, 3, ..., 10 എന്നീ സംഖ്യകളിൽനിന്ന് ഒരെണ്ണം എടുത്താൽ, അത് അഭാജ്യ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(ii) 1, 2, 3, ..., 100 എന്നീ സംഖ്യകളിൽനിന്ന് ഒരെണ്ണം എടുത്താൽ, അത് രണ്ടക്കസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(iii) എല്ലാ മൂന്നക്ക സംഖ്യകളും കടലാസുകഷണങ്ങളിൽ എഴുതി, ഒരു പെട്ടിയിലിട്ടു. ഇതിൽ നിന്ന് ഒരെണ്ണം എടുത്താൽ, അത് ഇരുവഴി (Palindrome) സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ? (അഞ്ചാം ക്ലാസിലെ **സംഖ്യാലോകം** എന്ന പാഠത്തിലെ **പെരുകുന്നസംഖ്യകൾ** എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള കണക്കുകളിൽ ചോദ്യം (4) നോക്കുക).

(2) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു. പറയുന്ന സംഖ്യ പൂർണ്ണ വർഗമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(3) ഒരാളോട് ഒരു മൂന്നക്കസംഖ്യ പറയാൻ ആവശ്യപ്പെടുന്നു.

(i) പറയുന്ന സംഖ്യ, മൂന്നക്കങ്ങളും തുല്യമായത് ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(ii) സംഖ്യയുടെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അക്കം പൂജ്യം ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(iii) സംഖ്യ 3 ന്റെ ഗുണിതമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(4) 1, 2, 3, 4 എന്നീ അക്കങ്ങൾ എഴുതിയ നാല് കാർഡുകൾ പലതരത്തിൽ ചേർത്ത് വച്ച് നാലക്കസംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു.

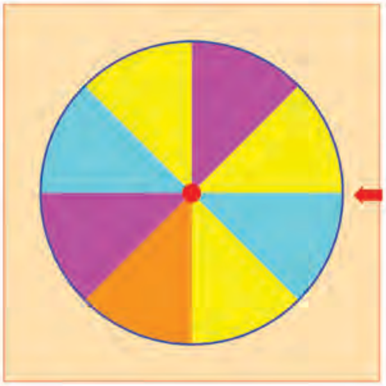
(i) സംഖ്യ നാലായിരത്തിൽ കൂടുതലാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

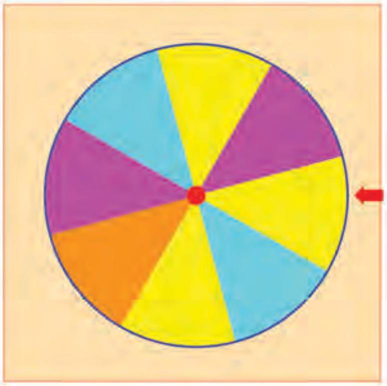
(ii) സംഖ്യ നാലായിരത്തിൽ കുറവാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

ജ്യാമിതീയസാധ്യത

പല നിറങ്ങളുള്ള ഒരു വട്ടം കറങ്ങാൻ പാകത്തിൽ ഒരു പലകയിൽ തറച്ചിരിക്കുന്നു.

വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ, പലകയിലെ അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ മഞ്ഞനിറം വരാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?





വട്ടം കറങ്ങി നിൽക്കുമ്പോൾ, അമ്പടയാളത്തിനു നേരെ വട്ടത്തിന്റെ എട്ടു ഭാഗങ്ങളിൽ ഏതും വരാം. അതിൽ മൂന്നെണ്ണമാണ് മഞ്ഞ. അപ്പോൾ, മഞ്ഞ വരാനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{8}$.

ഇതുപോലെ മറ്റു നിറങ്ങൾ ഓരോന്നും വരാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

മറ്റൊരു കണക്കുനോക്കാം: കട്ടിക്കടലാസിൽ ഒരു ചതുരം വെട്ടിയെടുത്ത്, അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും, എതിർവശത്തിന്റെ മൂലകളും ചേർത്തൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.

ഈ ചതുരത്തിൽ കണ്ണടച്ച് ഒരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് ചുവന്ന ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

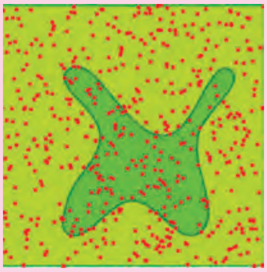
ത്രികോണത്തിനും ചതുരത്തിനും ഒരേ പാദവും ഒരേ ഉയരവുമല്ലേ ? അപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ പകുതിയാണ് ത്രികോണം.

ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

ഇവ മൂലകളായിവരുന്ന ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക (Polygon Tool ഉപയോഗിക്കണം). കണ്ണടച്ചു കൊണ്ട് വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ തൊട്ടാൽ അത് ത്രികോണത്തിനുള്ളിലാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ? (ത്രികോണത്തിന്റെ പേര് *t*1 എന്നും വൃത്തത്തിന്റെ പേര് *c* എന്നുമാണെങ്കിൽ സാധ്യത കണക്കാക്കാൻ Input Bar ൽ Area(*t*1)/Area(c) എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ. തൊടുന്നത് ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത ഏറ്റവും കൂടുതലാകുന്നത് എപ്പോഴാണ് ? ഏറ്റവും കുറവാകുന്നതോ ? (സാധ്യത, കൂടുതൽ ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി കാണുന്നതിന് Options→ Rounding എന്നതിൽ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂട്ടിയാൽ മതി).

പരപ്പളവും സാധ്യതയും

സങ്കീർണ്ണമായ രൂപങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് ഏകദേശമായി കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യതയുടെ ഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു നിശ്ചിത സമചതുരത്തിനകത്ത് ഈ രൂപം വരയ്ക്കണം. എന്നിട്ട്, പ്രത്യേകിച്ചൊരു ക്രമമോ ചിട്ടയോ ഇല്ലാതെ ചിത്രത്തിൽ കുത്തുകളിടണം.

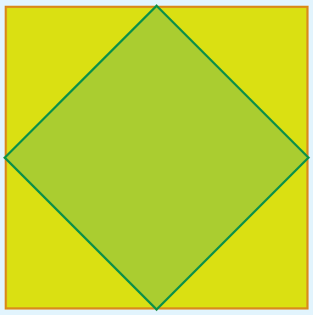


നമുക്കാവശ്യമായ രൂപത്തിനകത്തു വീണ കുത്തുകളുടെ എണ്ണത്തെ ആകെ കുത്തുകളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യ, ഈ രൂപത്തിന്റെ പരപ്പളവിനെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായിരിക്കും. കുത്തുകളുടെ എണ്ണം വർധിക്കുന്തോറും ഇതു കൂടുതൽ കൃത്യമാകുകയും ചെയ്യും. ഈ ജ്യാമിതീയ ക്രിയയും, സംഖ്യകളുടെ ക്രിയയും കമ്പ്യൂട്ടർ ഉപയോഗിച്ച് വേഗം ചെയ്യാം. **മോണ്ടി കാർലോ രീതി (Monte Carlo method)** എന്നാണ് ഇതിന്റെ പേര്.

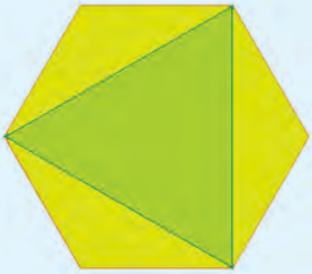
അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ $\frac{1}{2}$ ഭാഗമാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്. കുത്ത് ത്രികോണത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യതയും $\frac{1}{2}$ തന്നെ.

ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലും പച്ച നിറമുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ വിശദീകരണം പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ചിത്രത്തിൽ കണ്ണടച്ചൊരു കുത്തിട്ടാൽ, അത് പച്ചഭാഗത്തിലാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക.

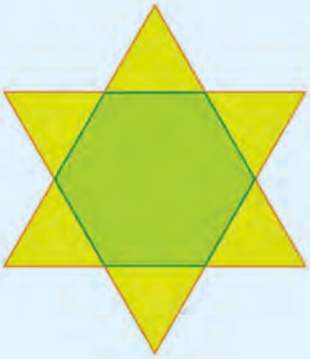
(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളുടെയും മധ്യബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച സമചതുരം.



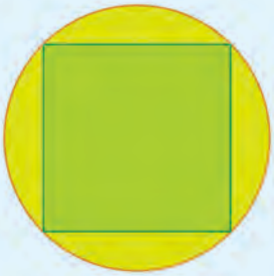
(2) സമഷഡ്ഭുജത്തിലെ ഒന്നിടവിട്ട മൂലകൾ ചേർത്തു വരച്ച ത്രികോണം.



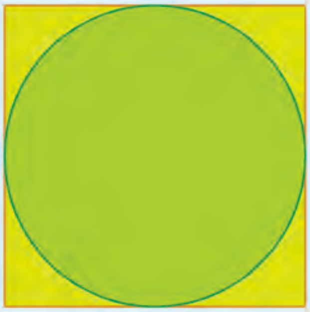
(3) രണ്ടു തുല്യസമഭുജത്രികോണങ്ങൾക്കിടയിൽ രൂപപ്പെടുന്ന സമഷഡ്ഭുജം.



(4) മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായി വരച്ച സമചതുരം.



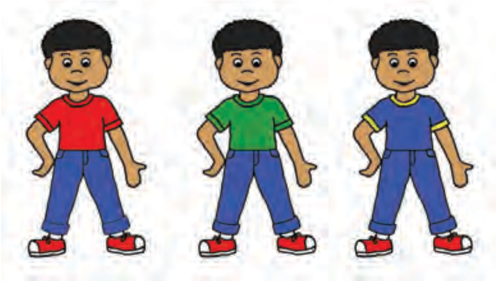
(5) ഒരു സമചതുരത്തിനകത്ത് കൃത്യമായി ചേർന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തം.



ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. *n* എന്ന പേരിൽ ഒരു Integer Slider നിർമ്മിച്ച്, മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലാകത്തക്കവിധം *n* വശങ്ങളുള്ള ഒരു സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കുക (A വൃത്ത കേന്ദ്രവും B വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായാൽ, Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B യിലും A യിലും ക്രമമായി ക്ലിക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവ് (360/n)° എന്ന് നൽകുക. പുതിയ ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. BB' ഒരു വശമായി വരത്തക്കവിധം Regular Polygon ഉപയോഗിച്ച് സമബഹുഭുജം വരയ്ക്കാം). കണ്ണടച്ചുകൊണ്ട് വൃത്തത്തിനകത്ത് തൊട്ടാൽ അത് ബഹുഭുജത്തിനകത്താകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കുക. ബഹുഭുജത്തിന്റെ പേര് poly1 എന്നും വൃത്തത്തിന്റെ പേര് c എന്നുമാണെങ്കിൽ Area(poly1)/Area(c) Input നൽകിയാൽ മതി. സാധ്യത ഏറ്റവും കുറവാകുന്നത് എപ്പോഴാണ് ? വശങ്ങളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ സാധ്യതയ്ക്ക് എന്ത് സംഭവിക്കുന്നു?

ജോടികൾ

അലക്കിത്തേച്ചതെല്ലാം നോക്കിയപ്പോൾ, ജോണിക്ക് ഒരു നീലപ്പാന്റ്സും, ചുവപ്പും പച്ചയും നീലയുമായി മൂന്നു ഷർട്ടുകളും കിട്ടി. എങ്ങനെയെല്ലാം ഒരുങ്ങാം, ജോണി ആലോചിച്ചു.



ഒന്നുകൂടി തിരഞ്ഞപ്പോൾ ഒരു പച്ചപ്പാന്റ്സും കിട്ടി. അപ്പോൾ ഇനി ഇത് ഓരോ ഷർട്ടിന്റെ കൂടെയുമിട്ട്, മൂന്നുതരത്തിൽ കൂടി ആകാമല്ലോ, ജോണി കണക്കുകൂട്ടി.

അങ്ങനെ ആറു വ്യത്യസ്ത രീതിയിൽ ജോണിക്ക് ഒരുങ്ങാം. ഇതിൽ എത്ര എണ്ണത്തിലാണ് പാന്റ്സും ഷർട്ടും ഒരേ നിറമാകുന്നത് ?

അപ്പോൾ ജോണി, ഒരേ നിറത്തിലുള്ള ഷർട്ടും പാന്റ്സും ഇടാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ അല്ലേ ?

ഒരു പ്രശ്നം

പ്രസിദ്ധ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ഗലീലിയോ, ചൂതുകളിക്കാരനായ ഒരു സുഹൃത്ത് ഉന്നയിച്ച പ്രശ്നത്തെക്കുറിച്ചു പറയുന്നുണ്ട്. മൂന്നു പകിട ഒന്നിച്ചുരുട്ടുമ്പോൾ, തുകയായി 9 കിട്ടുന്നതും 10 കിട്ടുന്നതും, ആറു വിധത്തിലാണ് എന്നയാൾ കണക്കാക്കി.

	9	10
1.	1 + 2 + 6	1 + 3 + 6
2.	1 + 3 + 5	1 + 4 + 5
3.	1 + 4 + 4	2 + 2 + 6
4.	2 + 2 + 5	2 + 3 + 5
5.	2 + 3 + 4	2 + 4 + 4
6.	3 + 3 + 3	3 + 3+ 4

എന്നാൽ അനുഭവത്തിൽ, 10 ആണ് 9 നേക്കാൾ കൂടുതൽ വരുന്നത്. ഇതെന്തുകൊണ്ടാണെന്നാണ് ചോദ്യം.

ഇതിൽ 1, 2, 6 എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്, ഏതോ ഒരു പകിടയിൽ 1, മറ്റൊന്നിൽ 2, മൂന്നാമത്തേതിൽ 6 എന്നാണല്ലോ. ഇതിനുപകരം ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 2, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 6 എന്നതിനെമാത്രം (1, 2, 6) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക. ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 1, രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 6, മൂന്നാമത്തെ പകിടയിൽ 2, എന്നതിനെ (1, 6, 2) എന്ന ത്രയമുപയോഗിച്ചു സൂചിപ്പിക്കുക. (1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1) എന്നീ ആറു വ്യത്യസ്ത ത്രയങ്ങൾ 9 തുകയായി കിട്ടുന്ന വിധത്തിൽ എടുക്കണം എന്നാണ് ഗലീലിയോയുടെ ഉത്തരം. മറ്റു ത്രയങ്ങളേയും ഇതുപോലെ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ, 9 കിട്ടുന്നത് 25 രീതിയിലും, 10 കിട്ടുന്നത് 27 രീതിയിലുമാണെന്നും അദ്ദേഹം വ്യക്തമാക്കുന്നു (ചെയ്തു നോക്കൂ).

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

> ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നിങ്ങനെ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാല് കടലാസുകഷണങ്ങളും; മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസുകഷണങ്ങളും. രണ്ടിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്തു കിട്ടുന്ന സംഖ്യാജോടികൾ ഏതൊക്കെയാകാം ?

ആദ്യത്തെ പെട്ടിയിൽ നിന്ന് 1 എന്നെടുത്താൽ, രണ്ടാമത്തെ പെട്ടിയിൽ 1, 2 ഇവ ഓരോന്നും ചേർത്ത് രണ്ടു ജോടികൾ, ഇവയെ (1, 1), (1, 2) എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ ഒന്നാമത്തെ പെട്ടിയിൽനിന്ന് ഓരോ സംഖ്യകളുമെടുത്ത്, കിട്ടാവുന്ന സംഖ്യാജോടികളെല്ലാം എഴുതിയാലോ ?

(1, 1)	(1, 2)
(2, 1)	(2, 2)
(3, 1)	(3, 2)
(4, 1)	(4, 2)

ആകെ 8 ജോടികൾ.

ഇതിൽ എത്രയെണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാകുന്നത് ?

(1, 1), (3, 1) എന്നീ രണ്ടു ജോടികളിൽ മാത്രമല്ലേ ? അപ്പോൾ ഈ രണ്ടു പെട്ടികളിൽ ഓരോന്നിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ, രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

ഇതുപോലെ രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കാമോ ? ഏതെങ്കിലുമൊരു സംഖ്യ ഒറ്റയും, മറ്റേ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ ? രണ്ടും ഒരേ സംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യതയോ ?

(1) രജനിക്ക് പച്ച, നീല, ചുവപ്പ് എന്നീ നിറങ്ങളിൽ കല്ലുമാലയും കമ്മലുമുണ്ട്. എത്ര രീതികളിൽ രജനിക്ക് മാലയും കമ്മലുമണിയാം ? ഒരു ദിവസം രജനി ഒരേ നിറമുള്ള മാലയും കമ്മലും അണിയാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ? വ്യത്യസ്ത നിറമുള്ളതോ ?

(2) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2 എന്നെഴുതിയ രണ്ടു കടലാസുകഷണങ്ങളുമുണ്ട്. ഓരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക ഒറ്റ സംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ? തുക ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ ?

(3) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3, 4 എന്നീ സംഖ്യകളെഴുതിയ നാലു കടലാസുകഷണങ്ങളും, മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 1, 2, 3 എന്നെഴുതിയ മൂന്നു കടലാസുകഷണങ്ങളുമുണ്ട്. ഒരോ പെട്ടിയിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസെടുത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ? ഗുണനഫലം ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യതയോ ?

(4) 1, 2, 3 എന്നീ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതാവുന്ന രണ്ടക്കസംഖ്യകളിൽ ഒരെണ്ണമെടുത്താൽ,

(i) രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(ii) അക്കങ്ങളുടെ തുക 4 ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(5) രണ്ടുപേർ തമ്മിലുള്ള ഒരു കളി. ഓരോരുത്തരും ഒറ്റസംഖ്യവേണോ, ഇരട്ടസംഖ്യവേണോ എന്ന് ആദ്യം തീരുമാനിക്കണം. രണ്ടുപേരും ഒരു കൈയിലെ കുറെ വിരലുകൾ ഒരുമിച്ചുയർത്തുന്നു. ആകെ വിരലുകളുടെ എണ്ണം ഒറ്റസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അത് ആദ്യമേ എടുത്തയാൾ ജയിച്ചു; ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അതെടുത്തയാളും. ഈ കളിയിൽ ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യ എടുക്കുന്നതാണോ, ഇരട്ടസംഖ്യ എടുക്കുന്നതാണോ നല്ലത് ?

കൂടുതൽ ജോടികൾ

വീണ്ടും രണ്ടു പെട്ടികൾ, ഒന്നിൽ 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ പത്തു കടലാസുകഷണങ്ങൾ, രണ്ടാമത്തേതിൽ 1 മുതൽ 5 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ അഞ്ചു കടലാസുകഷണങ്ങൾ, പതിവുപോലെ രണ്ടിൽനിന്നും ഓരോ കടലാസെടുക്കുന്നു. രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യ ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള വഴി എളുപ്പമാണ്, ആകെ എത്ര സംഖ്യാജോടികൾ സാധ്യമാണെന്നു കണക്കാക്കുക, അവയിൽ എത്രയെണ്ണം നമുക്കു വേണ്ട രീതിയിൽ രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യയാണെന്നു നോക്കുക, രണ്ടാമത് കിട്ടിയ സംഖ്യയെ ആദ്യം കിട്ടിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ സാധ്യതയായി.

പറയുന്നതുപോലെ എളുപ്പമാണോ ചെയ്യുന്നത് ? എല്ലാ സംഖ്യാജോടികളും എഴുതി എണ്ണുക അത്ര രസമുള്ള കാര്യമല്ലല്ലോ.

ചിന്തിച്ചുനോക്കാം. ആദ്യത്തെ സംഖ്യ പത്തെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നാകാം, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ അഞ്ചെണ്ണത്തിൽ ഏതെങ്കിലുമൊന്നും. അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1 ആകുന്ന എത്ര ജോടികളുണ്ട് ? ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആകുന്ന ജോടികളോ ?

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ നിശ്ചയിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ മാറ്റി 5 ജോടികളുണ്ടാക്കാം. ആദ്യത്തെ സംഖ്യതന്നെ 10 തരത്തിലാ

സാധ്യതയും ആവൃത്തിയും

സാധാരണ ഒരു നാണയം കുറെ തവണ എറിയുമ്പോൾ, തലയോ വാലോ (Head or Tail) വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം ഏതാണ്ടു തുല്യമായിരിക്കും. അതിനാൽ ഓരോന്നും കിട്ടുവാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{2}$ ആയി എടുക്കാം. എന്നാൽ, നാണയം ഉണ്ടാക്കുന്നതിലെ അപാകത കൊണ്ടോ മറ്റോ, ചിലപ്പോൾ തലവശം വീഴാൻ സാധ്യത കൂടുതലായി എന്നു വരാം. ഇതെങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ?

നാണയം ആവർത്തിച്ച് എറിയുമ്പോൾ ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം, പകുതിയിൽ നിന്ന് വല്ലാതെ മാറിയിട്ടുണ്ടെങ്കിലാണ് ഇത്തരമൊരു സംശയം ഉണ്ടാകേണ്ടത്. അപ്പോൾ കൂടുതൽ തവണ എറിഞ്ഞ് ഓരോ വശവും വീഴുന്നതിന്റെ എണ്ണം വെവ്വേറെ പട്ടികപ്പെടുത്തുകയാണ് രീതി. ഉദാഹരണമായി ഈ പട്ടിക നോക്കുക.

ഏറ്	തല	വാൽ
10	6	4
100	58	42
1000	576	424
10000	5865	4135

ഇതിൽ നിന്ന് തലയുടെ സാധ്യത 0.6 എന്നും, വാലിന്റെ സാധ്യത 0.4 എന്നും എടുക്കുന്നതാണ്, രണ്ടും 0.5 എന്നെടുക്കുന്നതിനേക്കാൾ ശരി എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇത്തരം കണക്കുകൂട്ടലുകൾ കൂടുതൽ കൃത്യമാക്കാനുള്ള ഗണിതരീതികൾ, **സാധ്യതാസിദ്ധാന്തം (Probability theory)** എന്ന ഗണിതശാഖയുടെ തുടർന്നുള്ള പഠനത്തിൽ കാണാം.

കാം. അപ്പോൾ മൊത്തം സംഖ്യാജോടികളെ ഇങ്ങനെ സങ്കൽപ്പിക്കാം.

5 (columns), 10 (rows)

(1,1)	(1,2)	. . .	(1,5)
(2,1)	(2,2)	. . .	(2,5)
. . .	. . .	. . .	. . .
(10,1)	(10,2)	. . .	(10,5)

- ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1 ആയ ജോടികൾ 1-ാം വരിയിൽ
  ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 2 ആയ ജോടികൾ 2-ാം വരിയിൽ
  എന്നിങ്ങനെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 10 ആകുന്നതു വരെ 10 വരികൾ
- ഓരോ വരിയിലും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 1 മുതൽ 5 വരെ ആയ 5 ജോടികൾ
- ആകെ $5 \times 10 = 50$ ജോടികൾ

ഈ 50 ജോടികളിൽ എത്ര എണ്ണത്തിലാണ് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളാകുന്നത് ?

അനിശ്ചിതത്വത്തിന്റെ അളവ്

ഓരോ ദിവസവും സൂര്യൻ ഉദിക്കുന്ന സമയവും, അസ്തമിക്കുന്ന സമയവും കലണ്ടറിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് ശ്രദ്ധിച്ചിട്ടുണ്ടോ ? കൃത്യമായ ചില ഗണിതനിയമങ്ങളനുസരിച്ചു ഭൂമിയും സൂര്യനുമെല്ലാം ചലിക്കുന്നതുകൊണ്ടാണ് ഇതെല്ലാം കണക്കാക്കാൻ പറ്റുന്നത്.

ഇതുപോലെതന്നെ മഴക്കാലവും വേനൽക്കാലവുമെല്ലാം ഏതു മാസങ്ങളിലാണെന്നും കണക്കു കൂട്ടാം. പക്ഷേ വേനൽക്കാലത്ത് പെട്ടെന്നൊരു മഴ വരുന്നത് മുൻകൂട്ടി കണക്കാക്കാൻ കഴിഞ്ഞില്ല എന്നു വരും. മഴയെ സ്വാധീനിക്കുന്ന ഘടകങ്ങളുടെ പെരുപ്പവും, അവ തമ്മിലുള്ള പരസ്പരബന്ധങ്ങളുടെ സങ്കീർണ്ണതയുമാണ് ഇത്തരം പ്രവചനങ്ങൾ വിഷമമാക്കുന്നത്.

സാഹചര്യങ്ങളുടെ ഗണിതപരമായ വിശകലനത്തിലൂടെ സാധ്യതകൾ കണക്കുകൂട്ടാം. അതുകൊണ്ടുതന്നെയാണ് ദൈനംദിന അന്തരീക്ഷസ്ഥിതിയെക്കുറിച്ചുള്ള പ്രവചനങ്ങൾ, സാധ്യതകളായി പറയുന്നത്. അപ്രതീക്ഷിതമായി സാഹചര്യങ്ങളിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങളാണ് ഈ പ്രവചനങ്ങളെ ചിലപ്പോൾ തെറ്റിക്കുന്നതും.

യാതൊരു ശാസ്ത്രീയമായ അടിസ്ഥാനവുമില്ലാതെ, കൃത്യമെന്നപോലെ നടത്തുന്ന പ്രവചനങ്ങളേക്കാൾ, ഇത്തരം സാധ്യതാ പ്രവചനങ്ങൾക്ക് വിശ്വാസ്യത കൂടുമെന്ന് ശരിയായി നോക്കിയാൽ കാണുകയും ചെയ്യാം.

അതിന്, ആദ്യത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5, 7, 9 എന്നീ 5 എണ്ണത്തിലൊന്നാകണം; രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ 1, 3, 5 എന്നീ 3 എണ്ണത്തിലൊന്നും.

ആകെ ജോടികൾ $3 \times 5 = 15$

അപ്പോൾ ഈ പെട്ടികളിൽ നിന്ന് രണ്ടും ഒറ്റസംഖ്യകളായി കിട്ടാനുള്ള സാധ്യത

$$\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

3 (columns), 5 (rows)

(1,1)	(1,3)	(1,5)
(3,1)	(3,3)	(3,5)
(5,1)	(5,3)	(5,5)
(7,1)	(7,3)	(7,5)
(9,1)	(9,3)	(9,5)

ഇതുപോലെ, രണ്ടും ഇരട്ടസംഖ്യകളാകാനുള്ള സാധ്യതയും, ഒരു സംഖ്യ ഒറ്റയും മറ്റേ സംഖ്യ ഇരട്ടയും ആകാനുള്ള സാധ്യതയും കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

ഒരു കണക്കു കൂടി:

> ഒരു കുട്ടയിൽ 50 മാങ്ങയുണ്ട്, അതിൽ 20 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. മറ്റൊരു കുട്ടയിൽ 40 മാങ്ങ യുണ്ട്, 15 എണ്ണം പഴുത്തിട്ടില്ല. ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഓരോ മാങ്ങയെടുത്താൽ, രണ്ടും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എത്രയാണ് ?

ഓരോ കുട്ടയിൽ നിന്നും ഒരു മാങ്ങ വീതം എത്ര വ്യത്യസ്തരീതികളിൽ എടുക്കാം ? (വേണമെങ്കിൽ, ഒന്നാമത്തെ കുട്ടയിലെ മാങ്ങകളിൽ 1 മുതൽ 50 വരെയും രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിലെ മാങ്ങകളിൽ 1 മുതൽ 40 വരെയും സംഖ്യകൾ എഴുതിയിരിക്കുന്നതായി സങ്കല്പിക്കാം).

അപ്പോൾ ആകെ രണ്ടു മാങ്ങകളെടുക്കുന്നത് $50 \times 40 = 2000$ രീതികളിലാവാം.

ഇതിലെത്ര ജോടികൾ രണ്ടും പഴുത്തതാകും ?

ആദ്യത്തെ കുട്ടയിൽ, $50 - 20 = 30$ പഴുത്ത മാങ്ങയുണ്ട്, രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിൽ $40 - 15 = 25$ എണ്ണം പഴുത്തതാണ്.

ആദ്യത്തെ കുട്ടയിലെ ഓരോ പഴുത്ത മാങ്ങയും, രണ്ടാമത്തെ കുട്ടയിലെ ഒരോ പഴുത്ത മാങ്ങയു മായി ജോടിയാക്കിയാൽ ആകെ $30 \times 25 = 750$ ജോടി. അപ്പോൾ രണ്ടും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{750}{2000} = \frac{3}{8}$

ഇതുപോലെ രണ്ടും പച്ചയാകാനുള്ള സാധ്യത കണക്കാക്കിനോക്കൂ.

ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകണം എന്നാൽ ഒരു പഴുത്തതും ഒരു പച്ചയും; അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടും പഴുത്തത്;

ഇതിൽ ഒരെണ്ണം പഴുത്തത് എന്നത് തന്നെ രണ്ട് രീതിയിൽ കിട്ടും;

(i) ഒന്നാം കുട്ടയിൽ നിന്ന് പഴുത്തത്, രണ്ടാം കുട്ടയിൽ നിന്ന് പച്ച.

(ii) ഒന്നാം കുട്ടയിൽ നിന്നു പച്ച, രണ്ടാം കുട്ടയിൽ നിന്ന് പഴുത്തത്.

ഇത്തരം ഓരോന്നും എത്ര ജോടികളുണ്ട് ?

അതായത്, ഒന്ന് മാത്രം പഴുത്ത ജോടികൾ ആകെ

$$(30 \times 15) + (20 \times 25) = 450 + 500$$
$$= 950$$

രണ്ടും പഴുത്തത് 750 ജോടി എന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. രണ്ടും കൂടി എടുത്താൽ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതുള്ള ജോടികൾ ആകെ

$$950 + 750 = 1700$$

അതിനാൽ ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$ എന്ന് കണക്കാക്കാം.

ഇതുതന്നെ ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം: ഒരെണ്ണമെങ്കിലും പഴുത്തതാകുക എന്നാൽ രണ്ടും പച്ചയാകാൻ പറ്റില്ല. ആകെ സാധ്യമാകുന്ന 2000 ജോടികളിൽ, രണ്ടും പച്ചയായത് $20 \times 15 = 300$ ആണല്ലോ.

മിച്ചമുള്ള $2000 - 300 = 1700$ ജോടികളിലെല്ലാം ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകണം.

അതായത്, ഒന്നെങ്കിലും പഴുത്തതാകാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1700}{2000} = \frac{17}{20}$

(1) 10 A ക്ലാസിൽ 30 ആൺകുട്ടികളും, 20 പെൺകുട്ടികളുമുണ്ട്. 10 B ക്ലാസിൽ 15 ആൺകുട്ടികളും, 25 പെൺകുട്ടികളും. ഓരോ ക്ലാസിൽനിന്നും ഒരു കുട്ടിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കണം.

(i) രണ്ടും പെൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(ii) രണ്ടും ആൺകുട്ടികളാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(iii) ഒരു ആൺകുട്ടിയും ഒരു പെൺകുട്ടിയുമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(iv) ഒരാളെങ്കിലും ആൺകുട്ടി ആകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(2) ഒരാളോട് ഒരു രണ്ടക്കസംഖ്യ പറയാനാവശ്യപ്പെടുന്നു.

(i) ഇതിലെ രണ്ടക്കങ്ങളും തുല്യമാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(ii) ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ വലുതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(iii) ആദ്യത്തെ അക്കം, രണ്ടാമത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ ചെറുതാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ് ?

(3) 1 മുതൽ 6 വരെയുള്ള സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടുള്ള രണ്ടു പകിടകൾ ഒന്നിച്ചുരുട്ടുന്നു. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുക ഏതൊക്കെ സംഖ്യകളാകാം? ഏറ്റവും കൂടുതൽ സാധ്യതയുള്ള തുക എന്താണ് ?

(4) ഒരു പെട്ടിയിൽ 1 മുതൽ 10 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളെഴുതിയ 10 കടലാസു കഷണങ്ങളും മറ്റൊരു പെട്ടിയിൽ 25 വരെയുള്ള 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളെഴുതിയ കടലാസു കഷണങ്ങളും ഉണ്ട്. രണ്ടിൽ നിന്നും ഓരോ കടലാസ് എടുക്കുന്നു.

(i) രണ്ടും ഒറ്റ സംഖ്യയാവാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(ii) ഈ കടലാസുകളിൽ എഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ഒറ്റ സംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(iii) ഈ കടലാസുകളിൽ എഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ തുക ഒറ്റ സംഖ്യയാകാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

5 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

വർഗപ്രശ്നങ്ങൾ

ഒരു കണക്കിൽ നിന്നു തുടങ്ങാം:

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 36 മീറ്റർ ആയി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു ?

പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $36 \div 4 = 9$ മീറ്റർ; അപ്പോൾ പഴയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $9 - 1 = 8$ മീറ്റർ എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ചോദ്യം ഇങ്ങനെയായാലോ ?

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 36 ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു ?

പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ് ?

$$\sqrt{36} = 6 \text{ മീറ്റർ, അല്ലേ ?}$$

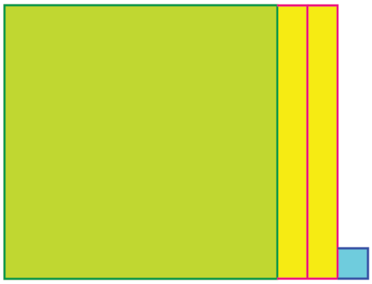
അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $6 - 1 = 5$ മീറ്റർ.

(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ കുറച്ച് ചെറുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 49 ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്ര മീറ്ററായിരുന്നു ?

(2) സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനു ചുറ്റും 2 മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനവും പാതയും ചേർന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1225 ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. മൈതാനത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

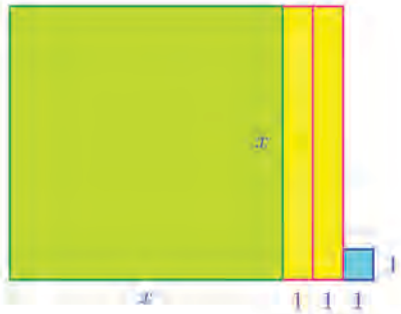


പച്ച നിറത്തിലൊരു സമചതുരവും, അതേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു മഞ്ഞച്ചതുരങ്ങളും, നീല നിറത്തിലൊരു ചെറുസമചതുരവും ചേർത്തു വച്ചിരിക്കുന്നു. മഞ്ഞച്ചതുരങ്ങൾ ഓരോന്നിന്റെയും വീതിയും, നീല സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവുമെല്ലാം 1 മീറ്ററാണ്; ചിത്രത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്ററും.

പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം.

നേരിട്ടാലോചിച്ചു കണക്കാക്കാൻ വിഷമമാണ്, അല്ലേ ?

ബീജഗണിതം പരീക്ഷിക്കാം. പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം.



ആകെ പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്; അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം:

$x^2 + 2x + 1 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ് ?

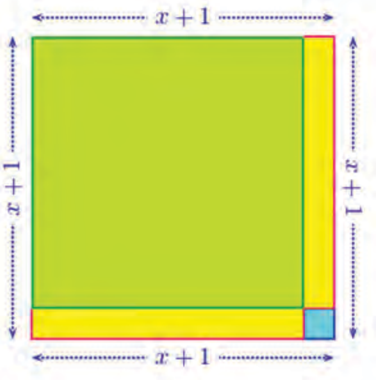
$x^2 + 2x + 1$ എന്ന രൂപം പരിചയമുണ്ടോ ?

എട്ടാം ക്ലാസിലെ **വർഗസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ചിത്രത്തിലെ ചതുരങ്ങൾ മാറ്റിയടുക്കിയും ഇതു കാണാം.



അപ്പോൾ പ്രശ്നം മാറ്റിയെഴുതാം:

$(x + 1)^2 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ് ?

ഇനി $x + 1 = 10$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = 9$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

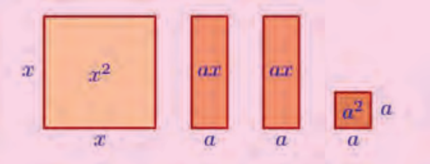
അതായത്, പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 9 മീറ്ററാണ്.

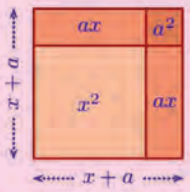
ജ്യാമിതീയവർഗം

x, a എന്നീ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

ആണല്ലോ. x, a ഇവ അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഈ ബീജഗണിതവാക്യം ചിത്രമാക്കാം:





(1) അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ 289 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(2) 6 ന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിനോട് 9 കൂട്ടിയപ്പോൾ 729 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(3) 9, 11, 13, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറച്ച് പദങ്ങളുടെ തുകയും 16 ഉം കൂട്ടിയപ്പോൾ 256 കിട്ടി. എത്ര പദങ്ങളാണ് കൂട്ടിയത് ?

വർഗത്തികവ്

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് ?

ആദ്യം പ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം. ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 2$ മീറ്റർ; പരപ്പളവ്, $x(x + 2) = x^2 + 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇനി ചതുരപ്രശ്നം, ബീജഗണിതപ്രശ്നമാക്കാം:

$x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ് ?

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും ?

മുമ്പു ചെയ്ത ഒരു കണക്കിൽ $x^2 + 2x + 1$ നെ $(x + 1)^2$ എന്നു മാറ്റിയെഴുതി മുന്നോട്ടു പോയത് ഓർമ്മയുണ്ടോ ? ഈ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 2x$ മാത്രമേയുള്ളൂ.

1 കൂട്ടിയാൽപ്പോരേ ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ തുടരാം:

(i) $x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ $x^2 + 2x + 1 = 224 + 1 = 225$

(ii) അതായത്, $(x + 1)^2 = 225$

(iii) $(x + 1)^2 = 225$ ആണെങ്കിൽ $x + 1 = \sqrt{225} = 15$

(iv) $x + 1 = 15$ ആണെങ്കിൽ $x = 14$

അങ്ങനെ ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശം 14 മീറ്റർ എന്നു കിട്ടി.

അപ്പോൾ വലിയ വശം $14 + 2 = 16$ മീറ്റർ

ഈ ചോദ്യം തന്നെ അല്പമൊന്നു മാറ്റി ഇങ്ങനെ ആക്കിയാലോ ?

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 20 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ് ?

ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ മാറും:

$x^2 + 20x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ് ?

ഇവിടെയും 1 കൂട്ടിയാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ സംഖ്യ $225 = 15^2$ ആകും; പക്ഷേ, ഇടതുവശത്തെ ബീജഗണിതവാക്യം $x^2 + 20x + 1$ എന്നാണാകുന്നത്.

ഇതിനെ $(x + a)^2$ എന്ന രൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ ?

a ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ആണല്ലോ.

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 20x$ ആണുള്ളത്. അതായത്, പൊതുവായ സമവാക്യത്തിലെ $2ax$ ന്റെ സ്ഥാനത്ത് $20x$,

അപ്പോൾ, a ആയി 10 എടുത്തു നോക്കിയാലോ ?

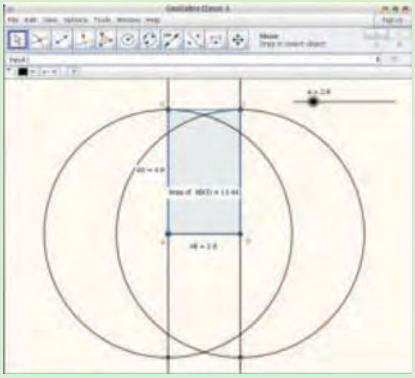
$$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$$

പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 20x = 224$ ആണ്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച് 100 കൂട്ടി തുടർന്നാലോ ?

$$\begin{aligned} x^2 + 20x &= 224 \\ x^2 + 20x + 100 &= 324 \\ (x + 10)^2 &= 324 \\ x + 10 &= \sqrt{324} = 18 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

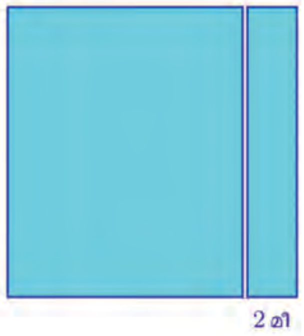
അങ്ങനെ ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8 മീറ്ററും, 28 മീറ്ററുമാണെന്നു കണക്കാക്കാം.

വലിയവശം ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 കൂടുതലായ ചതുരങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരക്കാം. ഇതിനായി min = 0 ആയ a എന്ന സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കുക. നീളം a ആയി ഒരു വര AB വരച്ച ശേഷം അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി AB യ്ക്കു ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. A, B ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളായി ആരം $a + 2$ വരത്തക്കവിധം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഓരോ വൃത്തവും ലംബങ്ങളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് $ABCD$ എന്ന ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇനി വരകളും വട്ടങ്ങളും മറച്ചു വയ്ക്കാം. ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 224 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ് ?



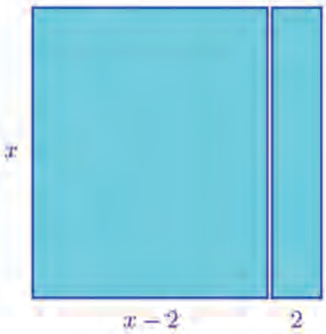
വേറൊരു ചതുരക്കണക്ക്:

ഒരു സമചതുരത്തിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ വീതിയുള്ള ഒരു കഷണം മുറിച്ചുമാറ്റുന്നു.



മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 99 ചതുരശ്രമീറ്റർ; സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് ?

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ, $x - 2$ മീറ്റർ എന്നാകും:



മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $x(x - 2) = x^2 - 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നുമാകും.
അപ്പോൾ പ്രശ്നത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇതാണ്.

$x^2 - 2x = 99$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ് ?

$x^2 + 2x$ നെപ്പോലെ $x^2 - 2x$ നെയും വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ ?
എട്ടാം ക്ലാസിലെ മറ്റൊരു സമവാക്യം ഓർത്തുനോക്കൂ:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

ഇനി പ്രശ്നത്തിലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ

$$x^2 - 2x = 99$$
$$x^2 - 2x + 1 = 100$$
$$(x - 1)^2 = 100$$
$$x - 1 = 10$$
$$x = 11$$

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 11 മീറ്റർ.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ നീളം, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും. ഈ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് ?

ലംബവശങ്ങളിൽ ചെറുതിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 5$ ആകും; പരപ്പളവോ ?

അപ്പോൾ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാൽ

$$\frac{1}{2}x(x+5) = 12$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതുതന്നെ

$$x^2 + 5x = 24$$

എന്നെഴുതാം.

$x^2 + 5x$ നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ്, $x^2 + 2ax + a^2$ എന്ന രൂപത്തിലാകുക ?

$$x^2 + 5x = x^2 + \left(2 \times \frac{5}{2}\right)x$$

എന്നെഴുതി നോക്കൂ.

ഇതിനെ വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ് ?

$$x^2 + \left(2 \times \frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരു ഭാഗത്തും $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ കൂട്ടാം.

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 24 + \frac{25}{4}$$

അതായത്

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2}$$

എന്നും, അതിൽനിന്ന്

$$x = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3$$

എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

അതായത് ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും, 8 സെന്റിമീറ്ററും.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം ?

ചതുരത്തിന്റെ നീളം, വീതി ഇവയുടെ തുക 50 മീറ്ററാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $50 - x$ മീറ്റർ; പരപ്പളവ് $x(50 - x) = 50x - x^2$ ചതുരശ്ര മീറ്റർ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$50x - x^2 = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

$50x - x^2$ എന്നതിനെ വർഗരൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. സമവാക്യം അല്പം മാറ്റിയെഴുതാം. $50x$ എന്ന സംഖ്യയിൽനിന്ന് x^2 കുറച്ചാൽ 525 കിട്ടണമെങ്കിൽ, തിരിച്ചു കുറച്ചാൽ അതിന്റെ ന്യൂനമായ –525 കിട്ടണമല്ലോ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$x^2 - 50x = -525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

ഇനി $x^2 - 50x$ നോട് ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടി വർഗരൂപത്തിലാക്കണം. കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ് ?

$$x^2 - 50x + 625 = (x - 25)^2$$

ഇനി നമ്മുടെ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ പരിഹരിക്കാം:

$$\begin{aligned} x^2 - 50x &= -525 \\ x^2 - 50x + 625 &= -525 + 625 = 100 \\ (x - 25)^2 &= 100 \\ x - 25 &= 10 \\ x &= 35 \end{aligned}$$

അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 35 മീറ്ററും 15 മീറ്ററും.

ഈ കണക്ക് മറ്റൊരു രീതിയിലും ചെയ്യാം;

ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 25 മീറ്ററാണല്ലോ; അതിനാൽ പരപ്പളവ് 625 ചതുരശ്രമീറ്ററും.

കണക്കിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 525 ചതുരശ്രമീറ്ററാണല്ലോ; അപ്പോൾ അതേതായാലും സമചതുരമല്ല. അതിനാൽ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും നീളം 25 മീറ്ററുമല്ല.

രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും നീളം 25 മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാണെങ്കിൽ, ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാകും; രണ്ടും 25 മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവാണെങ്കിൽ, ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവാകും. അപ്പോൾ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 25 മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലും, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം 25 മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവുമാകണം.

ഈ നീളങ്ങളുടെ തുക 50 തന്നെ ആകണം എന്നതിനാൽ (എന്തുകൊണ്ട് ?), കൂടിയതും കുറഞ്ഞതും ഒരേ അളവിലായിരിക്കണം.

അത് x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം $25 + x$ മീറ്റർ, $25 - x$ മീറ്റർ എന്നാകും;

പരപ്പളവ് $(25 + x)(25 - x)$ ചതുരശ്രമീറ്ററും.

അപ്പോൾ കണക്കിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെയാകും:

$(25 + x)(25 - x) = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

ഇതിലെ $(25 + x)(25 - x)$ എന്നതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ.

$$(25 + x)(25 - x) = 625 - x^2$$

(എട്ടാം ക്ലാസിലെ **വർഗസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗവ്യത്യാസം** എന്ന ഭാഗം). ഇതുപയോഗിച്ച്, ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$625 - x^2 = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

ഇതിൽനിന്ന് $x^2 = 625 - 525 = 100$ എന്നും, തുടർന്ന് $x = 10$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

അതായത്, വശങ്ങളുടെ നീളം $25 + 10 = 35$ മീറ്ററും $25 - 10 = 15$ മീറ്ററും.

a എന്ന പേരിൽ min = 2, max = 10 ആയ ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി, നീളം a ആയ ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും ലംബസമഭാജിയും അടയാളപ്പെടുത്തുക. മധ്യബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ആരം $a - 2$ ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തം ലംബസമഭാജിയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ത്രികോണം പൂർത്തിയാക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 12 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?

(1) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം ഉണ്ടാക്കണം.

ഉയരം, പാദത്തെക്കാൾ 2 മീറ്റർ കുറവാകണം; പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രമീറ്ററുമാകണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം ?

(2) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ ഒരു വശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിൽനിന്ന് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ കുറച്ചതാണ് അതിനു ലംബമായ വശം; രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയതാണ് കർണ്ണം. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ് ?

(3) 2.6 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പ് ഭിത്തിയിൽ ചാരിവച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട്, ഭിത്തിയിൽ നിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്. കമ്പിന്റെ താഴത്തെ അറ്റം അല്പം മുന്നോട്ട് നീക്കിയപ്പോൾ, മുകളറ്റം അത്രയും തന്നെ താഴോട്ടു നീങ്ങി. എത്ര ദൂരമാണ് മുന്നോട്ടു നീക്കിയത് ?

(4) അടുത്തടുത്ത രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 195 ആണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

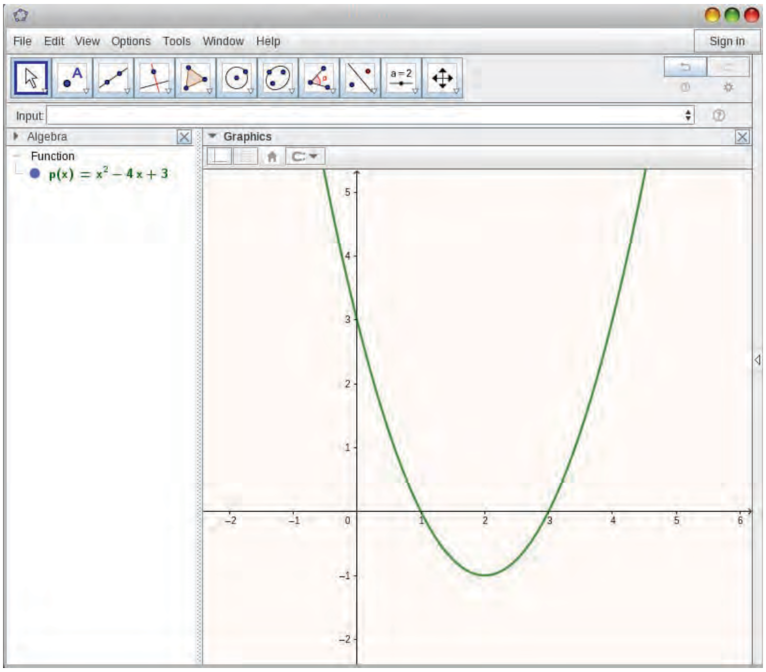
(5) 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലാണ് 140 കിട്ടുക ?

രണ്ട് ഉത്തരം

രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രരൂപം ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദചിത്രങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ (**രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

ഉദാഹരണമായി, $p(x) = x^2 - 4x + 3$

എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ ഇങ്ങനെ വരച്ചുകിട്ടും.



ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം വിലങ്ങനെയുള്ള വരയെ മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്, 1, 3 എന്നീ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയാണല്ലോ.

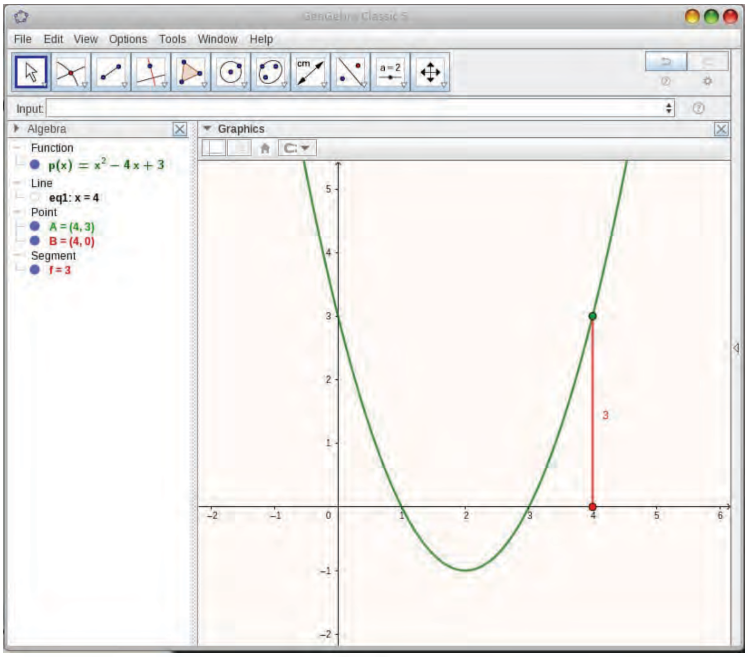
അപ്പോൾ $p(1)$, $p(3)$ ഇവ ഏതു സംഖ്യകളാകണം ?

പൊതുവേ, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ x എന്ന സംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദു എടുത്താൽ, അതിൽനിന്ന് ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപത്തിലേക്കുള്ള ഉയരമാണല്ലോ $p(x)$

ഉദാഹരണമായി,

$$p(4) = 4^2 - (4 \times 4) + 3 = 3$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. ചിത്രത്തിൽനിന്ന്, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിലെ 4 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപത്തിലേക്കുള്ള ഉയരം 3 എന്നു കാണുകയും ആവാം:



വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിലെ 1, 3 സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള ഈ ഉയരം പൂജ്യമാണല്ലോ. അപ്പോൾ $p(1)$, $p(3)$ ഇവ പൂജ്യമാണോ ?

പരിശോധിച്ചു നോക്കാം:

$$p(1) = 1^2 - (4 \times 1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$p(3) = 3^2 - (4 \times 3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

ഇങ്ങനെ ചിത്രം വരയ്ക്കാതെ തന്നെ $p(x) = 0$ ആകുന്ന x, ഏതു സംഖ്യയാണെന്ന് ബീജഗണിതത്തിലൂടെ തന്നെ കണക്കാക്കാൻ കഴിയുമോ ?

ചോദ്യം ഇതാണ്:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

നേരത്തെ ചെയ്ത കണക്കുകൾ പോലെ ഇതു ചെയ്യാൻ കഴിയുമോ?

$x^2 - 4x + 3$ നോട് ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ കൂട്ടി $(x - a)^2$ എന്ന രൂപത്തിലാക്കാമോ ?

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

എന്നറിയാമല്ലോ. ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$(x^2 - 4x + 3) + 1 = (x - 2)^2$$

ഇനി നമുക്ക് വേണ്ട x കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 + 1 &= 0 + 1 \\ x^2 - 4x + 4 &= 1 \\ (x - 2)^2 &= 1 \\ x - 2 &= 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

അതായത്, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, $p(3) = 0$

പക്ഷേ, $p(1) = 0$ എന്നും നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, $x = 1$ എന്നതും $x^2 - 4x + 3 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണ്.

ഈ ഉത്തരം കിട്ടാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ് ?

ബീജഗണിത രീതിയിൽ പരിഹാരം കണ്ടെത്തിയ വഴികളിലൂടെ ഒന്നുകൂടി പോയി നോക്കാം. ഇതിൽ ഒരിടത്ത്

$$(x - 2)^2 = 1$$

എന്നു കിട്ടിയില്ലേ ?

അതിൽനിന്ന് $x - 2 = 1$ എന്നും എഴുതി.

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം 1 ആണെങ്കിൽ സംഖ്യയും 1 തന്നെ ആകണമെന്നുണ്ടോ ?

(-1) ന്റെ വർഗം എന്താണ് ?

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

(ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ആന്ദോളനം** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ നമ്മുടെ കണക്കിൽ,

$$(x-2)^2 = 1$$

എന്നതിൽ നിന്ന്

$$x-2 = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x-2 = -1$$

എന്നേ പറയാൻ കഴിയൂ. ഇതിൽ

$$x-2 = 1 \text{ എന്നെടുത്താൽ, } x = 1+2 = 3$$

$$x-2 = -1 \text{ എന്നെടുത്താൽ, } x = -1+2 = 1$$

ഇപ്പോൾ ബീജഗണിതരീതിയിലും $p(x) = 0$ ആകാൻ x ആയി എടുക്കാവുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളും കിട്ടിയില്ലേ ?

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം ഇങ്ങനെ ന്യൂനവർഗമൂലവും എടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ, മറ്റൊരുത്തരം കൂടി കിട്ടുമായിരുന്നോ ?

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ ചെയ്ത ഒരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ കൂടുതൽ നീളവും, പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിന്റെ വശങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, $(x+1)^2 = 225$ എന്നു കിട്ടുമെന്നു കണ്ടു. തുടർന്ന് $x+1 = 15$ എന്നെടുത്ത്, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം 14 മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ബീജഗണിതം മാത്രം നോക്കിയാൽ $x+1 = -15$ എന്നും ആകാം; അതായത് $x = -16$

പക്ഷേ ഈ കണക്കിൽ x ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശമായതിനാൽ, അതൊരു അധിസംഖ്യയാണ്. അപ്പോൾ $x = -16$ എന്ന ഉത്തരം ചതുരക്കണക്കിനു പറ്റിയതല്ല.

നേരത്തെ ചെയ്ത മറ്റൊരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്ര മീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ $(x-25)^2 = 100$ എന്നു കണ്ടു. ഇതിൽനിന്ന്, $x-25 = 10$ എന്നെടുത്ത്, ഒരു വശം 35 മീറ്റർ, മറ്റേ വശം $50-35 = 15$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ന്യൂനവർഗമൂലം എടുത്താലോ ?

$x-25 = -10$ എന്നും, ഇതിൽനിന്ന് $x = 15$ എന്നും കിട്ടും. അതായത്, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 15 മീറ്റർ എന്നും, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $50-15 = 35$ മീറ്റർ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ ഈ കണക്കിൽ രണ്ടു വർഗമൂലങ്ങളിൽ ഏതെടുത്താലും ഒരേ ചതുരം തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു പ്രായോഗിക പ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിത സമവാക്യമാക്കി, ഗണിതപരമായി മാത്രം ആലോചിക്കുമ്പോൾ, ഒന്നിൽക്കൂടുതൽ ഉത്തരങ്ങൾ കിട്ടിയെന്നിരിക്കും. ഇവയിൽ ചിലതു മാത്രമോ, എല്ലാം തന്നെയോ, തുടങ്ങിയ പ്രായോഗിക പ്രശ്നത്തിന് യോജിച്ചതല്ലെന്നും വരാം.

അപ്പോൾ സാധാരണയായി ബീജഗണിതരീതിയിൽ എല്ലാ ഉത്തരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുകയും, തുടർന്ന് ഇവയിൽ നിന്ന് സന്ദർഭത്തിനു യോജിച്ചവ മാത്രം എടുക്കുകയുമാണ് പതിവ്.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

99, 97, 95, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലാണ് 900 കിട്ടുന്നത് ?

ഈ ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം $101 - 2n$ എന്നും, അതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$101n - n(n + 1) = 100n - n^2$$

എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ ചോദ്യത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$100n - n^2 = 900$ ആകണമെങ്കിൽ n എന്തായിരിക്കണം ?

ഇത് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$\begin{aligned} 100n - n^2 &= 900 \\ n^2 - 100n &= -900 \\ n^2 - 100n + 50^2 &= -900 + 2500 \\ (n - 50)^2 &= 1600 \end{aligned}$$

ഇതിൽനിന്ന് എന്താണ് കിട്ടുന്നത് ?

1600 എന്നത് 40 ന്റെയും –40 ന്റെയും വർഗമാണല്ലോ.

അപ്പോൾ മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്

$n - 50 = 40$ അല്ലെങ്കിൽ $n - 50 = -40$

എന്ന രണ്ട് ഉത്തരം കിട്ടും. അതായത്

$n = 90$ അല്ലെങ്കിൽ $n = 10$

അപ്പോൾ ഈ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും, ആദ്യത്തെ 90 പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും 900 തന്നെ കിട്ടും.

(1) ഒരു സംഖ്യയും, അതിനോടു 2 കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചപ്പോൾ 168 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(2) തുക 4 ഉം, ഗുണനഫലം 2 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) 55, 45, 35, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണി നോക്കുക.

(i) ഇതിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 175 കിട്ടും ?

(ii) ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 180 കിട്ടും ?

(iii) ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 0 കിട്ടും ?

6 ത്രികോണമിതി

കോണുകളും വശങ്ങളും

ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ്?

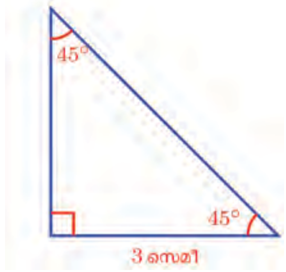
രണ്ടു കോണുകൾ 90° യും, 45° യും ആയതിനാൽ, മൂന്നാമത്തെ കോണും 45° തന്നെ.

രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, അവയുടെ എതിർവശങ്ങളും തുല്യമാണ് (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

മൂന്നാമത്തെ വശമോ?

അതിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അളവുകളും സംഖ്യകളും** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമോ ?

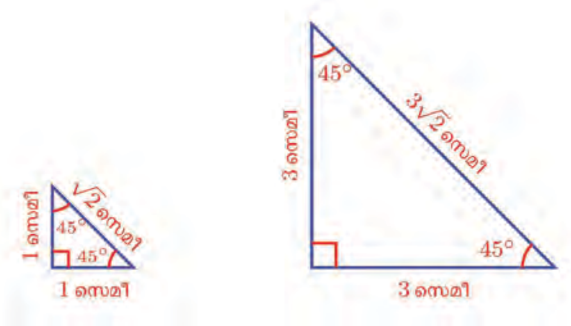


ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിനും ഈ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളല്ലേ ?

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ് (അതായത്, ഒരേ മടങ്ങോ ഭാഗമോ ആണ്) എന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **സദൃശത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ഇവിടെ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ 45° കോണിന്റെ എതിർവശം, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ അതേ കോണിന്റെ എതിർവശത്തിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാണ്.

അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളവും ഇതേപോലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ മൂന്നു മടങ്ങ് തന്നെ ആകണം:



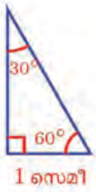
ഇതുപോലെ, കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം അറിയാമെങ്കിൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, ഇത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ലംബവശം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററാണെങ്കിൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ $\frac{1}{2}$ മീറ്ററും $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ മീറ്ററും ആണ്.

ഈ കണക്ക് പൊതുവേ എങ്ങനെ പറയാം ?

കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു ചെറിയ വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണ്; ഈ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ്, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം

ഇനി ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



ഇതിലെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

ഇതേപോലെയുള്ള മറ്റൊരു ത്രികോണം ചേർത്തുവച്ചാൽ ഒരു സമഭുജത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ.

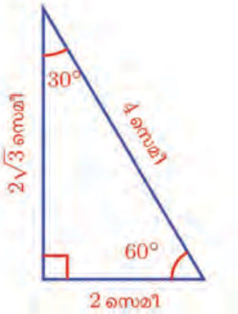
ഈ സമഭുജത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശം 2 സെന്റിമീറ്റർ ആയതിനാൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളവും 2 സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണ്.

ഇതിന്റെ ഉയരം $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണെന്നും ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ട് (**പുതിയ സംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അളവുകളും സംഖ്യകളും** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ ആദ്യം വരച്ച ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം കിട്ടിയല്ലോ.

ഇനി കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ മറ്റൊരു ത്രികോണം നോക്കൂ:

ഇതിലെ 30° കോണിന്റെ എതിർവശം, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ 30° കോണിന്റെ എതിർവശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. അപ്പോൾ മറ്റു കോണുകളുടെ എതിർവശങ്ങളും രണ്ടു മടങ്ങ് ആകണമല്ലോ.



ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം പൊതുവേ എങ്ങനെ പറയാം ?

കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഏറ്റവും ചെറിയവശത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങാണ് ഇടത്തരം വശം; ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ വശം

ഇത് ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കൂ:

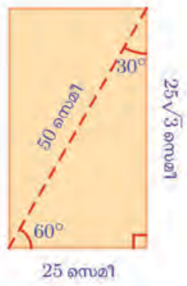
ഒരു ചതുരപ്പലക വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിച്ച്, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മാറ്റിയടുക്കി, ഒരു സമഭുജത്രികോണമുണ്ടാക്കണം:

ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 50 സെന്റിമീറ്ററുമാകണം. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം ?

ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണമാണല്ലോ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം. അപ്പോൾ അത് 50 സെന്റിമീറ്റർ ആകണം.

ത്രികോണങ്ങൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുമ്പോൾ കിട്ടേണ്ടത് സമഭുജത്രികോണമായതിനാൽ, ഈ ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആകണം.

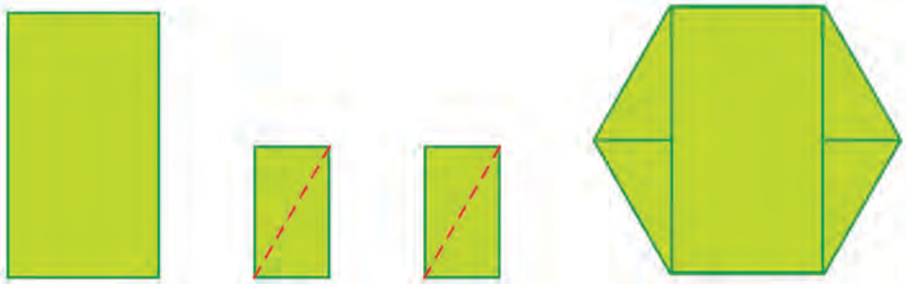
ഇത്തരമൊരു ത്രികോണത്തിൽ, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണല്ലോ ഏറ്റവും വലിയ വശം. ഇവിടെ ഏറ്റവും വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം 50 സെന്റിമീറ്റർ; അപ്പോൾ ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം 25 സെന്റിമീറ്റർ; മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളമോ ?



ഇപ്പോൾ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കിട്ടിയില്ലേ ?

ഇതുപോലെ ഈ കണക്ക് ചെയ്തുനോക്കൂ:

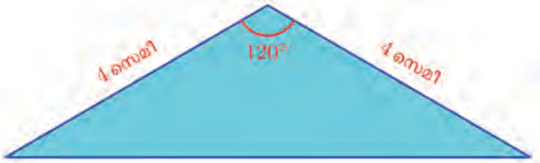
രണ്ടു ചതുരങ്ങൾ വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, മറ്റൊരു ചതുരത്തോടു ചേർത്തുവച്ച്, ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു സമഷഡ്ഭുജമുണ്ടാക്കണം:



ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 30 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ, ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം ?

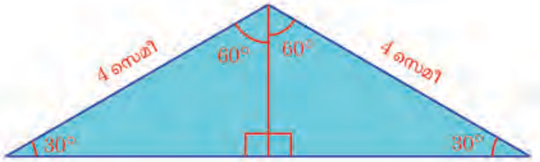
ചില പരപ്പളവുകൾ കണക്കാക്കാനും ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

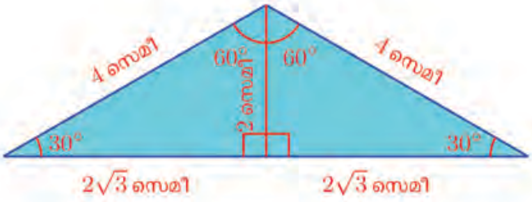


ഈ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമായതിനാൽ, അവയ്ക്കെതിരെയുള്ള കോണുകളും ഒന്നുതന്നെയാണ്. മുകളിലെ കോൺ $120°$ ആയതിനാൽ, മറ്റു രണ്ടു കോണുകളുടെ തുക $60°$; അവ തുല്യമായതിനാൽ ഓരോന്നും $30°$.

മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്ന് താഴത്തെ വശത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം മുകളിലെ കോണിനെ തുല്യമായി മുറിക്കുമല്ലോ (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **തുല്യത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **സമപാർശ്വ ത്രികോണങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

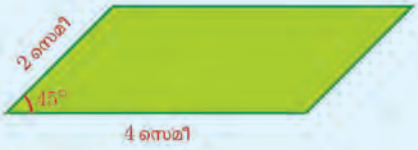


ഇനി ഈ ലംബത്തിന്റെ നീളവും ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കാമല്ലോ.



അപ്പോൾ ത്രികോണപ്പരപ്പ് $2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

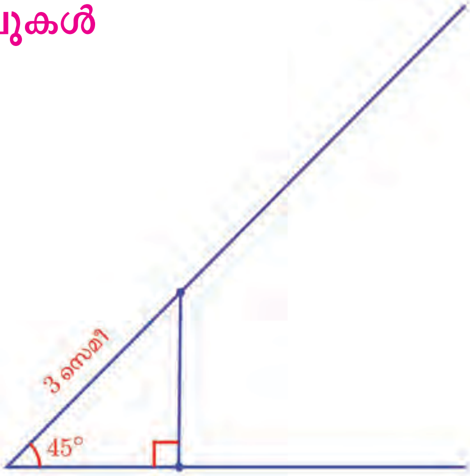
(1) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സാമാന്തരികങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.



(2) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ പരപ്പളവ് കാണുക.

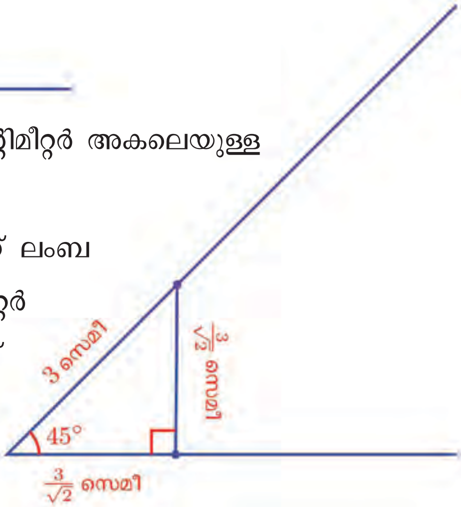
പുതിയ കോണളവുകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

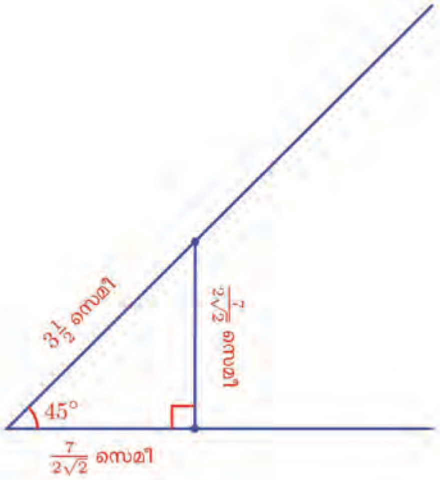


45° കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ, മൂലയിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെയുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്ന്, മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ ലംബത്തിന്റെ ഉയരവും, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലവും $\frac{3}{\sqrt{2}}$ സെന്റിമീറ്റർ ആണെന്ന് കഴിഞ്ഞ ഭാഗത്തിലെ കണക്കുകളിൽ നിന്ന് കാണാമല്ലോ.

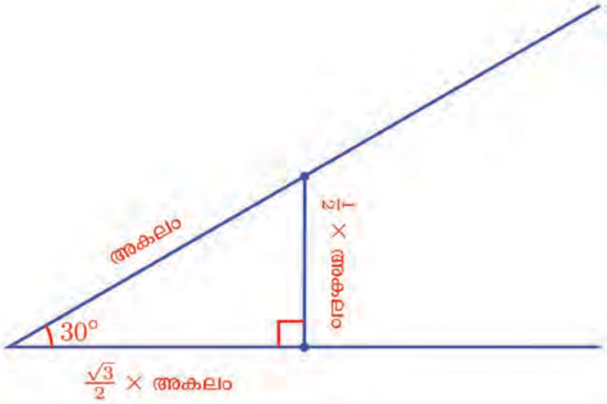


ആദ്യം എടുത്ത ബിന്ദു, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് $3\frac{1}{2}$ സെന്റിമീറ്റർ അകലെയാണെങ്കിലോ ?

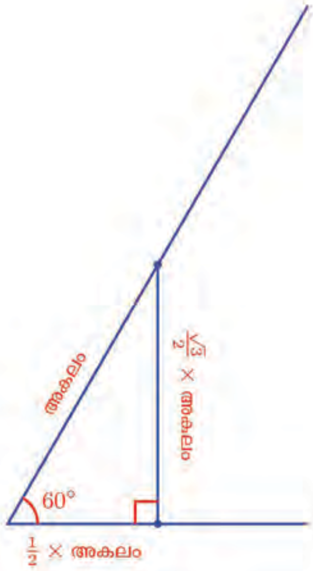


പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ ആദ്യത്തെ ബിന്ദു കോണിന്റെ ഒരു വശത്ത് ഏത് അകലത്തിൽ എടുത്താലും, മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ഉയരവും, മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലവും, ആദ്യമെടുത്ത അകലത്തിന്റെ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ഭാഗം തന്നെ ആയിരിക്കും.

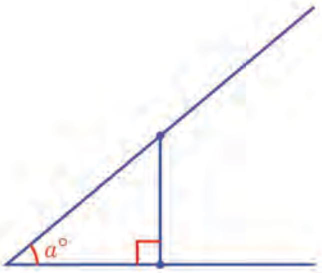
45° കോണിനു പകരം, 30° കോൺ ആയാലോ ?

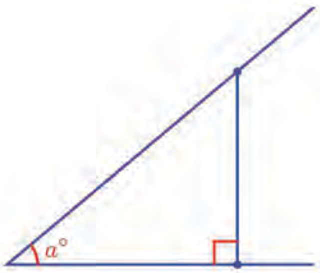


60° കോൺ ആയാലോ ?



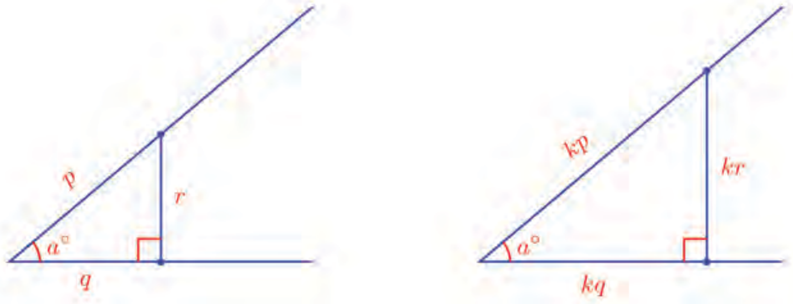
മറ്റു കോണുകൾ എടുത്താലും, ഇതുപോലെ ലംബത്തിന്റെ ഉയരവും, മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലവും, ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ നിശ്ചിത ഭാഗം തന്നെ ആയിരിക്കുമോ ? ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:





ഒരു കോണിന്റെ ഒരു വശത്ത്, മൂലയിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്ത അകലങ്ങളിൽ, രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെടുത്ത്, അവയിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകളെല്ലാം തുല്യമായതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്. അപ്പോൾ ഇടത്തെ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളം വലുപ്പക്രമത്തിൽ p, q, r എന്നെടുത്താൽ, വലത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഇതേ ക്രമത്തിൽ, p, q, r ഇവയെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്. ഈ സംഖ്യ k എന്നെടുത്താൽ, വലത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം kp, kq, kr:



ഇടത്തെ ത്രികോണത്തിൽ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, മൂലയിൽനിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ $\frac{r}{p}$ ഭാഗവും, മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലം, ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ $\frac{q}{p}$ ഭാഗവും ആണല്ലോ.

വലത്തെ ത്രികോണത്തിലോ ?

ഈ ഭാഗങ്ങൾ $\frac{kr}{kp} = \frac{r}{p}$ യും $\frac{kq}{kp} = \frac{q}{p}$ യും

അതായത്, ഈ ഭാഗങ്ങൾ മാറുന്നില്ല.

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

> ഒരു കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ, മൂലയിൽ നിന്ന് പല അകലത്തിൽ ബിന്ദുക്കൾ എടുത്താൽ, ആ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ ഉയരവും, മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബങ്ങളുടെ ചുവടുകളിലേയ്ക്കുള്ള അകലവും മാറും; പക്ഷേ ഇവ ഓരോന്നും ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് എന്നത് മാറുന്നില്ല.

$45°$, $60°$, $30°$ എന്നീ കോണുകളിൽ ഈ ഭാഗങ്ങൾ കണക്കാക്കിയല്ലോ; മറ്റു കോണുകളിൽ ഇവ കണക്കാക്കുന്നത് അത്ര എളുപ്പമല്ല. എന്നാൽ വളരെക്കാലം മുമ്പുതന്നെ ഗണിതകാരന്മാർ $90°$ യേക്കാൾ കുറവായ എല്ലാ കോണുകളിലും ഈ ഭാഗങ്ങൾ കണക്കാക്കാനുള്ള മാർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയും, അങ്ങനെ കണക്കാക്കിയ സംഖ്യകൾ പട്ടികയാക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി, $40°$ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, മൂലയിൽ നിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ ഏകദേശം 0.6428 ഭാഗമാണ് എന്നും, മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലം, ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ 0.7660 ഭാഗമാണ് എന്നും ഈ പട്ടികകളിൽ നിന്നു കാണാം.

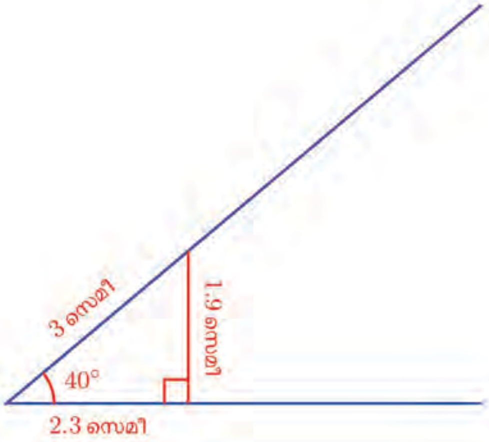
അപ്പോൾ 40° കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ, മൂലയിൽ നിന്ന് 3 സെന്റിമീറ്റർ അകലെ ഒരു ബിന്ദുവെടുത്ത്, മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരച്ചാൽ, ഈ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം

$$3 \times 0.6428 \approx 1.9 \text{ സെമീ}$$

എന്നും, മൂലയിൽനിന്ന് ഈ ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലം ഏകദേശം

$$3 \times 0.7660 \approx 2.3 \text{ സെമീ}$$

എന്നും കാണക്കാക്കാം.



ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലം 3 മീറ്ററാണെങ്കിൽ, ലംബത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 1 മീറ്റർ, 928 മില്ലി മീറ്റർ എന്നും, മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലം ഏകദേശം 2 മീറ്റർ, 298 മില്ലി മീറ്റർ എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കുന്ന സംഖ്യകൾക്ക് പ്രത്യേക പേരുകളുമുണ്ട്. ഇപ്പോൾ കണ്ട കണക്കിൽ, 0.6428... എന്ന സംഖ്യ, 40° കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, മൂലയിൽ നിന്ന് ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയാണല്ലോ. ഇതിനെ **40° കോണിന്റെ സൈൻ (Sine of 40°)** എന്നാണ് പറയുന്നത്; ചുരുക്കി sin 40° എന്നെഴുതും. അതായത്

$$\sin 40° \approx 0.6428$$

രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയായ 0.7660... എന്നത്, 40° കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേക്കുള്ള അകലം, ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ **40° യുടെ കോസൈൻ (Cosine of 40°)** എന്നു പറയുകയും, cos 40° എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുകയും ചെയ്യും. അതായത്

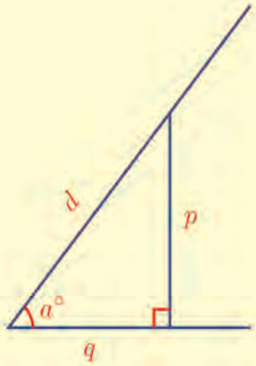
$$\cos 40° \approx 0.7660$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

$a°$ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിൽ, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് d അകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ഉയരം p യും, കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലം q യും ആണെങ്കിൽ,

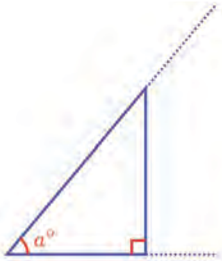
$$\sin a° = \frac{p}{d}$$

$$\cos a° = \frac{q}{d}$$



ഇതിൽ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട കാര്യം, കോണിന്റെ ഒരു വശത്ത് പല ബിന്ദുക്കളെടുക്കുമ്പോൾ $d, p. q$ എന്നീ സംഖ്യകളെല്ലാം മാറും; പക്ഷേ $\sin a°$, $\cos a°$ എന്നീ സംഖ്യകൾ മാറില്ല. കോണിന്റെ വലുപ്പമായ $a°$ മാറിയാൽ മാത്രമേ ഇവ മാറുകയുള്ളൂ. അതായത്, ഇവ കോണിന്റെ വലുപ്പത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളാണ്.

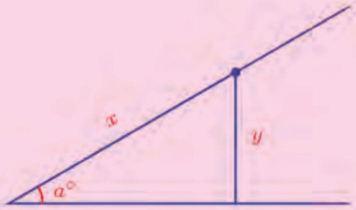
sin, cos ഇവയെ അല്പം വ്യത്യസ്തമായ മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. ആ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുമ്പോൾ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ.



കോണിന്റെ മൂലയും, ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയാണ് ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം. ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബം, ത്രികോണത്തിൽ $a°$ കോണിന്റെ **എതിർവശമാണ് (Opposite side);** കോണിന്റെ മൂലയും ലംബത്തിന്റെ ചുവടും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ, ത്രികോണത്തിൽ $a°$ കോണിന്റെ **സമീപവശം (Adjacent side)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ $\sin a°$, $\cos a°$ ഇവയെ ഇങ്ങനെ പറയാം:

അനുപാതം

ഒരു കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ബിന്ദുക്കളെല്ലാമെടുത്താൽ മറ്റെ വശത്തിൽ നിന്നുള്ള ഉയരം മാറുന്നത് കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്നുള്ള അകലം മാറുന്നതിനനുസരിച്ചാണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ.



(**അനുപാതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **ആനുപാതിക മാറ്റം** എന്ന ഭാഗം).

ഈ മാറ്റത്തിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരം എന്താണ് ? $\frac{y}{x}$ നെയാണല്ലോ, $\sin a°$ എന്നു പറയുന്നത്.

അതായത്, അകലം മാറുന്നതനുസരിച്ച് ഉയരം മാറുന്നതിലെ ആനുപാതികസ്ഥിരമാണ് $\sin a°$

ഇതുപോലെ $\cos a°$ യേയും മറ്റൊരു മാറ്റത്തിന്റെ ആനുപാതികസ്ഥിരമായി പറയാമോ ?

ഒരു കോൺ $a°$ ആയ മട്ടത്രികോണത്തിൽ,

$$\sin a° = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$$

$$\cos a° = \frac{\text{സമീപവശം}}{\text{കർണ്ണം}}$$

ആദ്യത്തെ ഭാഗത്ത്, ഒരു കോൺ 45°, 60°, 30° എന്നിങ്ങനെയായ മട്ടത്രികോണങ്ങളെക്കുറിച്ചു കണ്ട കാര്യങ്ങൾ sin, cos ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

കോൺ	ചിത്രം	സൈൻ	കോസൈൻ
30°		$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$

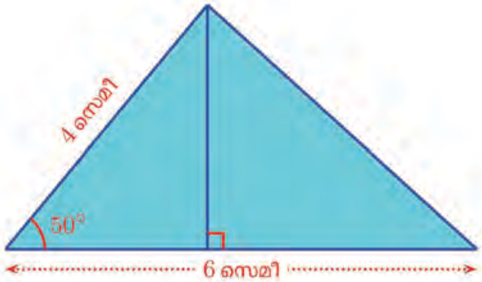
(1° മുതൽ 89° വരെ 1° ഇടവിട്ടുള്ള കോണുകളു ടെയെല്ലാം സൈനും കോസൈനും നാലു ദശാംശ സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് കൃത്യമായി പാഠത്തിന്റെ അവസാ നമുള്ള പട്ടികയിലുണ്ട്).

ആദ്യഭാഗത്ത് ചെയ്തപോലെ, പരപ്പളവുകൾ കണക്കാക്കാൻ സൈൻ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാം:

ജിയോജിബ്രയിൽ, നീളം 1 ആയി AB എന്ന വര വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle സ്ലൈഡർ *a* ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി *a* എന്ന് കൊടുക്കുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' കിട്ടും. AB' യോജിപ്പിക്കുക. B യിലൂടെ AB' ന് ലംബം വരച്ച് അത് AB' മായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം ABC വരച്ചതിനു ശേഷം AB' മറച്ചുവയ്ക്കാം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. കോണളവ് മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് കാണാമല്ലോ. ഇതിൽ BC യുടെ നീളം കോണളവിന്റെ sin അളവും AC യുടെ നീളം cos അളവുമാണ് (എന്തുകൊണ്ട്?). ഇതുപയോഗിച്ച് sine, cosine അളവുകളുടെ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക. sine, cosine സംഖ്യകൾ പരമാവധി എത്രവരെയാകാം?

അതിന് മുകളിലെ മൂലയിൽനിന്നു ലംബം വരയ്ക്കാം:



കോണുകളുടെ സൈൻ, കോസൈൻ എന്നിവ കാണാൻ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിക്കാം. Input Bar ൽ sin (30°) എന്നു കൊടുത്താൽ sin 30° കിട്ടും. ഇതു പോലെ കോസൈൻ സംഖ്യകളും കാണാം. (30° എന്നത് ലഭിക്കാൻ 30 എന്നു ടൈപ്പ് ചെയ്ത ശേഷം Input Bar ന്റെ വലത്തെ അറ്റത്തുള്ള α ചിഹ്നത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ° എന്നതിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി).

ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, താഴത്തെ വശത്തിന്റെയും ഈ ലംബത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ.

ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

ചിത്രത്തിൽ ഇടതുവശത്തുള്ള മട്ടത്രികോണത്തിൽ, 50° കോണിന്റെ എതിർവശമാണല്ലോ ഈ ലംബം; എതിർവശത്തിന്റെ നീളത്തെ കർണ്ണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത് sin 50°; അപ്പോൾ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം,

കർണ്ണത്തിനെ sin 50° കൊണ്ടു ഗുണിച്ചത്.

അതായത് $4 \times \sin 50°$

ഇനി പട്ടികയിൽ നിന്ന്

$$\sin 50° \approx 0.7660$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ

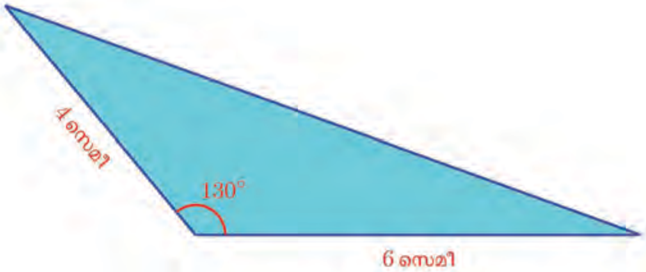
$$\text{ഉയരം} \approx 4 \times 0.7660 = 3.064$$

ഇനി പരപ്പളവ് കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ

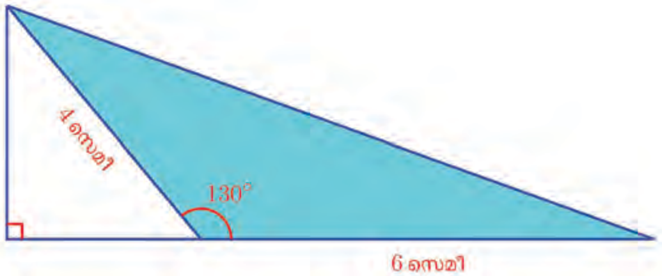
$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3.064 \approx 9.19$$

അതായത്, പരപ്പളവ് ഏകദേശം 9.19 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ.

ഈ കണക്കിൽ, ത്രികോണത്തിലെ കോൺ 50° ക്കു പകരം 130° ആക്കിയാലോ ?



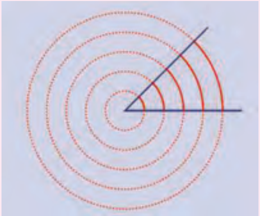
ഇതിൽ മുകളിലെ മൂലയിൽ നിന്നുള്ള ലംബം, ത്രികോണത്തിനു പുറത്താണ്.



ഡിഗ്രി അളവ്

ഒരു കോണിന്റെ അളവ് 45° എന്നാൽ എന്താണർഥം?

ഈ അളവുള്ള ഒരു കോണിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി പലപല വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാം; അവയിലെല്ലാം ഈ കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപങ്ങളുടെ നീളവും പലതാണ്;



പക്ഷേ ഈ ചാപങ്ങളോരോന്നും അതതു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{8}$ ഭാഗമാണെന്നതിൽ മാറ്റമില്ല. ഈ $\frac{1}{8}$ നെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് 45.

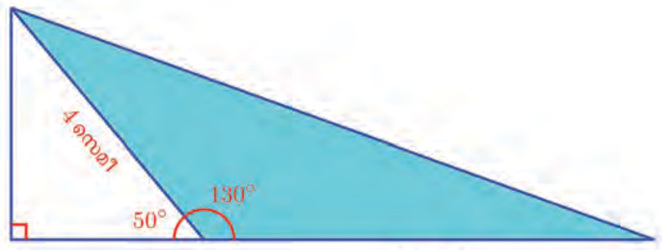
കോണിന്റെ അളവ് 60° ആയാലോ?

ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന ഏതു വൃത്തത്തിന്റെയും $\frac{1}{6}$ ഭാഗമാണ് കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുക. അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാണ് 60.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഏതു കോണിന്റെയും ഡിഗ്രി അളവ് എന്നത് അതിന്റെ ശീർഷം കേന്ദ്രമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിൽ, കോണിനുള്ളിൽപ്പെടുന്ന ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെ മൊത്തം വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവുകൊണ്ടു ഹരിച്ച്, 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയാണ്.

ഈ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

നമ്മുടെ ത്രികോണത്തിനു പുറത്തുള്ള മട്ടത്രികോണത്തിലെ ഒരു കോൺ 50° ആണല്ലോ; അതിന്റെ എതിർവശമാണ് നമുക്കു വേണ്ട ലംബം.



അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ, ലംബത്തിന്റെ ഉയരം $4 \sin 50° \approx 4 \times 0.766 = 3.064$ സെന്റിമീറ്റർ തന്നെയാണ്. പരപ്പളവും ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3.064 \approx 9.19 \text{ ചസെമീ}$$

(1) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും 10 സെന്റിമീറ്ററും; അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 40°.

(i) ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(ii) ഇതേ വശങ്ങളും, അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 140° യും ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

(2) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 5 സെന്റിമീറ്ററും, അതിലെ ഒരു കോൺ 100° യുമാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 8 സെന്റിമീറ്ററും, 12 സെന്റിമീറ്ററും ആണ്; അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ 50° യും. അതിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(4) ഒരു വശം 8 സെന്റിമീറ്ററും, അതിൽ ഒരു കോൺ 40° യും ആയി ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കണം. ഈ 40° കോണിനെതിരെയുള്ള വശത്തിന്റെ നീളം ചുരുങ്ങിയത് എത്ര സെന്റിമീറ്റർ ആകണം ?

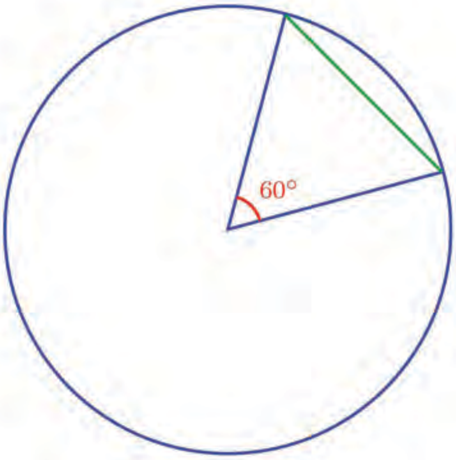
(5) വശം 5 സെന്റിമീറ്ററും ഒരു കോൺ 70° യും ആയ സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

ത്രികോണവും വൃത്തവും

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളം, കേന്ദ്രകോൺ ഉപയോഗിച്ചു കണക്കാക്കാം എന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ (ഒൻപതാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തഭാഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **നീളവും കോണും** എന്ന ഭാഗം).

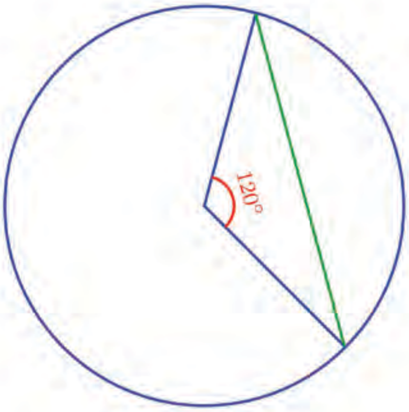
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണിന്റെ നീളം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

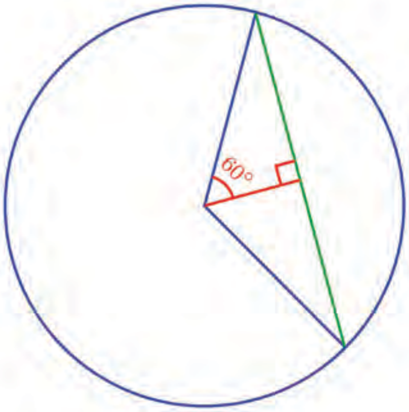
ഉദാഹരണമായി, കേന്ദ്രകോൺ 60° ആയ ഞാണിന്റെ നീളം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിനു തുല്യമാണെന്ന് എളുപ്പം കാണാം (എങ്ങനെ ?).



കേന്ദ്രകോൺ 120° ആയ ഞാണിന്റെ നീളമോ ?

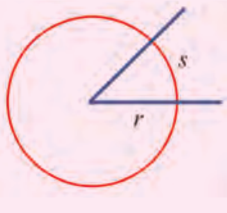
ഇതു കണക്കാക്കാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് ഞാണിലേക്കുള്ള ലംബം വരയ്ക്കാം. ഇത് ഞാണിനെയും കേന്ദ്രകോണിനെയും സമഭാഗം ചെയ്യുമല്ലോ (കാരണം ?).





കോണിനു മറ്റൊരളവ്

ഒരു കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവെന്നാൽ എന്താണെന്നു കണ്ടല്ലോ: ഒരു കോണിന്റെ മൂല കേന്ദ്രമാക്കി പല വലുപ്പത്തിലുള്ള



വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചാൽ അവയുടെ ചുറ്റളവും കോണിനുള്ളിലെ ചാപത്തിന്റെ നീളവും മാറുമെങ്കിലും വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് ചാപമെന്നത് മാറുന്നില്ല. അതായത്, ചിത്രത്തിലെ s ഉം r ഉം മാറുമെങ്കിലും, $\frac{s}{2\pi r}$ മാറുന്നില്ലെന്നും, അതിനെ 360 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് ഡിഗ്രി അളവെന്നും പറഞ്ഞു. അതായത്, കോണിന്റെ ഡിഗ്രി അളവ് $= \frac{s}{2\pi r} \times 360$. ഇതിലെ s, r ഇവ മാറിയാലും 2π, 360 എന്നീ സംഖ്യകൾ മാറുന്നില്ലല്ലോ. അപ്പോൾ കോണളക്കാൻ $\frac{s}{r}$ എടുത്താൽപ്പോരേ ?

ഈ അളവിനെയാണ് കോണിന്റെ **റേഡിയൻ (Radian)** അളവ് എന്നു പറയുന്നത്. അതായത്, മുകളിലെ ചിത്രത്തിൽ,

കോണിന്റെ റേഡിയൻ അളവ് $= \frac{s}{r}$.

ഡിഗ്രി അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ° എന്ന ചിഹ്നമാണല്ലോ ഉപയോഗിക്കുന്നത്. റേഡിയൻ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ **rad** എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

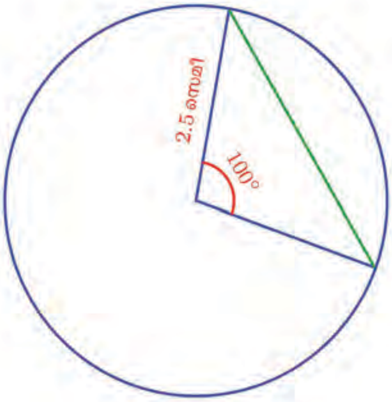
ഈ ആശയം ആദ്യമായി അവതരിപ്പിച്ചത് പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന റോജർ കോട്സ് (Roger Cotes) എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനാണ്. റേഡിയൻ എന്ന പേരു കൊടുത്തത്, പത്തൊമ്പതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ജെയിംസ് തോംസൺ (James Thomson) എന്ന ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞനും.

ആരവും ഞാണിന്റെ പകുതിയും ലംബവും ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം, വൃത്തത്തിന്റെ ആരം; 60° കോണിന്റെ എതിർവശം, ഞാണിന്റെ പകുതി.

അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ പകുതി, ആരത്തിന്റെ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ഭാഗം എന്നു കാണാമല്ലോ.

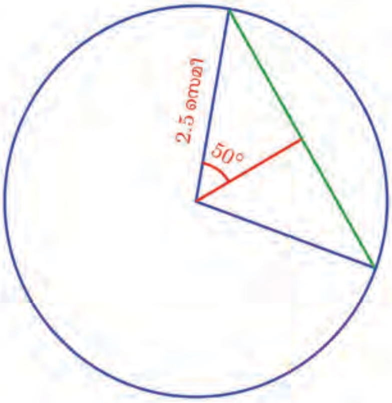
ഞാണിന്റെ നീളം, ആരത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങ്.

കേന്ദ്രകോൺ ഇരട്ടിക്കുമ്പോൾ ചാപവും ഇരട്ടിക്കും എന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. പക്ഷേ, ഞാൺ ഇരട്ടിക്കുന്നില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. അതായത്, കേന്ദ്രകോൺ മാറുന്നതിന്റെ തോതിലല്ല, ഞാണിന്റെ നീളം മാറുന്നത്.



ഇനി ഈ ചിത്രത്തിലെ ഞാണിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ഞാണിലേക്കു ലംബം വരച്ച്, കേന്ദ്രകോണിനെയും ഞാണിനെയും പകുതിയാക്കാം;



ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം 2.5 സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ 50° കോണിന്റെ എതിർവശം 2.5 × sin 50° സെന്റിമീറ്റർ

ഇത് ഞാണിന്റെ പകുതിയാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഞാണിന്റെ നീളം

$$5 \times \sin 50° \approx 5 \times 0.7660 \approx 3.8 \text{ സെമീ}$$

ഏതു ഞാണിന്റെയും നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

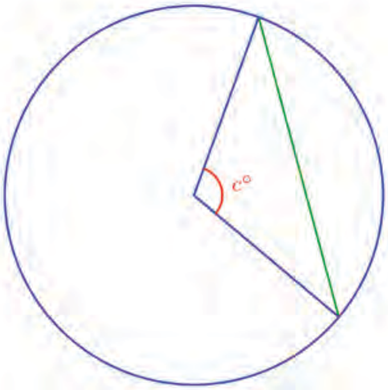
ഞാണിന്റെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എന്തെല്ലാമാണു ചെയ്തത് ?

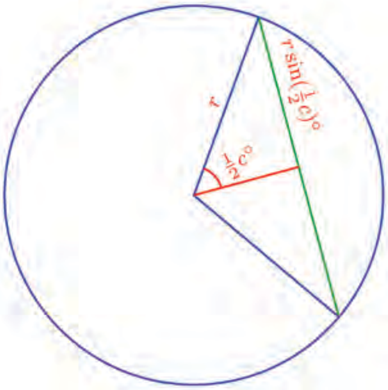
നേർവഴി

ഡിഗ്രി അളവായാലും, റേഡിയൻ അളവായാലും, കോണിന്റെ വലുപ്പം സൂചിപ്പിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഒരു ചാപത്തിന്റെ നീളത്തെയാണല്ലോ. അതിനുപകരം ഞാണിന്റെ നീളം ഉപയോഗിച്ചുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളാണ്, ബി.സി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗ്രീസിലെ ഹിപ്പാർക്കസ് (Hipparchus) എന്ന വാനശാസ്ത്രജ്ഞൻ നടത്തിയത്.

വ്യത്യസ്ത കേന്ദ്രകോണുകളുള്ള ഞാണുകളുടെ നീളങ്ങൾ കാണിക്കുന്ന ഒരു വലിയ പട്ടിക ഇദ്ദേഹം എഴുതിയിട്ടുള്ളതായി പിൽക്കാലത്തെ പല ഗണിതകാരന്മാരും പറയുന്നുണ്ടെങ്കിലും, അതു കണ്ടു കിട്ടിയിട്ടില്ല. എ.ഡി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിൽ, ഈജിപ്റ്റിലെ ക്ലോഡിയസ് ടോളമി (Caludius Ptolemy) ഇത്തരത്തിൽ ഒരു പട്ടിക ഉണ്ടാക്കിയത് കിട്ടിയിട്ടുണ്ട്. ഇതിൽ, ആരം 60 ആയ ഒരു വൃത്തത്തിൽ $\frac{1}{2}^{\circ}$ ഇടവിട്ട്, 180° വരെയുള്ള കേന്ദ്രകോൺ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഞാണുകളുടെ നീളം വളരെ കൃത്യമായി അദ്ദേഹം കണക്കുകൂട്ടിയിട്ടുണ്ട്.

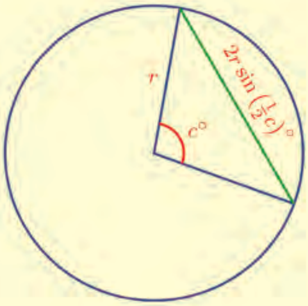
കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോൾ, ഞാണിന്റെ പകുതി കിട്ടി. അതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങെടുത്തപ്പോൾ മുഴുവൻ ഞാണും കിട്ടി.





അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

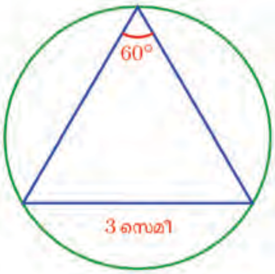
ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏതു ഞാണിന്റെയും നീളം, കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയുടെ സൈനിനെ ആരംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്



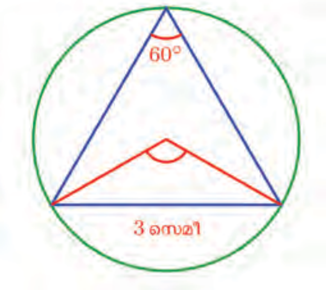
ഉദാഹരണമായി ഈ കണക്കു നോക്കുക:

വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 3 സെന്റിമീറ്റർ ആയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ് ?

ചിത്രം നോക്കൂ:



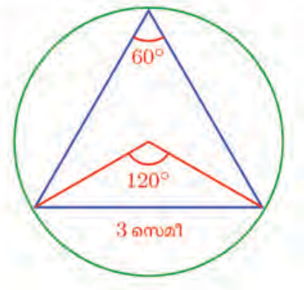
ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതു വശവും, പരിവൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണാണ്; അതിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ എന്താണ് ?



ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ രണ്ടു മൂലകൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ തന്നെയാണല്ലോ, താഴത്തെ വശമായ ഞാണിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ.

വൃത്തത്തിലെ ഈ ചാപത്തിൽ അല്ലാത്ത ഒരു ബിന്ദുവാണ് ത്രികോണത്തിന്റെ മേൽമൂല.

അപ്പോൾ **വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചാപവും കോണും** എന്ന ഭാഗത്തിലെ തത്വമനുസരിച്ച്, ചാപത്തിന്റെ (ഞാണിന്റെയും) കേന്ദ്രകോൺ, $60° \times 2 = 120°$



മുകളിൽ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ഈ വശത്തിന്റെ നീളം, പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തെ $2 \sin 60°$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ്.

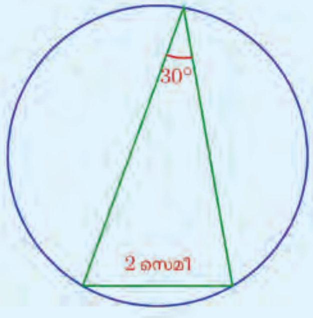
$$2 \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

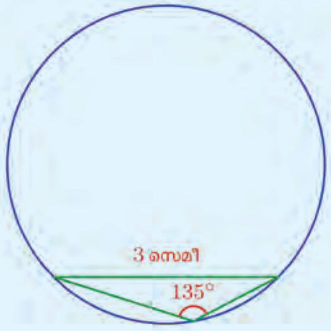
അപ്പോൾ ആരം ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$3 \div \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

പരിവൃത്തത്തിന്റെ ആരം $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ.

(1) രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും അവയുടെ പരിവൃത്തങ്ങളുമാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്:

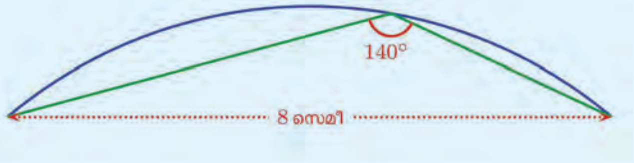




ഓരോ വൃത്തത്തിന്റെയും ആരം കണക്കാക്കുക.

(2) 5 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു വരയുടെ അറ്റങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കണം; വരയുടെ ഒരു വശത്തുള്ള വൃത്തഭാഗത്തിലെ കോൺ 80° ആയിരിക്കുകയും വേണം. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്രയായെടുക്കണം ?

(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗമാണ് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.



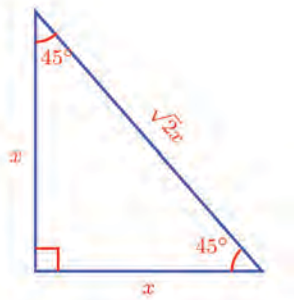
വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ് ?

വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ (**അനുപാതം** എന്ന പാഠത്തിലെ **തോതും അനുപാതവും** എന്ന ഭാഗം). മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ, വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം നിശ്ചയിക്കും.

ഉദാഹരണമായി, കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിലും രണ്ടു ചെറിയ വശങ്ങൾക്കും ഒരേ നീളമാണെന്നും, ഈ നീളത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ മടങ്ങാണ് വലിയ വശത്തിന്റെ നീളമെന്നും ഈ പാഠത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ കണ്ടല്ലോ.

അതായത് ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം 1, 1, $\sqrt{2}$ എന്നീ സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

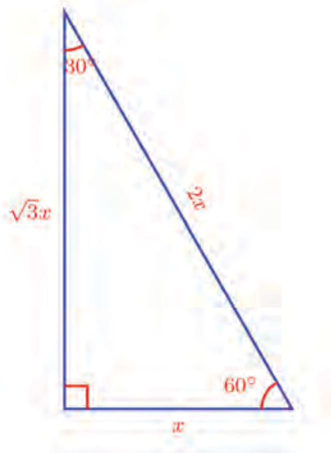


മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ,

> കോണുകൾ 45°, 45°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം 1 : 1 : $\sqrt{2}$ ആണ്.

ഇതുപോലെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങാണ് ഇടത്തരം വശം എന്നും, ഏറ്റവും ചെറിയ വശത്തിന്റെ 2 മടങ്ങാണ് ഏറ്റവും വലിയ വശം എന്നും കണ്ടല്ലോ.

അതായത് ഇത്തരം ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം $1, \sqrt{3}, 2$ എന്നീ സംഖ്യകളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്.

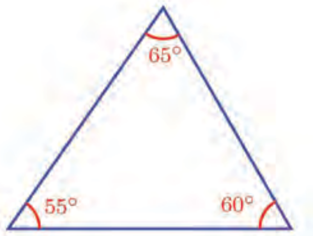


ഇതും വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധമായി പറയാം:

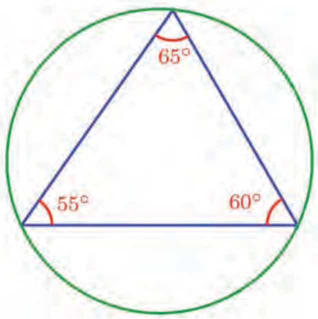
> കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ഏതു ത്രികോണത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം $1 : \sqrt{3} : 2$ ആണ്.

മറ്റു ത്രികോണങ്ങളിൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം കണക്കാക്കാൻ കോണുകളുടെ സൈൻ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഈ ത്രികോണം നോക്കൂ:



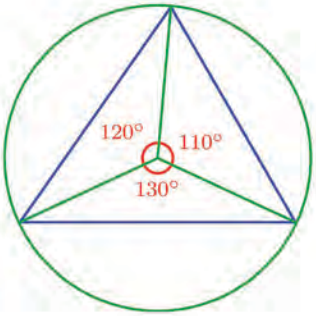
ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരച്ചാൽ, വശങ്ങളെല്ലാം വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകളാകുമല്ലോ.



ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലായാൽ അതിന്റെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയിരിക്കുമോ ? ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിച്ച് നോക്കാം.

ആദ്യം വശങ്ങൾ $1 : \sqrt{3} : 2$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാം. ഇതിനായി Min = 0 വരത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ a ഉണ്ടാക്കുക. Segment with Given Length ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബിന്ദുവിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ വരയുടെ നീളം a*sqrt(3) എന്ന് നൽകുക ($a\sqrt{3}$ എന്നാണിതിനർഥം). ഈ വരയുടെ ഒരറ്റം കേന്ദ്രമായി ആരം a ആയ ഒരു വൃത്തവും മറ്റേ അറ്റം കേന്ദ്രമായി ആരം 2a ആയ മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വരയുടെ അറ്റങ്ങളും മൂലകളായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. a മാറ്റി നോക്കൂ. കോണുകൾക്ക് എന്തു സംഭവിക്കുന്നു. ഇതേ രീതിയിൽ, വശങ്ങൾ $2 : \sqrt{5}+1 : \sqrt{5}+1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വരത്തക്കവിധം ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് കോണുകൾ അളന്ന് നോക്കൂ.

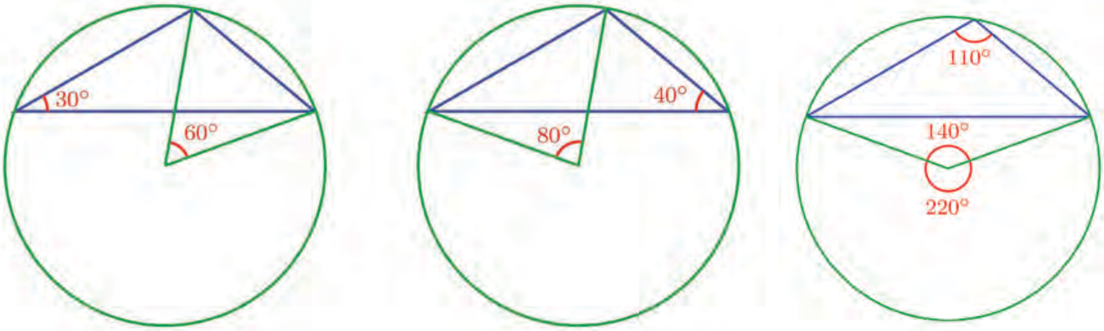
ഓരോ ഞാണിന്റെയും കേന്ദ്രകോൺ, ത്രികോണത്തിൽ അതിനെതിരെയുള്ള കോണിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങുമാണ് (**വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും** എന്ന പാഠത്തിലെ **ചാപവും കോണും** എന്ന ഭാഗം).



അപ്പോൾ, പരിവൃത്ത ആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഞാണുകളുടെ നീളം $2r \sin 55°$, $2r \sin 60°$, $2r \sin 65°$; ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $\sin 55° : \sin 60° : \sin 65°$. പട്ടികയിൽ നിന്ന് ഇവ കണ്ടുപിടിക്കുകയുമാകാം. ഇതിൽ 55°, 60°, 65° എന്നത് ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തന്നെയാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ത്രികോണം ഇങ്ങനെയായാലോ ?

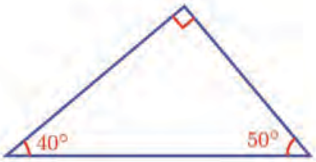
പരിവൃത്തവും, ഞാണുകളായ വശങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളും ഇങ്ങനെയാകും:



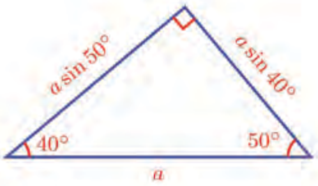
അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ കണക്കിലെപ്പോലെ പരിവൃത്തആരം r എന്നെടുത്താൽ, ഞാണുകളുടെ, അഥവാ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം $2r \sin 30°$, $2r \sin 40°$, $2r \sin 70°$ എന്നിങ്ങനെയാകും; അംശബന്ധം $\sin 30° : \sin 40° : \sin 70°$

ഇതിൽ 30°, 40° എന്നിവ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു കോണുകളും, 70° എന്നത്, 180° ൽ നിന്ന് മൂന്നാമത്തെ കോണായ 110° കുറച്ചതും ആണെന്നു ശ്രദ്ധിക്കുക.

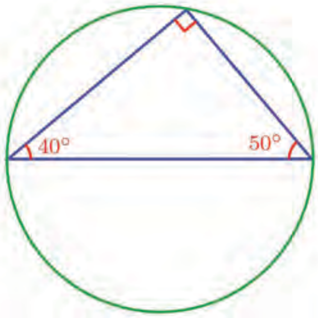
ഇനി മട്ടത്രികോണമായാലോ ?



ഇതിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം a എന്നെടുത്താൽ, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ



പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും a തന്നെ എന്നും കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

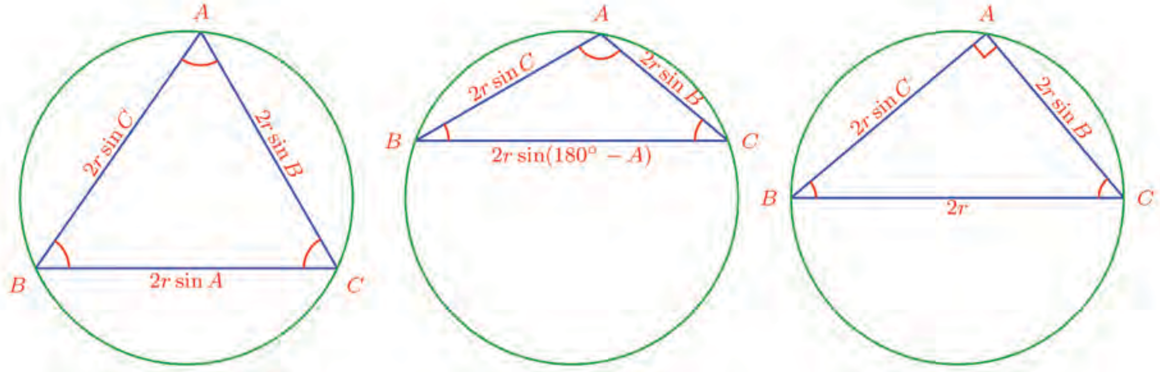


(ഒൻപതാം ക്ലാസിലെ **സമാന്തരവരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണ കേന്ദ്രങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗത്തിന്റെ അവസാനമുള്ള കണക്കുകളിൽ 1(iii)).

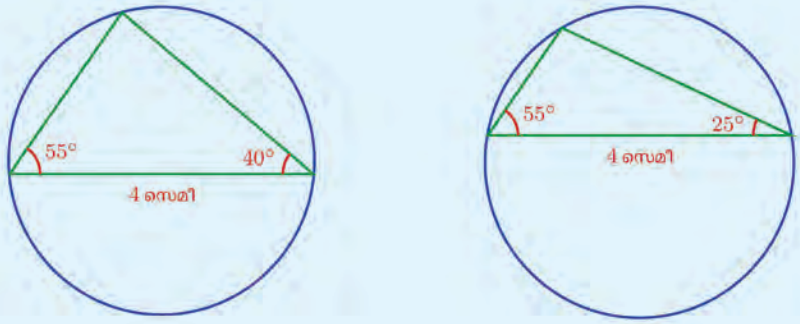
ഇവിടെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം

$1 : \sin 40° : \sin 50°$ എന്നതും ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിലെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധവും ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇപ്പോൾ ഈ അംശബന്ധം കണക്കാക്കാനുള്ള വഴിയുമായി.



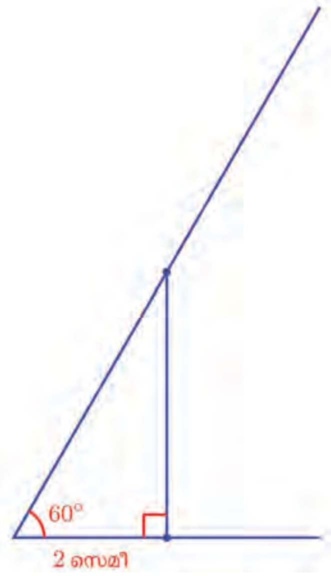
ചിത്രങ്ങളിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും അവയുടെ പരിവൃത്തങ്ങളും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



സൈൻ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച്, രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെയും വ്യാസവും, രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും മറ്റു വശങ്ങളുടെ നീളവും മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

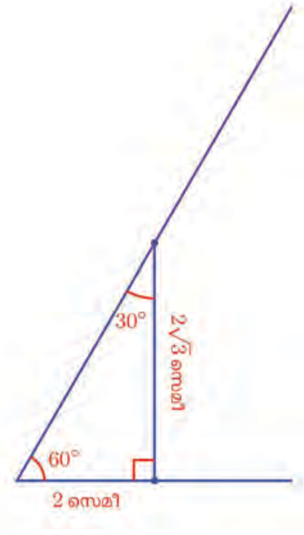
മറ്റൊരളവ്

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



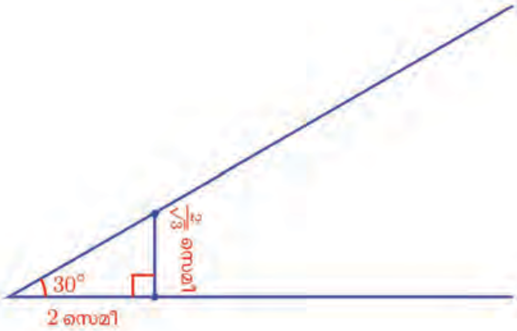
ഇതിലെ ലംബത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ്?

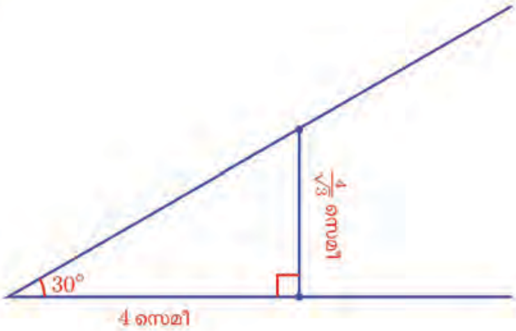
ചിത്രത്തിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആണല്ലോ. ഏറ്റവും ചെറിയ വശം 2 സെന്റിമീറ്റർ. അപ്പോൾ ഇടത്തരം വശം $2\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ. ഇതുതന്നെയാണ് ലംബത്തിന്റെ ഉയരവും:



ഇനി ഈ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഏതു ബിന്ദു എടുത്ത് മറ്റേ വശത്തിനു ലംബം വരച്ചാലും, ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ $\sqrt{3}$ മടങ്ങു തന്നെ ആയിരിക്കുമല്ലോ.

30° കോണെടുത്താലോ ?





ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ഭാഗം.

45° കോൺ ആയാലോ ?

ഇങ്ങനെ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് മറ്റേ വശത്തേക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ ഉയരം, കോണിന്റെ മൂലയിൽ നിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലത്തിന്റെ എത്ര മടങ്ങ്, അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗം, ആണെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയെ കോണിന്റെ **ടാൻജെന്റ് (Tangent)** എന്നു പറയുകയും, **tan** എന്നു ചുരുക്കി എഴുതുകയും ചെയ്യും. അപ്പോൾ മുകളിൽ കണ്ട ഉദാഹരണങ്ങളിൽ

$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

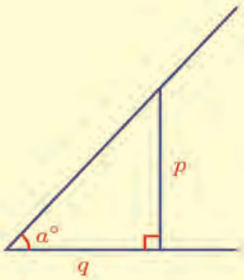
$$\tan 45° = 1$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

സൈൻ, കോസൈൻ പോലെ ജിയോജിബ്ര ഉപയോഗിച്ച് ടാൻ കാണുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം. നീളം 1 ആയി AB എന്ന വരയും B യിലൂടെ AB യ്ക്ക് ലംബവും വരയ്ക്കുക. ഒരു Angle Slider, a ഉണ്ടാക്കുക. Angle with Given Size ഉപയോഗിച്ച് B, A ഇവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി a എന്നു കൊടുക്കുക. പുതിയ ഒരു ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. A, B' ഇവയിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വര വരച്ച് അത് B യിൽ വരച്ച ലംബവുമായി കൂട്ടി മുട്ടുന്ന ബിന്ദു C അടയാളപ്പെടുത്തുക. ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇനി ആവശ്യമില്ലാത്ത വരകളും ബിന്ദുക്കളും മറച്ച് വയ്ക്കാം. BC യുടെ നീളം അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇത് കോൺ A യുടെ ടാൻ അളവാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?). ടാൻ അളവ് എത്രവരെയാകാം ?

$a°$ കോണിന്റെ ഒരു വശത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്ന് മറ്റേ വശത്തേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ ഉയരം p യും, കോണിന്റെ മൂലയിൽനിന്ന് ലംബത്തിന്റെ ചുവടിലേയ്ക്കുള്ള അകലം q യും ആണെങ്കിൽ,

$$\tan a° = \frac{p}{q}$$



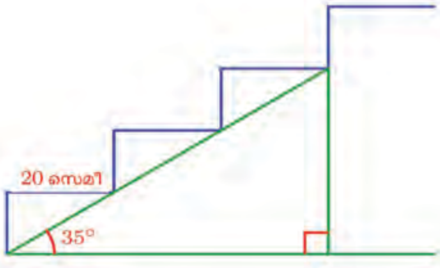
sin, cos ഇവയെപ്പോലെ tan നെയും മട്ടത്രികോണം ഉപയോഗിച്ചു പറയാം:

ഒരു കോൺ $a°$ ആയ മട്ടത്രികോണത്തിൽ,

$$\tan a° = \frac{\text{എതിർവശം}}{\text{സമീപവശം}}$$

കോണിന്റെ ടാൻ അളവുപയോഗിക്കുന്ന ഒരു സന്ദർഭം നോക്കാം.

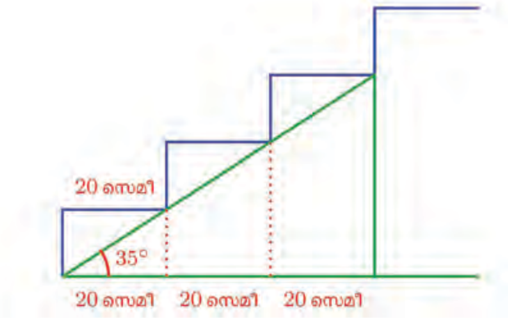
ഒരു പടിക്കെട്ടിന്റെ അളവുകൾ ഇങ്ങനെയാണ്:



മൂന്നാമത്തെ പടി എത്ര ഉയരത്തിലാണെന്നു കണക്കാക്കണം.

ചിത്രത്തിലെ മട്ടത്രികോണത്തിൽ 35° കോണിന്റെ എതിർ വശമാണ് കണക്കാക്കേണ്ടത്. അതിന് സമീപവശത്തിനെ tan 35° കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

സമീപവശം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ? ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



അപ്പോൾ മൂന്നാം പടിയുടെ ഉയരം, $60 \times \tan 35°$ സെന്റിമീറ്റർ.

പട്ടികയിൽ നിന്ന്

$$\tan 35° \approx 0.7002$$

എന്നു കാണാം.

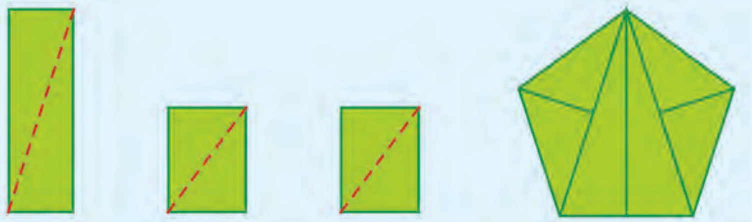
ഉയരം ഏകദേശം

$$60 \times 0.7002 = 42.012 \approx 42 \text{ സെമീ}$$

(1) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 50° ആണ്; ചെറിയ വികർണ്ണം 6 സെന്റിമീറ്ററും. അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

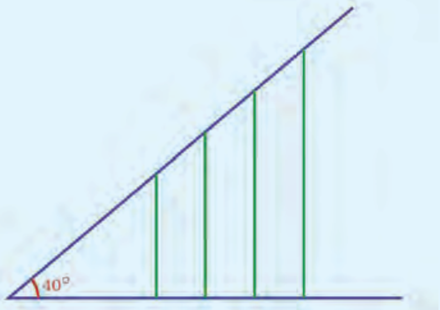
(2) മതിലിന്മേൽ ഒരു ഏണി ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണിയുടെ ചുവട് മതിലിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ അകലെയാണ്; ഏണിയും തറയുമായുള്ള കോൺ 40° യും. ഏണിയുടെ മുകളറ്റം, തറയിൽനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ് ?

(3) മൂന്നു ചതുരങ്ങൾ വികർണ്ണത്തിലൂടെ മുറിച്ചു ത്രികോണങ്ങളാക്കി, ചുവടെക്കാണുന്നതു പോലെ ചേർത്തുവച്ച്, ഒരു സമപഞ്ചഭുജമുണ്ടാക്കണം:



പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 30 സെന്റിമീറ്റർ ആകണമെങ്കിൽ ചതുരങ്ങളുടെ നീളവും വീതിയും എത്രയായിരിക്കണം ?

(4) ചിത്രത്തിലെ കുത്തനെയുള്ള വരകൾ ഒരു സെന്റിമീറ്റർ അകലം ഇടവിട്ടാണ് വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

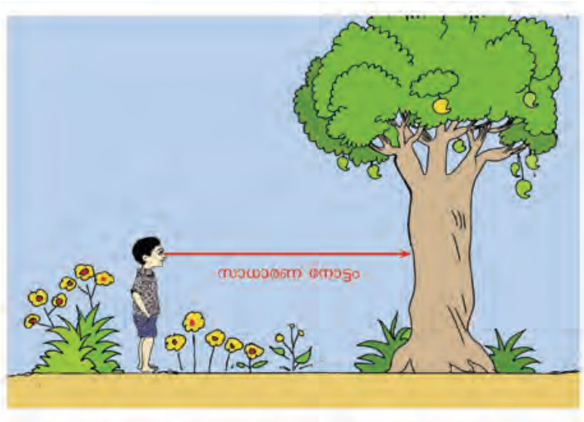


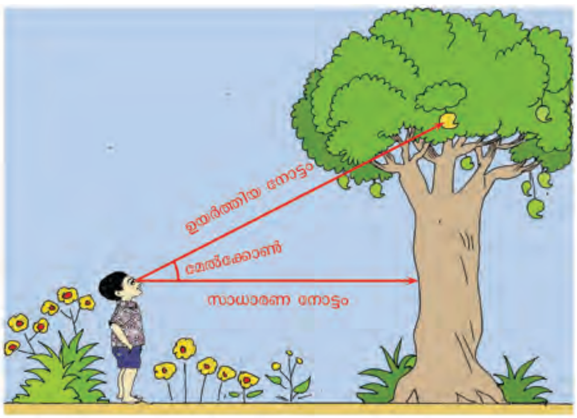
അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ സമാന്തരശ്രേണിയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക. പൊതുവ്യത്യാസം എത്രയാണ് ?

(5) വശം 10 സെന്റിമീറ്ററായ സമപഞ്ചഭുജത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളും

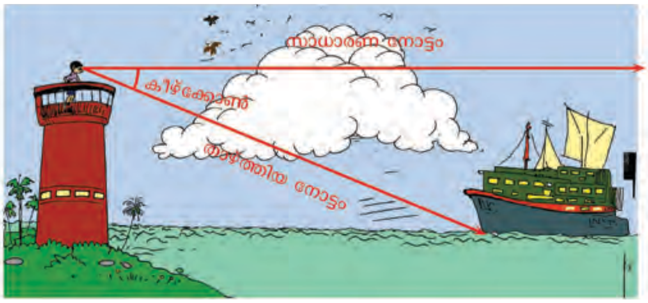
നമ്മേക്കാൾ ഉയരത്തിലുള്ളവ കാണാൻ, തല അല്പം ഉയർത്തണമല്ലോ; ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:





സാധാരണയായി നമ്മുടെ നോട്ടത്തിന്റെ പാത നിലത്തിനു സമാന്തരമാണ്; ഉയരത്തിലുള്ളവയെ നോക്കുമ്പോൾ, ഇത് മേൽപ്പോട്ടുയരും. ഈ രണ്ടു വരകൾ തമ്മിലുള്ള കോണിനെ **മേൽക്കോൺ (Angle of elevation)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

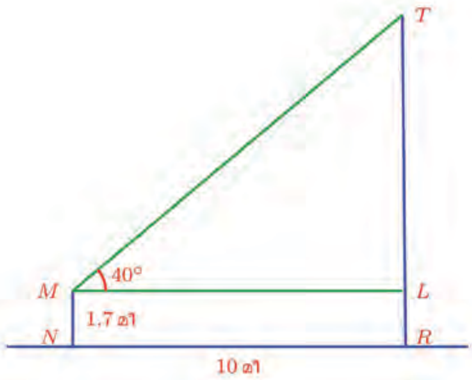
ഇതുപോലെ ഉയരത്തിൽ നിൽക്കുമ്പോൾ താഴെയുള്ളവയെ കാണാൻ, നോട്ടം താഴ്ത്തേണ്ടി വരുമല്ലോ;



ഇങ്ങനെയുണ്ടാകുന്ന കോണിനെ **കീഴ്ക്കോൺ (Angle of depression)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇത്തരം കോണുകൾ അളക്കുന്നത് **ക്ലൈനോമീറ്റർ (Clinometer)** എന്ന ഉപകരണം ഉപയോഗിച്ചാണ്. നേരിട്ടളക്കാൻ കഴിയാത്ത അകലങ്ങളും ഉയരങ്ങളുമെല്ലാം ക്ലൈനോമീറ്ററുപയോഗിച്ചു കോണളന്നും, ടാൻ ഉപയോഗിച്ചു കണക്കുകൂട്ടിയുമാണ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്.

ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം:

ഒരു മരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് 10 മീറ്റർ അകലെ നിൽക്കുന്ന ഒരാൾ, മരത്തിന് മുകളറ്റം 40° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു, അയാളുടെ ഉയരം 1.7 മീറ്ററാണ്. മരത്തിന് എന്തു പൊക്കമുണ്ട് ?



ചിത്രത്തിൽ MN എന്ന വര നോക്കുന്ന ആളിനേയും, TR മരത്തിനെയുമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ചിത്രത്തിൽനിന്ന് (പട്ടികയും ഉപയോഗിച്ച്),

$$\tan 40° = \frac{TL}{ML}$$

$$TL = ML \tan 40° \approx 10 \times 0.8391 = 8.391$$

എന്നു കാണാം. അപ്പോൾ

$$TR = TL + LR = TL + MN = 8.391 + 1.7 = 10.091$$

$$TR \approx 10.09$$

അതായത് മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 10.09 മീറ്ററാണ്.

ക്ലൈനോമീറ്റർ

മേൽക്കോണും കീഴ്ക്കോണും അളക്കാനുള്ള ക്ലൈനോമീറ്റർ എന്ന ഉപകരണത്തിന്റെ ഒരു ലഘുരൂപം നമുക്കും ഉണ്ടാക്കാം.

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു കോൺമാപിനിയുടെ നേർഭാഗത്ത് ഒരു കുഴൽ ഉറപ്പിക്കുക. ഇതിൽ നിന്ന്, കോൺമാപിനിയുടെ നടുക്കുകൂടി വലിഞ്ഞു കിടക്കുന്നതരത്തിൽ, അറ്റത്ത് ഒരു ചെറിയ ഭാരം തൂക്കിയ ചരട് കെട്ടിയിടുക.

ഒരു മരത്തിന്റെയോ കെട്ടിടത്തിന്റെയോ മുകളറ്റം, കുഴലിലൂടെ നോക്കാൻ കോൺമാപിനി ചരിച്ചുയർത്തണം. താഴത്തെ ഭാരം കാരണം, ചരട് അപ്പോഴും തറയ്ക്കു ലംബമായിരിക്കും. ചരടിനും കോൺമാപിനിയിലെ 90° വരയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണാണ്, ഈ നോട്ടത്തിന്റെ മേൽക്കോൺ.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

1.8 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ 25 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ മുകളിൽനിന്ന് നോക്കിയപ്പോൾ, 35° കീഴ്ക്കോണിൽ ഒരു ബോട്ട് കണ്ടു. അത് ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണ്?

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:

ഇതിൽ LH ലൈറ്റ്ഹൗസും, ML അതിനു മുകളിൽ നിൽക്കുന്നയാളുമാണ്. S ആണു ബോട്ട്. കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് HS.

പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളനുസരിച്ച്

$$MH = ML + LH = 25 + 1.8 = 26.8$$

കൂടാതെ $\angle HMS = 55°$

അപ്പോൾ MHS എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

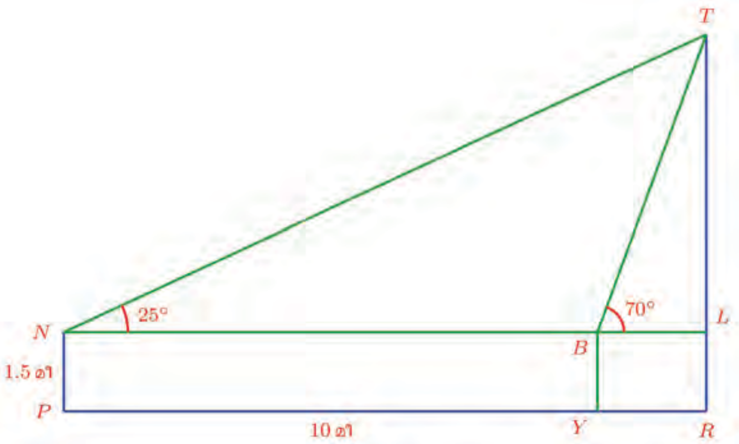
$$HS = MH \tan 55° \approx 26.8 \times 1.4281 \approx 38.27$$

അതായത്, ലൈറ്റ്ഹൗസിന്റെ ചുവട്ടിൽനിന്ന് ഏകദേശം 38.27 മീറ്റർ അകലെയാണ് ബോട്ട്.

ഒരു കണക്കു കൂടി:

ഒരു തോട്ടിനരികത്തു നിൽക്കുന്ന കുട്ടി, അക്കരയോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 70° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 10 മീറ്റർ പുറകോട്ടു മാറി നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 25° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുട്ടിയുടെ ഉയരം 1.5 മീറ്റർ. തോടിന്റെ വീതിയും, മരത്തിന്റെ ഉയരവും കണക്കാക്കണം.

ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ TR മരം, BY കുട്ടി ആദ്യം നിന്ന സ്ഥാനം, NP കുട്ടിയുടെ പുതിയ സ്ഥാനം.



കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്, YR ഉം, TR ഉം.

ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$YR = BL \qquad TR = TL + LR = TL + 1.5$

ആയതിനാൽ, BL ഉം TL ഉം കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി.

$$BL = x \quad TL = y$$

എന്നെടുത്താൽ BTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$y = x \tan 70° \approx 2.7475x$$

എന്നും, NTL എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽനിന്ന്

$$y = (x + 10) \tan 25° \approx 0.4663(x + 10) = 0.4663x + 4.663$$

എന്നും കിട്ടും. അപ്പോൾ

$$2.7475x \approx 0.4663x + 4.663$$

എന്നാകുമല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന്

$$x \approx \frac{4.663}{2.2812} \approx 2.044$$

എന്ന് (കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച്) കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതുപയോഗിച്ച്

$$y \approx 2.7475 \times 2.044 \approx 5.616$$

എന്നും കാണം. അതായത്, തോടിന്റെ വീതി ഏകദേശം 2.04 മീറ്ററും, മരത്തിന്റെ ഉയരം ഏകദേശം 5.62 + 1.5 = 7.12 മീറ്ററുമാണ്.

(1) സൂര്യൻ 40° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ, ഒരു മരത്തിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 18 മീറ്ററാണ്.

(i) മരത്തിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ് ?

(ii) സൂര്യൻ 80° മേൽക്കോണിൽ കാണപ്പെടുമ്പോൾ, നിഴലിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും ?

(2) ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ മുകളിൽ നിന്നും ഒരാൾ 30 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കടയുടെ ചുവട് 25° കീഴ്ക്കോണിൽ കാണുന്നു. കെട്ടിടത്തിന്റെ ഉയരം കണക്കാക്കുക.

(3) ഒരു വൈദ്യുതിത്തൂണിന്റെ മുകളറ്റത്തുനിന്ന് രണ്ട് ഇരുമ്പു കമ്പികൾ ഇരുവശത്തേക്കും വലിച്ച് തറയിൽ ഉറപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തറയുമായി ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ 55° യും 40° യും ആണ്; കമ്പികളുടെ ചുവടുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 25 മീറ്ററും. തൂണിന്റെ ഉയരം എത്രയാണ് ?

(4) ഒരു ഗോപുരത്തിന്റെ ചുവട്ടിൽ നിൽക്കുന്ന 1.75 മീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരാൾ, 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള ഒരു കുന്നിന്റെ മുകളറ്റം 60° മേൽക്കോണിൽ കാണുന്നു. ഗോപുരത്തിന്റെ മുകളിൽനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 50° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുന്നിന്റെയും, ഗോപുരത്തിന്റെയും ഉയരം കണക്കാക്കുക.

(5) ഒരു തോട്ടിനരികത്തു നിൽക്കുന്ന കുട്ടി, അക്കരയോടു ചേർന്നു നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 80° മേൽക്കോണിൽ കണ്ടു. 15 മീറ്റർ പുറകോട്ടു മാറി നോക്കിയപ്പോൾ, അത് 40° മേൽക്കോണിലാണ് കണ്ടത്. കുട്ടിയുടെ ഉയരം 1.5 മീറ്റർ. തോടിന്റെ വീതിയും, മരത്തിന്റെ ഉയരവും കണക്കാക്കുക.

ത്രികോണമിതി അളവുകൾ

കോൺ	sin	cos	tan
1	0.0175	0.9998	0.0175
2	0.0349	0.9994	0.0349
3	0.0523	0.9986	0.0524
4	0.0698	0.9976	0.0699
5	0.0872	0.9962	0.0875
6	0.1045	0.9945	0.1051
7	0.1219	0.9925	0.1228
8	0.1392	0.9903	0.1405
9	0.1564	0.9877	0.1584
10	0.1736	0.9848	0.1763
11	0.1908	0.9816	0.1944
12	0.2079	0.9781	0.2126
13	0.2250	0.9744	0.2309
14	0.2419	0.9703	0.2493
15	0.2588	0.9659	0.2679
16	0.2756	0.9613	0.2867
17	0.2924	0.9563	0.3057
18	0.3090	0.9511	0.3249
19	0.3256	0.9455	0.3443
20	0.3420	0.9397	0.364
21	0.3584	0.9336	0.3839
22	0.3746	0.9272	0.404
23	0.3907	0.9205	0.4245
24	0.4067	0.9135	0.4452
25	0.4226	0.9063	0.4663
26	0.4384	0.8988	0.4877
27	0.4540	0.8910	0.5095
28	0.4695	0.8829	0.5317
29	0.4848	0.8746	0.5543
30	0.5000	0.8660	0.5774
31	0.5150	0.8572	0.6009
32	0.5299	0.8480	0.6249
33	0.5446	0.8387	0.6494
34	0.5592	0.8290	0.6745
35	0.5736	0.8192	0.7002
36	0.5878	0.8090	0.7265
37	0.6018	0.7986	0.7536
38	0.6157	0.7880	0.7813
39	0.6293	0.7771	0.8098
40	0.6428	0.7660	0.8391
41	0.6561	0.7547	0.8693
42	0.6691	0.7431	0.9004
43	0.6820	0.7314	0.9325
44	0.6947	0.7193	0.9657
45	0.7071	0.7071	1.0000

കോൺ	sin	cos	tan
46	0.7193	0.6947	1.0355
47	0.7314	0.6820	1.0724
48	0.7431	0.6691	1.1106
49	0.7547	0.6561	1.1504
50	0.7660	0.6428	1.1918
51	0.7771	0.6293	1.2349
52	0.7880	0.6157	1.2799
53	0.7986	0.6018	1.3270
54	0.8090	0.5878	1.3764
55	0.8192	0.5736	1.4281
56	0.8290	0.5592	1.4826
57	0.8387	0.5446	1.5399
58	0.8480	0.5299	1.6003
59	0.8572	0.5150	1.6643
60	0.8660	0.5000	1.7321
61	0.8746	0.4848	1.8040
62	0.8829	0.4695	1.8807
63	0.8910	0.4540	1.9626
64	0.8988	0.4384	2.0503
65	0.9063	0.4226	2.1445
66	0.9135	0.4067	2.2460
67	0.9205	0.3907	2.3559
68	0.9272	0.3746	2.4751
69	0.9336	0.3584	2.6051
70	0.9397	0.3420	2.7475
71	0.9455	0.3256	2.9042
72	0.9511	0.3090	3.0777
73	0.9563	0.2924	3.2709
74	0.9613	0.2756	3.4874
75	0.9659	0.2588	3.7321
76	0.9703	0.2419	4.0108
77	0.9744	0.2250	4.3315
78	0.9781	0.2079	4.7046
79	0.9816	0.1908	5.1446
80	0.9848	0.1736	5.6713
81	0.9877	0.1564	6.3138
82	0.9903	0.1392	7.1154
83	0.9925	0.1219	8.1443
84	0.9945	0.1045	9.5144
85	0.9962	0.0872	11.4301
86	0.9976	0.0698	14.3007
87	0.9986	0.0523	19.0811
88	0.9994	0.0349	28.6363
89	0.9998	0.0175	57.2900

7 സൂചകസംഖ്യകൾ

സ്ഥാനവും സംഖ്യയും

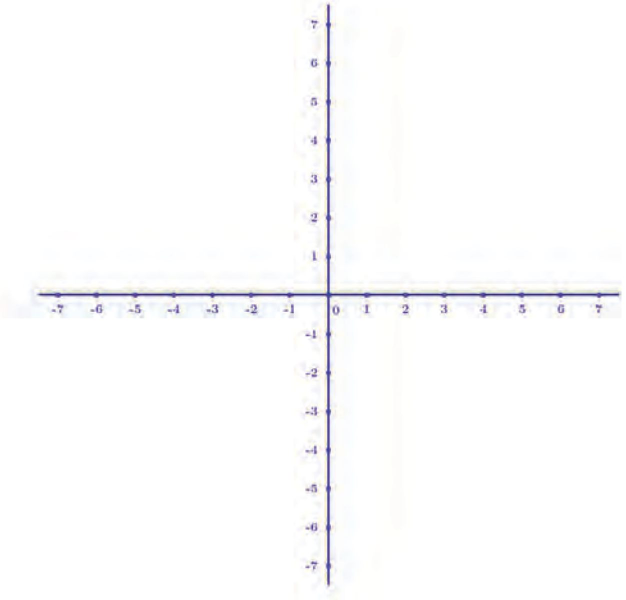
ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ വരച്ചത് ഓർമ്മയുണ്ടോ ? (**ബഹുപദചിത്രങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

ഉദാഹരണമായി $p(x) = 2x + 1$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ചത് എങ്ങനെയാണ് ?

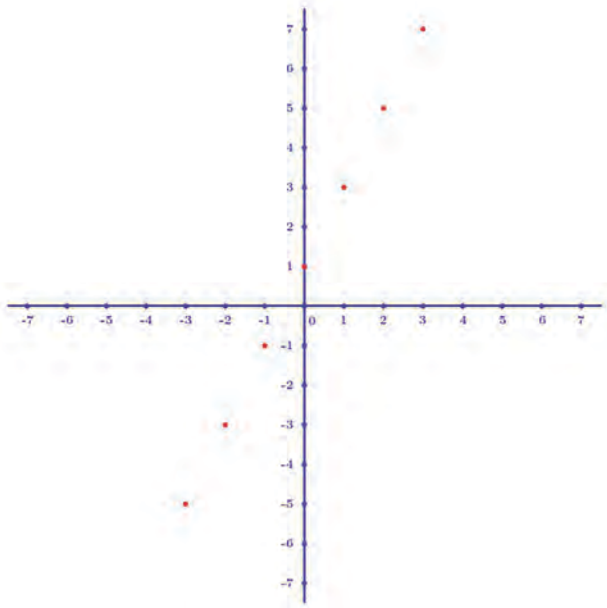
x ആയി പല സംഖ്യകളെടുത്ത്, ഓരോന്നിന്റെയും $p(x)$ കണക്കാക്കി.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$p(x)$	–5	–3	–1	1	3	5	7

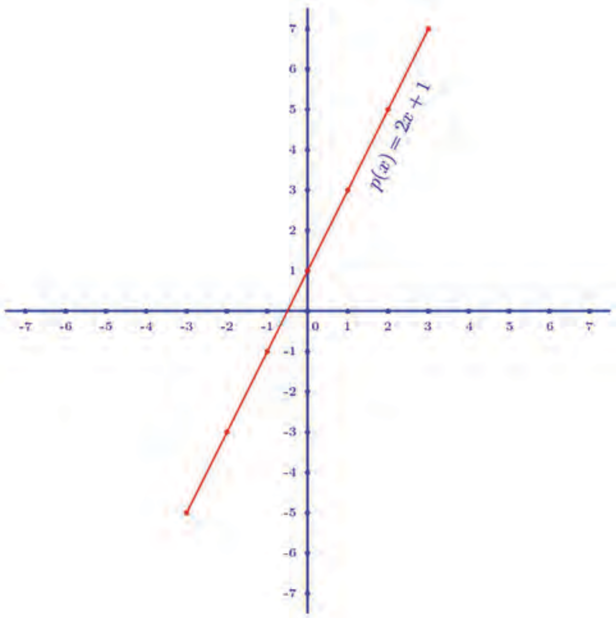
ഇവ ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായി അടയാളപ്പെടുത്താൻ, ആദ്യം വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയുമായി രണ്ടു വരകൾ വരച്ച്, അവയിൽ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ട് സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി:



തുടർന്ന്, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ x ആയി എടുത്ത ഓരോ സംഖ്യയുടെ സ്ഥാനത്തുനിന്നും $p(x)$ ആയി കിട്ടിയ സംഖ്യ ഉയരമായി ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി.

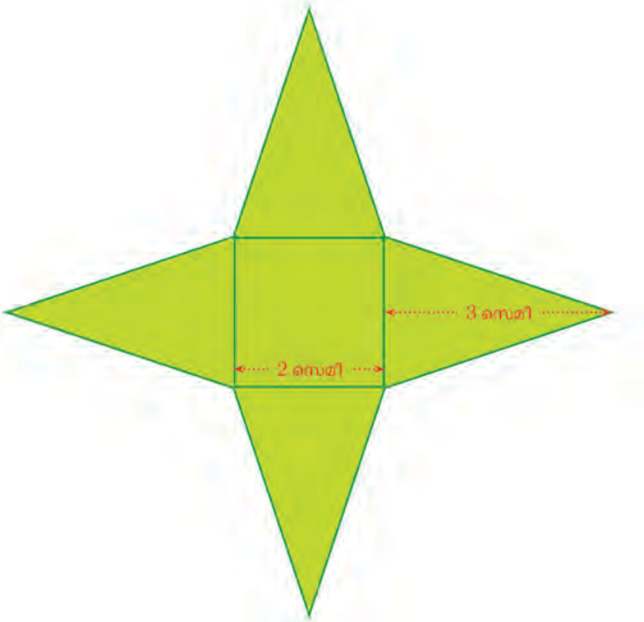


ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന വരയാണ് $p(x) = 2x + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്ര രൂപം:

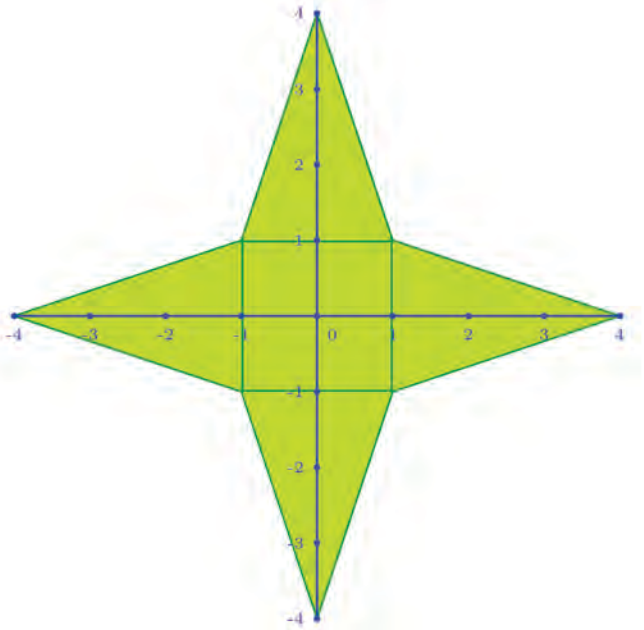


മറ്റു പല രൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കാനും ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം ഇത്തരത്തിൽ എങ്ങനെ വരയ്ക്കുമെന്നു നോക്കാം:

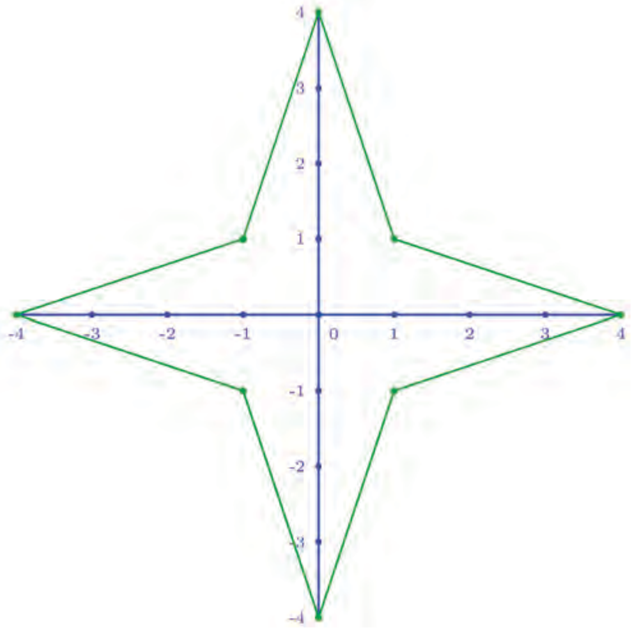


ചിത്രത്തിന്റെ നടുവിൽക്കൂടി, വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും വരകൾ വരച്ച്, 1 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ടെന്നു സങ്കല്പിക്കുക:



അപ്പോൾ വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും വരകൾ വരച്ച്, അവയിൽ 1 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ടുള്ള അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ചിത്രത്തിന്റെ എട്ടു മൂലകളും അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ; അവ യോജിപ്പിച്ചാൽ നക്ഷത്രത്തിന്റെ പുറംവരകളുമായി.

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും വരകൾ വരച്ച്, മൂലകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരച്ചുനോക്കൂ:

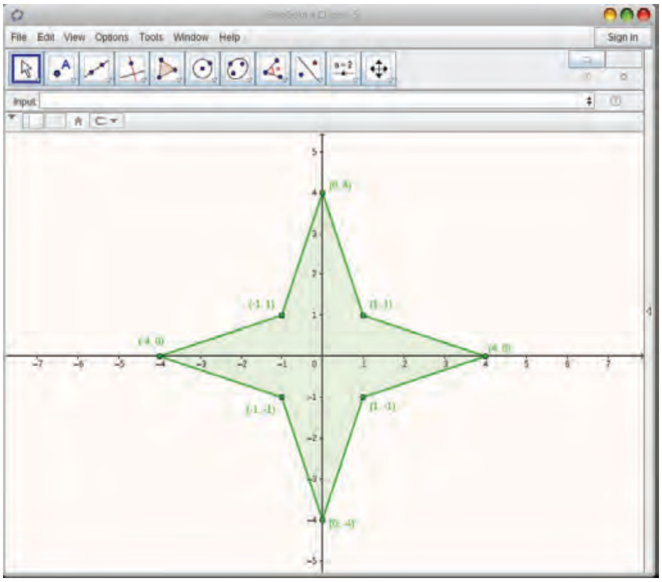


ഇനി ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ എങ്ങനെ വരയ്ക്കുമെന്നു നോക്കാം. ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ജോടിയായി ജിയോജിബ്രയിൽ സൂചിപ്പിച്ചത് ഓർമ്മയുണ്ടോ ?

ഉദാഹരണമായി, $p(x) = x^2$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $x = 0.5$ എന്നെടുക്കുമ്പോൾ $p(x) = 0.25$ ആകും. അപ്പോൾ വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ 0.5 എന്ന സ്ഥാനത്തിനു മുകളിൽ 0.25 ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദു $p(x)$ ന്റെ ചിത്രരൂപത്തിലെ ബിന്ദുവാണ്. ഇത് അടയാളപ്പെടുത്താൻ, ജിയോജിബ്രയിലെ Input ആയി (0.5, 0.25) എന്നു ടൈപ്പു ചെയ്താൽ മതി എന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദചിത്രങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

ഇതുപോലെ, മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെ വലതു മേൽമൂല, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ 1 സെന്റിമീറ്റർ അടയാളപ്പെടുത്തിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരെയാണ്. അപ്പോൾ ഈ ബിന്ദുവിനെ (1, 1) എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ.

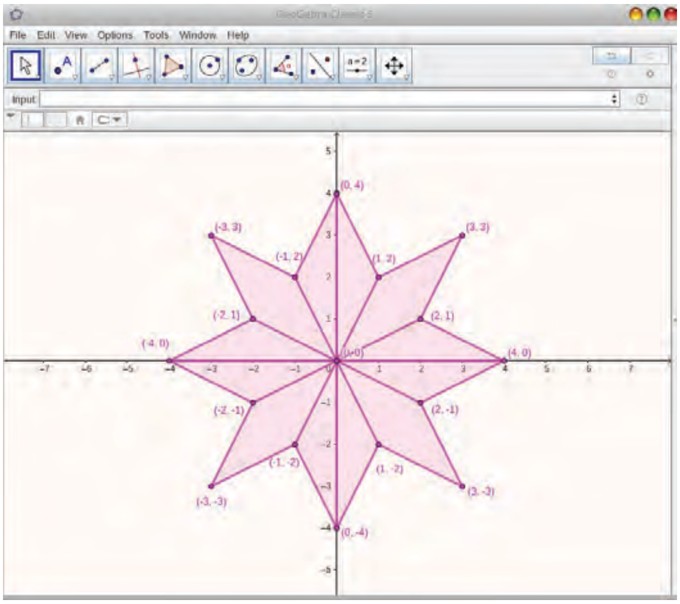
ഇതുപോലെ ചിത്രത്തിന്റെ എല്ലാ മൂലകളും അടയാളപ്പെടുത്താം:



ജിയോജിബ്രയിൽ സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് കുത്തുകളിടാൻ Input Bar ൽ അവ ഓരോന്നായി കൊടുത്താൽ മതി. ഈ കുത്തുകൾ മൂലകളായുള്ള ബഹുഭുജം വരയ്ക്കാൻ Polygon എന്നു കൊടുക്കണം. ഉദാഹരണമായി, Input Bar ൽ ഇങ്ങനെ നിർദേശം കൊടുത്തു നോക്കൂ.

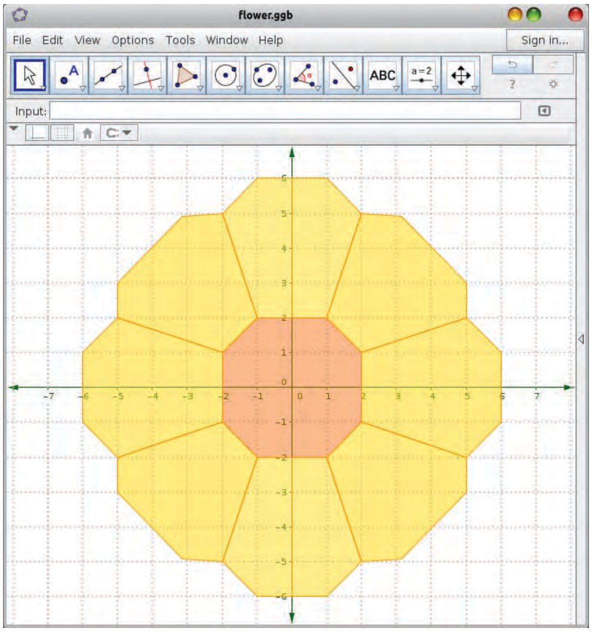
Polygon [(–1, –1), (1, –1), (1, 1), (–1, 1)]

ഇനി ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാമോ?



Geogebra തുറന്ന് Input Bar ൽ (0, 0), (4, 0), (2, 1), (3, 3), (1, 2), (0, 4) എന്നീ സംഖ്യാജോടികൾ ഓരോന്നായി Type ചെയ്ത് Enter അമർത്തുക. Polygon Tool എടുത്ത് *A, B, C, D, E, F, A* എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്രമത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ചിത്രത്തിന്റെ വലതു മുകൾ ഭാഗത്ത് കാൽ ഭാഗം പൂർത്തിയാക്കാം. Segment Tool എടുത്ത് *A, C* എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്ലിക്ക് ചെയ്തും, പിന്നീട് *A, E* എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്ലിക്ക് ചെയ്തും ഇടയിലെ രണ്ട് വരകൾ കൂടി വരയ്ക്കാം. Reflect about line എന്ന ടൂൾ എടുത്ത് ചിത്രത്തിലും തുടർന്ന് കുത്തനെയുള്ള വരയിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ചിത്രത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം ഇടത് ഭാഗത്ത് വന്നില്ലേ? ഇതുപോലെ രണ്ട് വരകളും Reflect ചെയ്യാം. ചിത്രത്തിന്റെ താഴത്തെ പകുതി കിട്ടാൻ ഇതേ ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് മുകളിലുള്ള ഓരോ ചിത്രഭാഗവും വിലങ്ങനെയുള്ള വരയും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക.

ഈ ചിത്രമായാലോ ?



മൂലകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള സൗകര്യത്തിനാണ് ഇതിൽ കളങ്ങൾ (ജിയോജിബ്രയിലെ Grid) കൂടി വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ ?

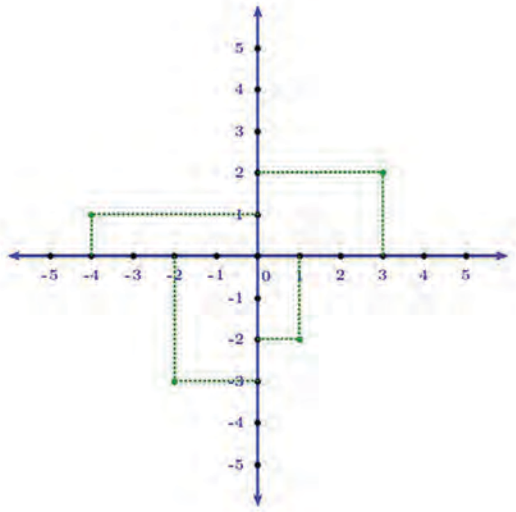
ജ്യാമിതിയും സംഖ്യകളും

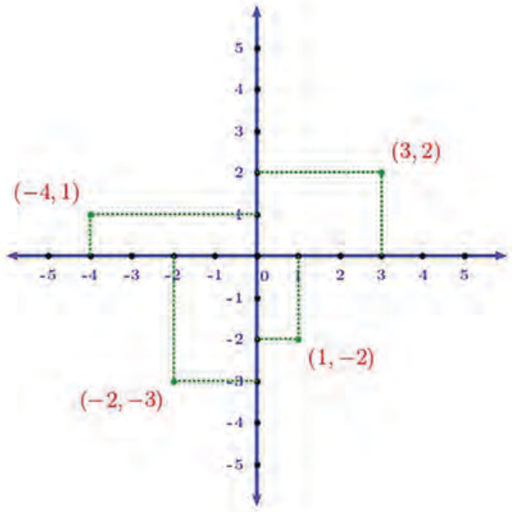
ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ച് ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി കണ്ടില്ലേ ?

വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയുമുള്ള വരകൾ ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ ഈ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുന്നത്. ഈ വരകൾക്ക്, **സൂചകാക്ഷങ്ങൾ (Axes of coordinates)** എന്നാണ് പേര്; വിലങ്ങനെയുള്ള വര ***x*-അക്ഷം (*x*-axis)**, കുത്തനെയുള്ള വര ***y*-അക്ഷം (*y*-axis)**. ഈ വരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ **ആധാരബിന്ദു (Origin)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

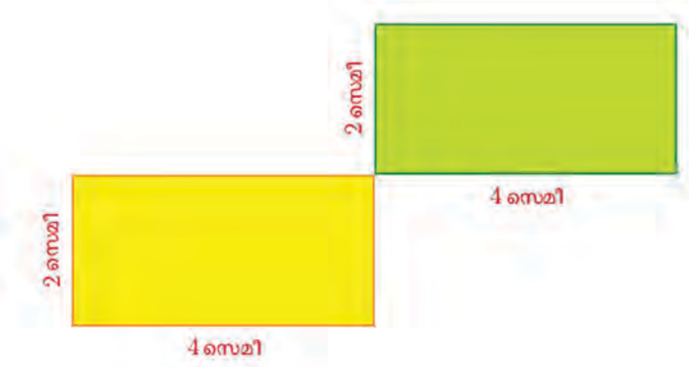
അക്ഷങ്ങൾ വരച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, നേരത്തെ കണ്ട ഉദാഹരണങ്ങളിലെപ്പോലെ, ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം സംഖ്യാജോടിയായി എഴുതാം. ഈ സംഖ്യകളെ ബിന്ദുവിന്റെ **സൂചകസംഖ്യകൾ (Coordinates)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ആദ്യത്തേത് ***x*-സൂചകസംഖ്യ (*x*-coordinate)** രണ്ടാമത്തേത് ***y*-സൂചകസംഖ്യ (*y*-coordinate)**.

ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാൻ, അക്ഷങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾ സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:

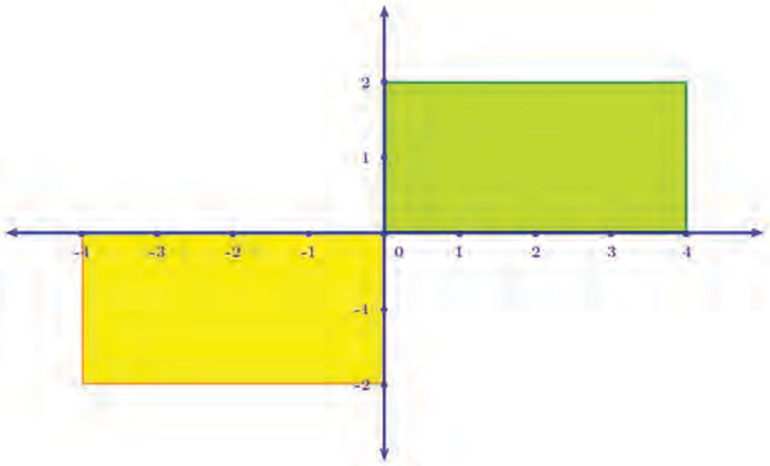




ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ, പരസ്പരം ലംബമായ ഏതു രണ്ടു വരകളും അക്ഷങ്ങളായി എടുക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

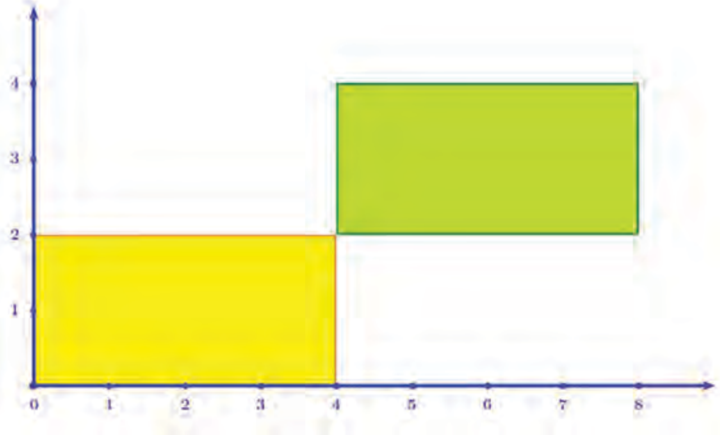


അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം:



രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടെയും മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തെല്ലാമാണ് ?

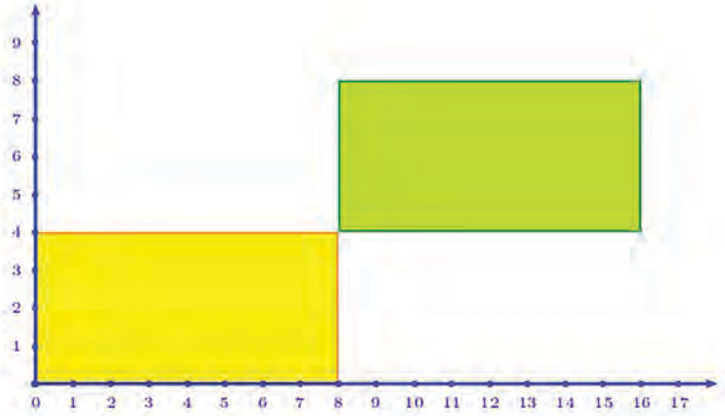
ഇനി അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരച്ചാലോ ?



ഈ അക്ഷങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തെല്ലാമാണ് ?

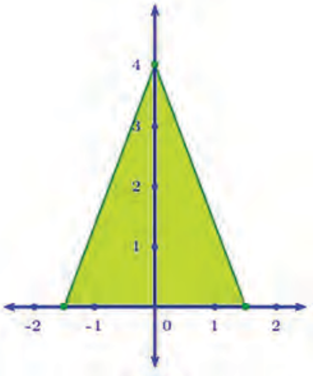
അക്ഷങ്ങളിലെ സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ഒരു സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. സൗകര്യം പോലെ ഏതകലവുമാകാം.

ഉദാഹരണമായി, അര സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് കുത്തുകളിട്ടാൽ, മുകളിലത്തെ ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും:



ഇപ്പോൾ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തായി ?

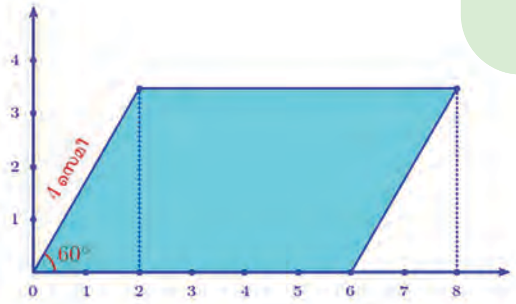
സൂചകസംഖ്യകൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളാകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, പാദം 3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു ആധാരബിന്ദുവായി, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ അക്ഷങ്ങളെടുക്കാം:



ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

ഇനി ഈ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?

അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം:



സൂചകസംഖ്യകൾ $(2, 2\sqrt{3})$ ആയ ബിന്ദു കിട്ടാൻ ജിയോജിബ്രയുടെ Input Bar ൽ (2,2sqrt (3)) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി.

കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അറിയാമല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിലെ ഇടതു മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(2, 2\sqrt{3})$.

വലതു മൂലയുടെയോ?

അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുമ്പോൾ, x-അക്ഷത്തിനെ (ഇടത്തുനിന്ന് വലത്തോട്ട്) $X'X$ എന്നും, y-അക്ഷത്തിനെ (മുകളിൽനിന്ന് താഴോട്ട്) YY' എന്നും ആണ് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. ആധാരബിന്ദുവിനെ O എന്നും.

(1) ചുവടെപ്പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) x-അക്ഷത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും y-സൂചകസംഖ്യ

(ii) y-അക്ഷത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x-സൂചകസംഖ്യ

(iii) ആധാരബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ

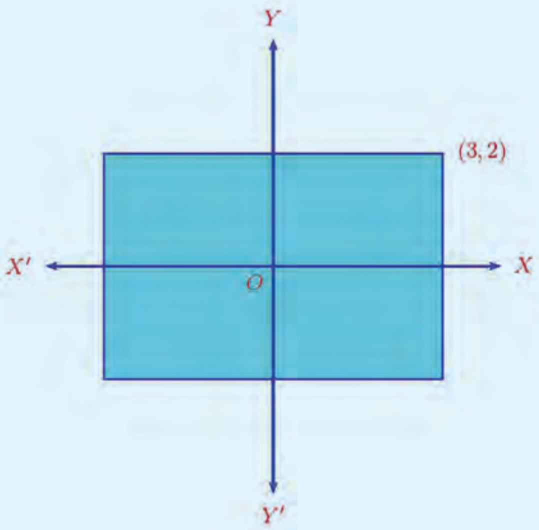
(iv) (0, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും y-സൂചകസംഖ്യ

(v) (1, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും x-സൂചകസംഖ്യ

ജിയോജിബ്രയിൽ a എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമ്മിക്കുക. Input Bar ൽ $(a, 0)$ എന്ന് നൽകുക. സ്ലൈഡർ നിരക്കി a മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത ഏതാണ്? ഇതുപോലെ $(a,2)$, $(a,1)$, $(a,-2)$, $(3,a)$, $(-2,a)$ എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് a മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഓരോ ബിന്ദുവും സഞ്ചരിക്കുന്ന പാതയുടെ പ്രത്യേകത എന്തെന്ന് നോക്കുക. ബിന്ദുവിന് Trace On കൊടുത്തു നോക്കൂ.

(2) ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക:

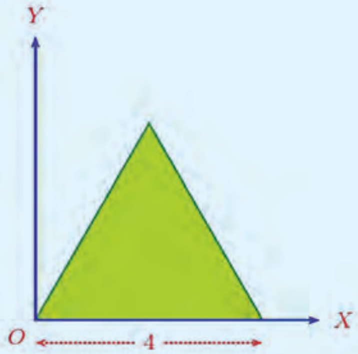
(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ആധാരബിന്ദു ചതുരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ് (വികർണ്ണങ്ങൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു).



ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെയെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.



ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ Sequence[(a,a+1),a,0,5] എന്ന് കൊടുത്തു നോക്കൂ. *a* ആയി 0 മുതൽ 5 വരെയുള്ള പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് (*a*, *a* + 1) എന്ന രൂപത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും അടയാളപ്പെടുത്താനുള്ള നിർദേശമാണിത്. അതായത് (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ.

നിർദേശങ്ങളിൽ ചെറിയ ഒരു മാറ്റം വരുത്തി Sequence[(*a*,*a*+1),*a*,0,5,0.5] എന്നാക്കി നോക്കൂ. ഇവിടെ *a* ആയി എടുക്കുന്നത് പൂജ്യത്തിൽ തുടങ്ങി 0.5 വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാകണം എന്നതാണ് അവസാനം 0.5 എന്ന് കൊടുക്കുന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. (1 വീതമാണ് കൂട്ടേണ്ടതെങ്കിൽ പ്രത്യേകിച്ച് ഒന്നും പറയേണ്ടതില്ല). അപ്പോൾ (0,1), (0.5,1.5), (1,2), ... എന്നിങ്ങനെ (5, 6) വരെയുള്ള ബിന്ദുക്കളാണ് കിട്ടുന്നത്.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ നിർദേശത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സവിശേഷതകൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

Sequence[(a,0),a,0,5,0.5]

Sequence[(a,2a),a,–3, 4,0.25]

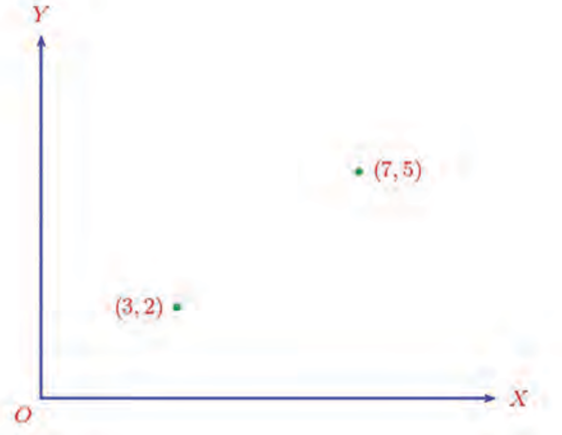
Sequence[(a,a),a,–3,3,0.2]

Sequence[(a,-a),a,–3,3,0.2]

Sequence[(a^2,a),a,–4,4,0.1]

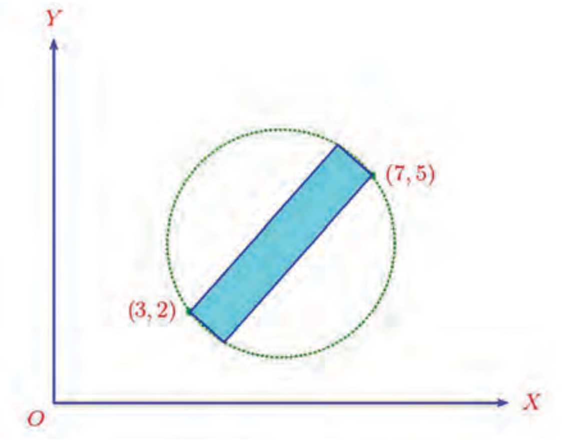
ചതുരക്കണക്കുകൾ

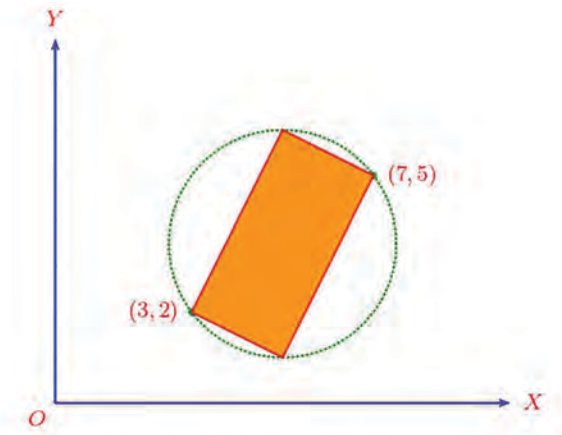
ചിത്രം നോക്കൂ:



ഇവ എതിർമൂലകളായ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കണം

എത്ര വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം:



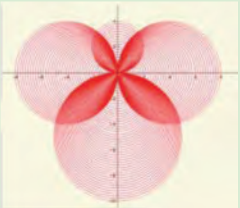


Input Bar ൽ circle[(1,3),2] എന്നെഴുതിയാൽ, ജിയോജിബ്രയിൽ കേന്ദ്രം (1, 3) എന്ന ബിന്ദുവും ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തം കിട്ടും.

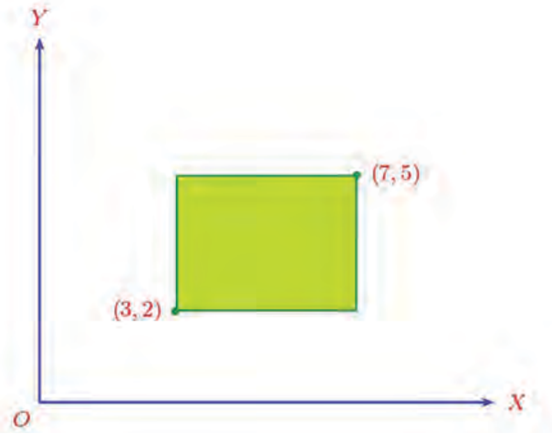
Sequence[circle[(*a*, 0),1],*a*,0,5,0.2] എന്ന നിർദേശം നൽകിയാൽ (0, 0), (0.2, 0), (0.4, 0),...,(5, 0) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രമായി, ആരം 1 ആയ വൃത്തങ്ങളും കിട്ടും. ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ നിർദേശവും നൽകിയാൽ കിട്ടുന്ന ചിത്രങ്ങൾ മനസ്സിൽ കാണാൻ ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ. അതിനു ശേഷം ജിയോജിബ്രയിൽ ചെയ്തു നോക്കാം.

- Sequence[circle[(*a*, 0),*a*],*a*,0,10,0.1]
- Sequence[circle[(*a*, 0),$\frac{a}{4}$],*a*,0,10,0.1]

ആവശ്യമായ നിർദേശങ്ങൾ നൽകി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.



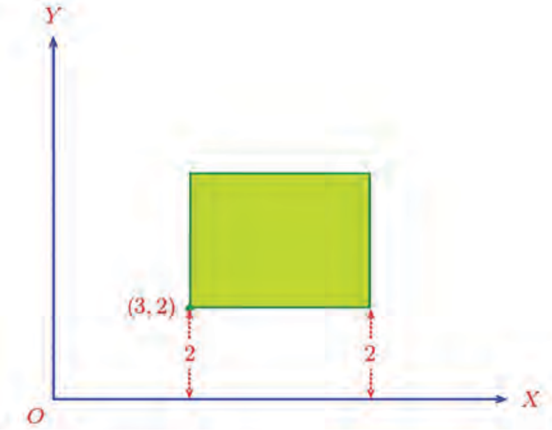
ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമാകണം എന്നുകൂടി പറഞ്ഞാലോ ? ഒരെണ്ണമല്ലേ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുള്ളൂ ?

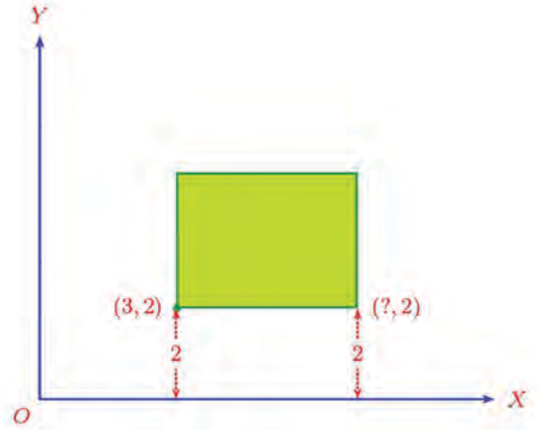


ഈ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

അതിന് ചിത്രം അല്പം കൂടി വിശദമാക്കാം. താഴത്തെ ഇടതുമൂലയുടെ y-സൂചകസംഖ്യ 2 ആയതിനാൽ, x-അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് അതിലേക്കുള്ള ഉയരം 2 ആണ്.

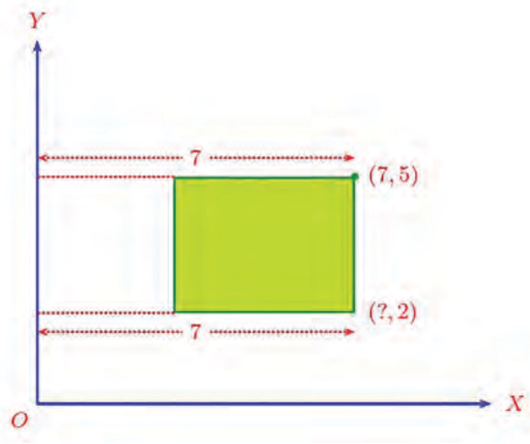
താഴത്തെ വശം x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ വശത്തിന്റെ മറ്റേ മൂലയും ഇതേ ഉയരത്തിലാണ്; അതായത് ഈ മൂലയുടെയും y-സൂചകസംഖ്യ 2 തന്നെ.

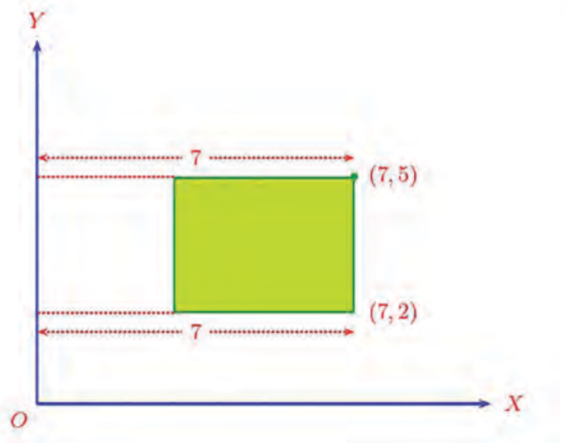




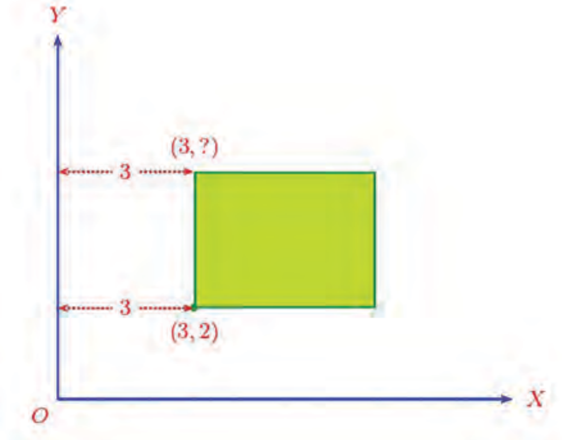
ഈ മൂലയുടെ x-സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മുകളിലെ വലതുമൂല നോക്കുക. ഇതിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യ 7 ആയതിനാൽ, y-അക്ഷത്തിൽനിന്ന് ഈ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലം 7 ആണ്.

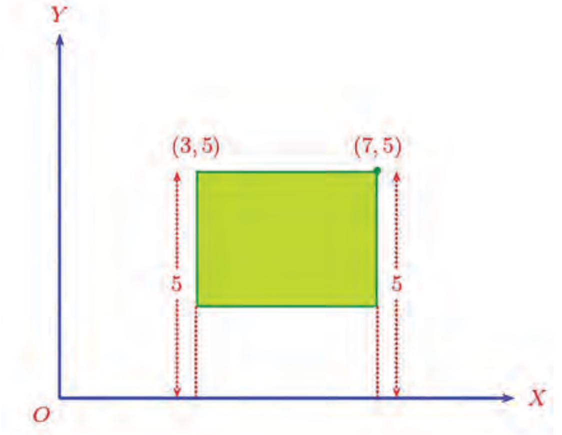
ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശം, y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ വശത്തിലെ മറ്റേ മൂലയും ഇതേ അകലത്തിലാണ്; അതായത്, അതിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യയും 7 തന്നെ.





ഇതുപോലെ ചതുരത്തിന്റെ ഇടതു മേൽമൂലയും കണ്ടുപിടിക്കാം:





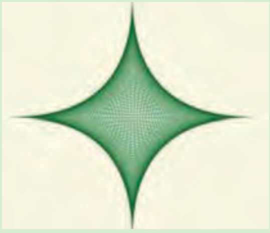
ജിയോജിബ്രയിൽ

Segment[(2,-1), (3,5)]

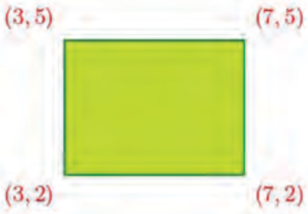
എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ (2, –1), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരക്കഷണം കിട്ടും. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിർദേശങ്ങൾ തരുന്ന വരകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

- Sequence[segment[(a, 0),(a, 3)],a,0,5,0.2]
- Sequence[segment[(a, 0),(a, a)],a,0,5,0.2]
- Sequence[segment[(0, 3),(a, 0)],a,–4,4,0.1]
- Sequence[segment[(a, 0),(0, a)],a, –3,3,0.2]
- Sequence[segment[(a, 0),(0,5 – a)],a,0,5,0.1]

ആവശ്യമായ നിർദേശങ്ങൾ കൊടുത്ത് ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.



ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ ഒരുമിച്ചു നോക്കൂ:



സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ച മാർഗവും ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. ഉപയോഗിച്ച തത്വമെന്താണ്?

> x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി നീങ്ങുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല; y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി നീങ്ങുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല;

വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ മറ്റൊരു ചതുരം നോക്കൂ:

ഇതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും?

ആദ്യം ഇടതുവശത്തെ താഴത്തെ മൂല നോക്കാം. ഇടതുവശത്തെ മുകളിലെ മൂലയുടെ x-സൂചക സംഖ്യ 2; ഈ വശം y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, താഴത്തെ മൂലയുടെ x-സൂചക സംഖ്യയും 2 തന്നെ.

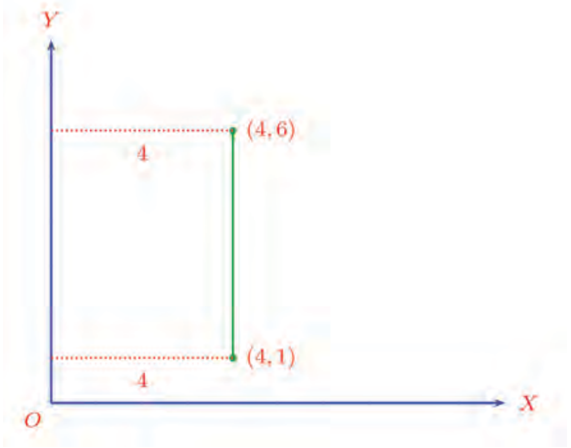
ഈ മൂല താഴത്തെ വശത്തിലുമാണല്ലോ. താഴത്തെ വശത്തിലെ വലത് മൂലയുടെ y-സൂചകസംഖ്യ 1; ഈ വശം x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഇടത് മൂലയുടെ y-സൂചക സംഖ്യയും 1 തന്നെ.

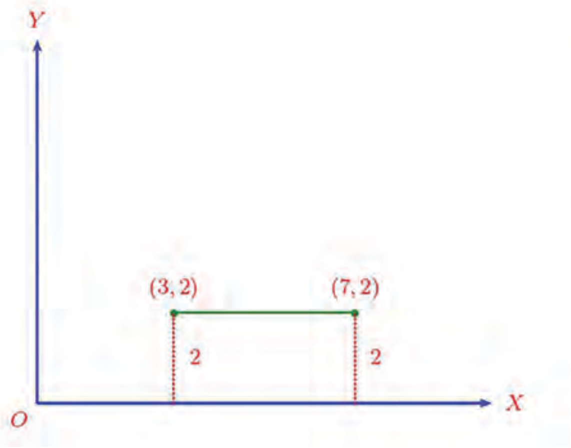
ഇതുപോലെ ആലോചിച്ച്, വലതു മേൽമൂലയും കണക്കാക്കാം:

ഏതു രണ്ടു ജോടി ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ തന്നാലും, ഇവ എതിർമൂലകളായ ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ ? ബിന്ദുക്കൾ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ആയാലോ ?

എന്തുകൊണ്ടാണ് ഈ രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലെയും ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയാത്തത് ?

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര y-അക്ഷത്തിനും, രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര x-അക്ഷത്തിനും സമാന്തരമല്ലേ ?





വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ ഏതു ചതുരത്തിന്റെയും വികർണ്ണം, അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാകാൻ കഴിയില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തുപറയാം ?

- രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ x-സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്

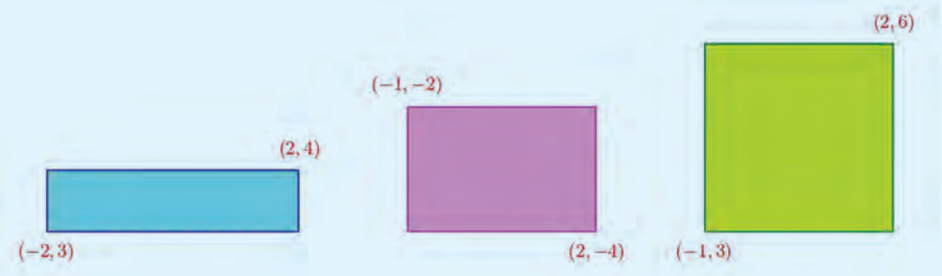
- രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ y-സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്

ഈ രണ്ടു തരത്തിലുമുള്ള ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.

അപ്പോൾ ഇത്തരത്തിലുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

രണ്ടു നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയണമെങ്കിൽ, ബിന്ദുക്കളുടെ x-സൂചകസംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമാകണം; y-സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമാകണം.

(1) ചുവടെയുള്ള ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ഓരോ ചതുരത്തിന്റെയും മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക:



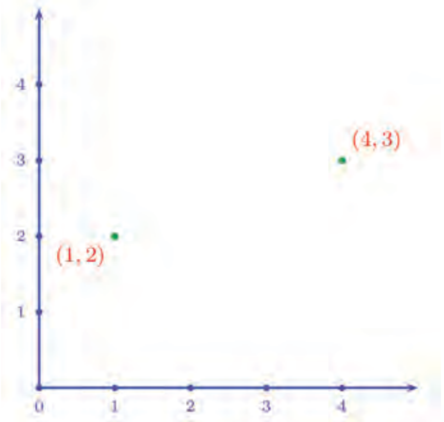
(2) അക്ഷങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ജോടികൾ, ഇടതു-വലതു, മേൽ-കീഴ് സ്ഥാനങ്ങൾ ശരിയായി അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ എതിർമൂലകളായും വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും വരയ്ക്കുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) (3,5), (7,8) (ii) (6,2), (5, 4) (iii) (−3, 5), (−7,1) (iv) (−1, −2), (−5, −4)

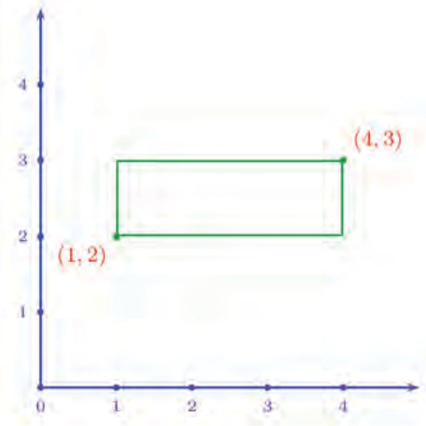
നീളങ്ങളും അകലങ്ങളും

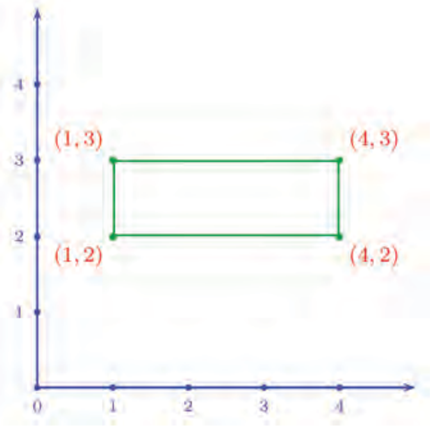
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.



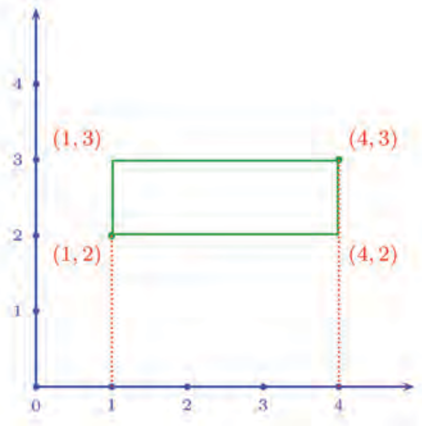
ഇവ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ചതുരം വരയ്ക്കാമല്ലോ; അതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുകയും ചെയ്യാം:





ഇനി ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമോ ?

താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം x-അക്ഷത്തിലെ 1, 4 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തന്നെയല്ലേ ?



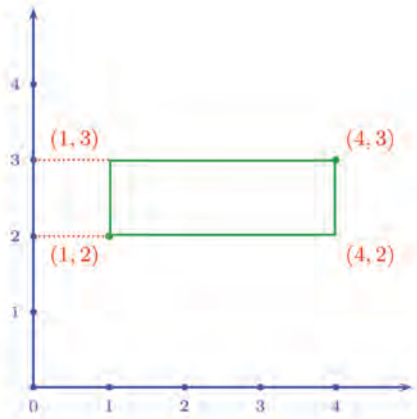
ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ് ?

അക്ഷങ്ങളിൽ അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ ഏതു നീളവും ഏകകമായെടുക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ, നീളങ്ങളും അകലങ്ങളുമെല്ലാം ഈ ഏകകത്തിന്റെ മടങ്ങായി മാത്രമേ പറയാൻ കഴിയൂ.

അപ്പോൾ x-അക്ഷത്തിൽ 1, 4 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ ഏകകത്തിന്റെ 3 മടങ്ങ്.

സാധാരണയായി, ഇത്തരം അളവുകൾ ഏകകം ഒന്നുമില്ലാതെ സംഖ്യകൾ മാത്രമായാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ ചതുരത്തിലെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം 3.

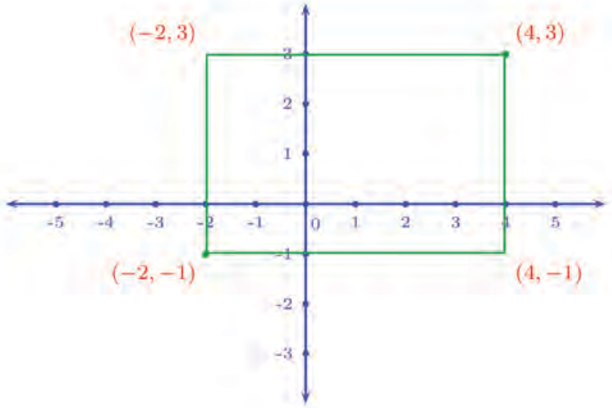
ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളമോ ?



y-അക്ഷത്തിലെ 2, 3 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം; അതായത് 1

ഇനി എതിർമൂലകൾ ഇങ്ങനെ ആയാലോ ?

ചതുരം വരച്ച്, മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളും കണക്കാക്കാം:



താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം, x-അക്ഷത്തിലെ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ് ?

ഈ അകലം എത്രയാണ് ?

ഇതുപോലെ, ചതുരത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമോ ?

പൊതുവേ എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ആയതും വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായതുമായ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ പറയാം ?

- താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം, x-അക്ഷത്തിൽ x_1, x_2 എന്നീ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്
- ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം, y-അക്ഷത്തിൽ y_1, y_2 എന്നീ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്

ഈ അകലങ്ങൾ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

അക്ഷങ്ങളോരോന്നിനേയും ഒരു സംഖ്യാരേഖയായി കാണാം. അപ്പോൾ ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഓരോ അകലവും അടയാളപ്പെടുത്തിയ സംഖ്യകളിൽ വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചതാണ്; ഈ ക്രിയയെ കേവലമൂല്യമായി എഴുതുകയും ചെയ്യാം (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അകലങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

മുകളിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ഉം വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവും ആയ ചതുരത്തിന്റെ

- താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം $|x_1 - x_2|$
- ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം, $|y_1 - y_2|$

ഇനി എതിർമൂലകൾ അറിഞ്ഞു കഴിഞ്ഞാൽ, അക്ഷങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ തന്നെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

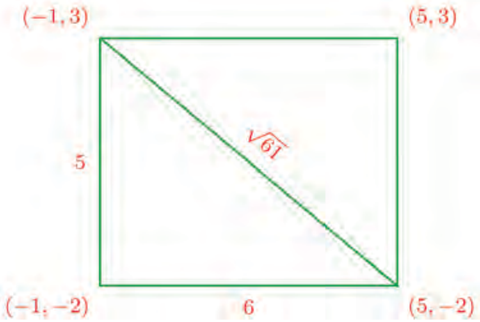
ഉദാഹരണമായി, എതിർമൂലകൾ $(-1, 3)$, $(5, -2)$ എന്നായാലോ ?

താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം $5 - (-1) = 6$

ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം $3 - (-2) = 5$

എതിർമൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണമാണല്ലോ. അതിന്റെ നീളം എത്രയാണ് ?

$$\sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$



x-സൂചകസംഖ്യകളും y-സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമായ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും ഒരു ചതുരത്തിന്റെ എതിർമൂലകളാകാമല്ലോ.

അപ്പോൾ അത്തരം ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി (2, 5), (6, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം? ഇവ എതിർ മൂലകളായി വരുന്ന ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം $6 - 2 = 4$ ഉം $6 - 5 = 1$ ഉം; അപ്പോൾ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

ഇക്കാര്യം പൊതുവേ എങ്ങനെ പറയാം?

(i) സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ആയ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ എതിർ മൂലകൾ ആകണമെങ്കിൽ $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ എന്നായിരിക്കണം.

(ii) ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $|x_1 - x_2|$, $|y_1 - y_2|$

(iii) ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ, ഈ അകലം $\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$

ഏതു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ കേവലമൂല്യത്തിന്റെയും വർഗം ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കേവലമൂല്യം** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ

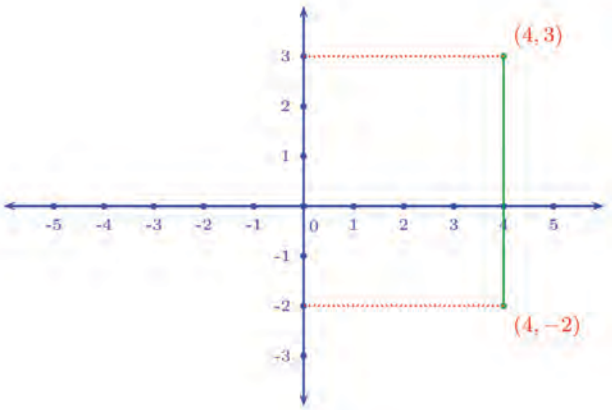
$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ഇതെല്ലാം ചേർത്ത് ഇങ്ങനെ പറയാം:

> രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നും, ഇവയിൽ $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ എന്നും ആണെങ്കിൽ, ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2}$

ഇനി ഏതെങ്കിലും സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമായ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ഉദാഹരണമായി, സൂചകസംഖ്യകൾ $(4, -2)$ ഉം $(4, 3)$ ഉം ആയ ബിന്ദുക്കളെടുക്കാം:



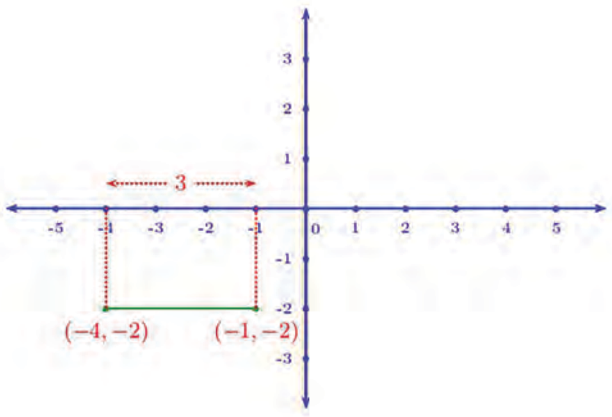
ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം, y-അക്ഷത്തിൽ 3, –2 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തന്നെയല്ലേ ?

അതായത് $3 - (-2) = 5$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഒരേ x സൂചകസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയെ (x, y_1), (x, y_2) എന്നെടുക്കാം; അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $|y_1 - y_2|$.

ഒരേ y-സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളായാലോ ?



രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഒരേ y സൂചകസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയെ (x_1, y), (x_2, y) എന്നെടുക്കാം; അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x_1 - x_2|$.

ഇനി, സൂചകസംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമായ ബിന്ദുക്കൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച $\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ $x_1 = x_2$ എന്നെടുത്താലോ ?

$$\sqrt{|y_1 - y_2|^2} = |y_1 - y_2|$$

$y_1 = y_2$ എന്നെടുത്താലോ ?

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2} = |x_1 - x_2|$$

അപ്പോൾ ഏതെങ്കിലും സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമായ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാനും ഈ ക്രിയതന്നെ ഉപയോഗിക്കാം:

സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ആയ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ഉദാഹരണമായി, സൂചകസംഖ്യകൾ (4, –2), (–3, –1) ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$\sqrt{\left(4-(-3)\right)^2 + \left(-2-(-1)\right)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

സൂചകസംഖ്യകൾ (–2, 1) എന്ന ബിന്ദുവും ആധാരബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലമോ ?

$$\sqrt{(-2-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{5}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) ആയ ബിന്ദുവും, ആധാരബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{x^2+y^2}$

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

സൂചകസംഖ്യകൾ (–1, 2), (3, 5), (9, – 3) ആയ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണോ ?

മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ, അവ തമ്മിലുള്ള അകലങ്ങളിലെ ഏറ്റവും വലുത്, മറ്റു രണ്ട് അകലങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കണം.

കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾക്ക് A, B, C എന്നു പേരിടാം. അപ്പോൾ

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(3-9)^2+(5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

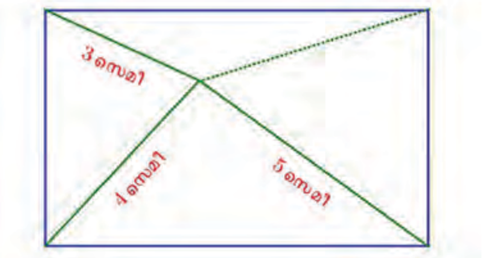
$$AC = \sqrt{(-1-9)^2+(2-(-3))^2} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$$

ഇവയിൽ ഏറ്റവും വലുത് AC (അതെങ്ങനെ കിട്ടി ?). ഇനി AB, BC ഇവയുടെ നീളം കൂട്ടിയാൽ 15; ഇത് AC യുടെ നീളമല്ല. അപ്പോൾ A, B, C ഇവ ഒരേ വരയിലുമല്ല.

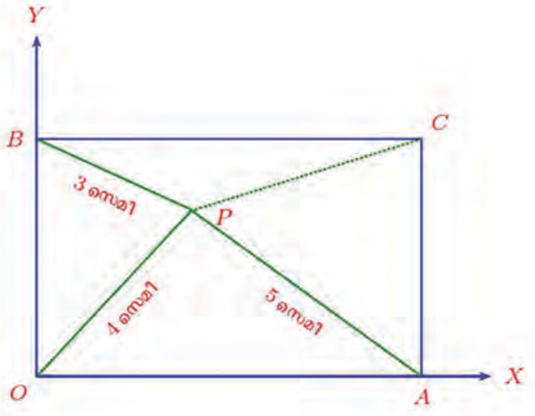
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു ചതുരത്തിനകത്തെ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ചതുരത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിലേക്കുള്ള അകലം 3 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. നാലാമത്തെ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലം എന്താണ് ?

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ ഇടതുമൂല ആധാരബിന്ദുവായും, അതിലൂടെയുള്ള രണ്ടു വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങളായും എടുക്കാം:

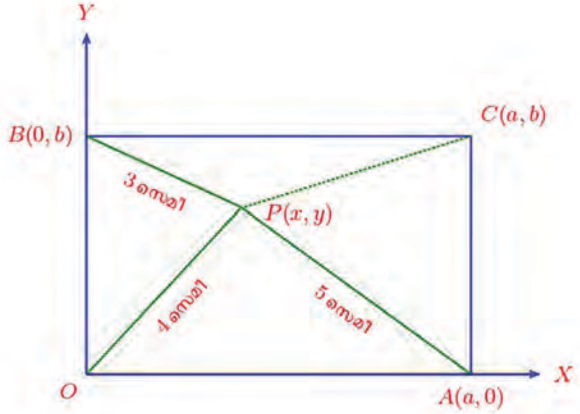


ചിത്രത്തിൽ A എന്ന ബിന്ദു x-അക്ഷത്തിലായതിനാൽ, അതിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ 0 ആണ്; അതിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യ a എന്നെടുത്താൽ, A യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(a, 0)$

ഇതുപോലെ B യുടെ y-സൂചകസംഖ്യ b എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, b)$

അപ്പോൾ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (a, b) ആകണം.

P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) എന്നെടുക്കാം:



ഇനി അറിയാവുന്ന നീളമെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചെഴുതാം:

$$x^2 + (y - b)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 25$$

നമുക്കു കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് PC ആണല്ലോ; അതിന്റെ വർഗം

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

മുകളിലെഴുതിയ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന് ഇത് അരിച്ചെടുക്കാൻ പറ്റുമോ?

ഇതിലെ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സമവാക്യങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ

$$(x^2 + (y - b)^2) + (x - a)^2 + y^2 = 9 + 25$$

അതായത്,

$$x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 34$$

രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യമനുസരിച്ച്, $x^2 + y^2 = 16$ ആണല്ലോ. ഇക്കാര്യം ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ സമവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ,

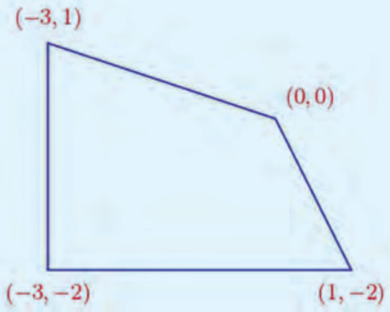
$$16 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 34$$

അപ്പോൾ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 34 - 16 = 18$$

അപ്പോൾ PC യുടെ നീളം $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ

(1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയും വികർണ്ണങ്ങളുടെയും നീളം കണക്കാക്കുക.



(2) (2, 1), (3, 4), (−3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രവും, ആരം 10 ഉം ആയി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു.

(i) സൂചകസംഖ്യകൾ (6, 9), (5, 9), (6, 8) ആയ ബിന്ദുക്കൾ ഈ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(ii) ഈ വൃത്തത്തിലെ 8 ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(4) കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (1, 1) ഉം, ആരം $\sqrt{2}$ ഉം ആയ വൃത്തം x-അക്ഷത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെയും, y-അക്ഷത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ (0, 0), (4, 0), (1, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കളാണ്. ഇതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഭാരതത്തിന്റെ ഭരണഘടന

ഭാഗം IV ക

മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ

51 ക. മൗലിക കർത്തവ്യങ്ങൾ - താഴെപ്പറയുന്നവ ഭാരതത്തിലെ ഓരോ പൗരന്റെയും കർത്തവ്യം ആയിരിക്കുന്നതാണ് :

(ക) ഭരണഘടനയെ അനുസരിക്കുകയും അതിന്റെ ആദർശങ്ങളെയും സ്ഥാപനങ്ങളെയും ദേശീയപതാകയെയും ദേശീയഗാനത്തെയും ആദരിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഖ) സ്വാതന്ത്ര്യത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള നമ്മുടെ ദേശീയസമരത്തിന് പ്രചോദനം നൽകിയ മഹനീയാദർശങ്ങളെ പരിപോഷിപ്പിക്കുകയും പിൻതുടരുകയും ചെയ്യുക;

(ഗ) ഭാരതത്തിന്റെ പരമാധികാരവും ഐക്യവും അഖണ്ഡതയും നിലനിർത്തുകയും സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഘ) രാജ്യത്തെ കാത്തുസൂക്ഷിക്കുകയും ദേശീയസേവനം അനുഷ്ഠിക്കുവാൻ ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ അനുഷ്ഠിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ങ) മതപരവും ഭാഷാപരവും പ്രാദേശികവും വിഭാഗീയവുമായ വൈവിധ്യങ്ങൾക്കതീതമായി ഭാരതത്തിലെ എല്ലാ ജനങ്ങൾക്കുമിടയിൽ, സൗഹാർദവും പൊതുവായ സാഹോദര്യമനോഭാവവും പുലർത്തുക, സ്ത്രീകളുടെ അന്തസ്സിന് കുറവു വരുത്തുന്ന ആചാരങ്ങൾ പരിത്യജിക്കുക;

(ച) നമ്മുടെ സമ്മിശ്രസംസ്കാരത്തിന്റെ സമ്പന്നമായ പാരമ്പര്യത്തെ വിലമതിക്കുകയും നിലനിറുത്തുകയും ചെയ്യുക;

(ഛ) വനങ്ങളും തടാകങ്ങളും നദികളും വന്യജീവികളും ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രകൃത്യാ ഉള്ള പരിസ്ഥിതി സംരക്ഷിക്കുകയും അഭിവൃദ്ധിപ്പെടുത്തുകയും, ജീവികളോട് കാരുണ്യം കാണിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ജ) ശാസ്ത്രീയമായ കാഴ്ചപ്പാടും മാനവികതയും, അന്വേഷണത്തിനും പരിഷ്കരണത്തിനും ഉള്ള മനോഭാവവും വികസിപ്പിക്കുക;

(ഝ) പൊതുസ്വത്ത് പരിരക്ഷിക്കുകയും ശപഥം ചെയ്ത് അക്രമം ഉപേക്ഷിക്കുകയും ചെയ്യുക;

(ഞ) രാഷ്ട്രം യത്നത്തിന്റെയും ലക്ഷ്യപ്രാപ്തിയുടെയും ഉന്നതതലങ്ങളിലേക്ക് നിരന്തരം ഉയരത്തക്കവണ്ണം വ്യക്തിപരവും കൂട്ടായതുമായ പ്രവർത്തനത്തിന്റെ എല്ലാ മണ്ഡലങ്ങളിലും ഉൽകൃഷ്ടതയ്ക്കുവേണ്ടി അധ്വാനിക്കുക;

(ട) ആറിനും പതിനാലിനും ഇടയ്ക്ക് പ്രായമുള്ള തന്റെ കുട്ടിക്കോ തന്റെ സംരക്ഷണയിലുള്ള കുട്ടികൾക്കോ, അതതു സംഗതി പോലെ, മാതാപിതാക്കളോ രക്ഷാകർത്താവോ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനുള്ള അവസരങ്ങൾ ഏർപ്പെടുത്തുക.

കുട്ടികളുടെ അവകാശങ്ങൾ

പ്രിയമുള്ള കുട്ടികളേ,

നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങളെന്തെല്ലാമെന്ന് അറിയേണ്ടതില്ലേ? അവകാശങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള അറിവ് നിങ്ങളുടെ പങ്കാളിത്തം, സംരക്ഷണം, സാമൂഹികനീതി എന്നിവ ഉറപ്പാക്കാൻ പ്രേരണയും പ്രചോദനവും നൽകും. നിങ്ങളുടെ അവകാശങ്ങൾ സംരക്ഷിക്കാൻ ഇപ്പോൾ ഒരു കമ്മീഷൻ പ്രവർത്തിക്കുന്നുണ്ട്. കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ എന്നാണ് അതിന്റെ പേര്. എന്തെല്ലാമാണ് നിങ്ങൾക്കുള്ള അവകാശങ്ങൾ എന്നു നോക്കാം.

- സംസാരത്തിനും ആശയപ്രകടനത്തിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- ജീവന്റെയും വ്യക്തിസ്വാതന്ത്ര്യത്തിന്റെയും സംരക്ഷണം
- അതിജീവനത്തിനും പൂർണ്ണവികാസത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി ബഹുമാനിക്കപ്പെടാനും അംഗീകരിക്കപ്പെടാനുമുള്ള അവകാശം
- മാനസികവും ശാരീരികവും ലൈംഗികവുമായ പീഡനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള സംരക്ഷണത്തിനും പരിചരണത്തിനുമുള്ള അവകാശം
- പങ്കാളിത്തത്തിനുള്ള അവകാശം
- ബാലവേലയിൽനിന്നും ആപൽക്കരമായ ജോലികളിൽനിന്നുമുള്ള മോചനം
- ശൈശവവിവാഹത്തിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സ്വന്തം സംസ്കാരം അറിയുന്നതിനും അതനുസരിച്ച് ജീവിക്കുന്നതിനുമുള്ള സ്വാതന്ത്ര്യം
- അവഗണനകളിൽനിന്നുള്ള സംരക്ഷണം
- സൗജന്യവും നിർബന്ധിതവുമായ വിദ്യാഭ്യാസ അവകാശം
- കളിക്കാനും പഠിക്കാനുമുള്ള അവകാശം
- സ്നേഹവും സുരക്ഷയും നൽകുന്ന കുടുംബവും സമൂഹവും ലഭ്യമാകാനുള്ള അവകാശം

നിങ്ങളുടെ ചില ഉത്തരവാദിത്വങ്ങൾ

- സ്കൂൾ, പൊതുസംവിധാനങ്ങൾ എന്നിവ നശിപ്പിക്കാതെ സംരക്ഷിക്കുക.
- സ്കൂളിലും പഠനപ്രവർത്തനങ്ങളിലും കൃത്യനിഷ്ഠ പാലിക്കുക.
- സ്കൂൾ അധികാരികളെയും അധ്യാപകരെയും മാതാപിതാക്കളെയും സഹപാഠികളെയും ബഹുമാനിക്കുകയും അംഗീകരിക്കുകയും ചെയ്യുക.
- ജാതി-മത-വർഗ-വർണ്ണ ചിന്തകൾക്കതീതമായി മറ്റുള്ളവരെ ബഹുമാനിക്കാനും അംഗീകരിക്കാനും സന്നദ്ധരാവുക.

ബന്ധപ്പെടേണ്ട വിലാസം:

കേരള സംസ്ഥാന ബാലാവകാശസംരക്ഷണ കമ്മീഷൻ

ശ്രീ ഗണേഷ്, റ്റി.സി. 14/2036, വാൻറോസ് ജംങ്ഷൻ,
കേരള യൂണിവേഴ്സിറ്റി പി.ഒ, തിരുവനന്തപുരം – 34
ഫോൺ 0471 – 2326603
ഇ- മെയിൽ childrights.cpcr@kerala.gov.in, rte.cpcr@kerala.gov.in
വെബ്സൈറ്റ് : www.kescpcr.kerala.gov.in

ചൈൽഡ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 1098, ക്രൈം സ്റ്റോപ്പർ - 1090, നിർഭയ – 1800 425 1400
കേരള പൊലീസ് ഹെൽപ്പ് ലൈൻ - 0471 – 3243000/44000/45000

online ***R.T.E Monitoring : www.nireekshana.org.in***