7 സൂചകസംഖ്യകൾ

സ്ഥാനവും സംഖ്യയും

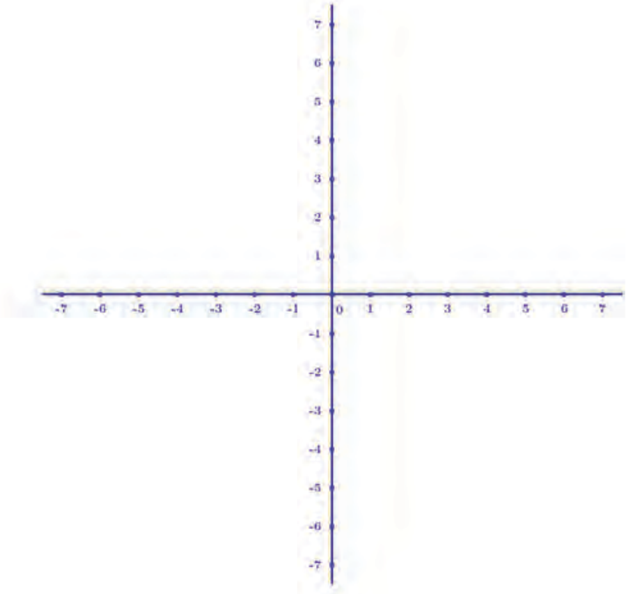
ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രങ്ങൾ വരച്ചത് ഓർമ്മയുണ്ടോ ? (**ബഹുപദചിത്രങ്ങൾ** എന്ന പാഠം).

ഉദാഹരണമായി $p(x) = 2x + 1$ എന്ന ഒന്നാംകൃതി ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം വരച്ചത് എങ്ങനെയാണ് ?

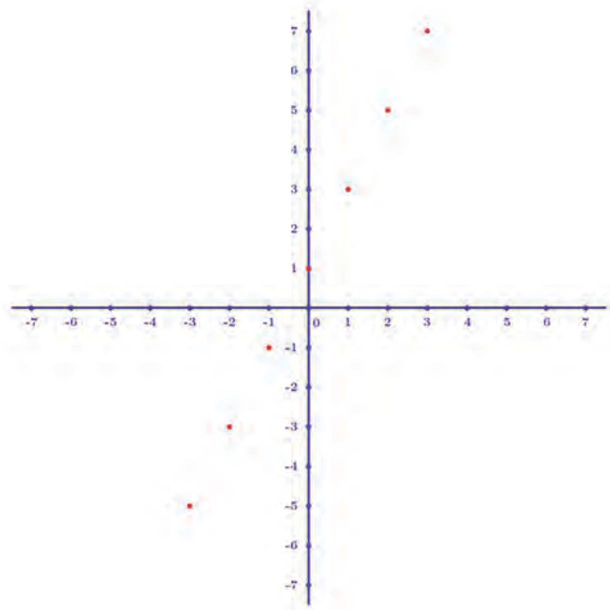
x ആയി പല സംഖ്യകളെടുത്ത്, ഓരോന്നിന്റെയും $p(x)$ കണക്കാക്കി.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$p(x)$	–5	–3	–1	1	3	5	7

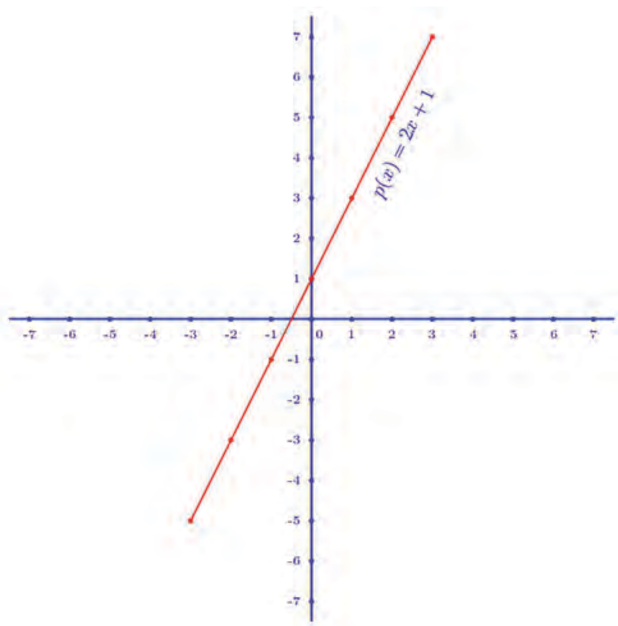
ഇവ ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായി അടയാളപ്പെടുത്താൻ, ആദ്യം വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയുമായി രണ്ടു വരകൾ വരച്ച്, അവയിൽ ഒരേ അകലം ഇടവിട്ട് സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി:



തുടർന്ന്, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ x ആയി എടുത്ത ഓരോ സംഖ്യയുടെ സ്ഥാനത്തുനിന്നും $p(x)$ ആയി കിട്ടിയ സംഖ്യ ഉയരമായി ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി.

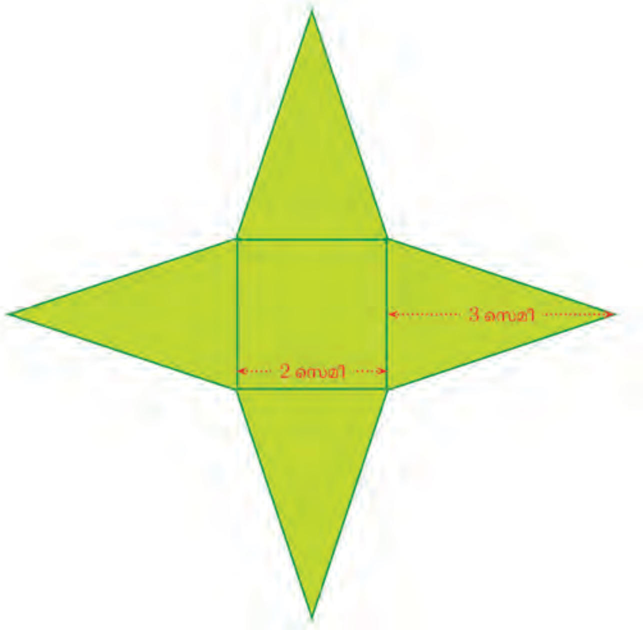


ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന വരയാണ് $p(x) = 2x + 1$ എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപം:

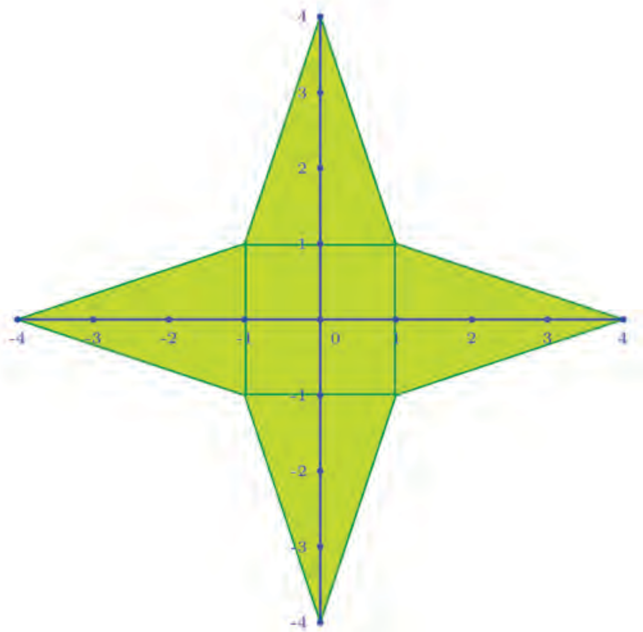


മറ്റു പല രൂപങ്ങൾ വരയ്ക്കാനും ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം ഇത്തരത്തിൽ എങ്ങനെ വരയ്ക്കുമെന്നു നോക്കാം:

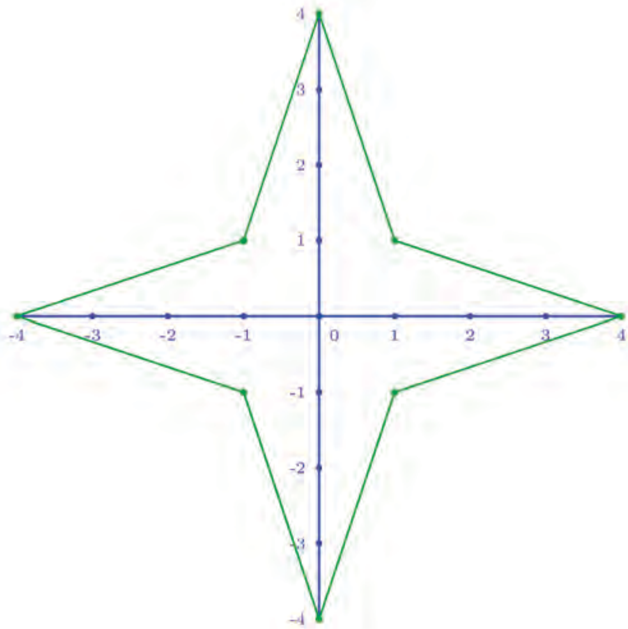


ചിത്രത്തിന്റെ നടുവിൽക്കൂടി, വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും വരകൾ വരച്ച്, 1 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ടെന്നു സങ്കല്പിക്കുക:



അപ്പോൾ വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും വരകൾ വരച്ച്, അവയിൽ 1 സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ടുള്ള അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ, ചിത്രത്തിന്റെ എട്ടു മൂലകളും അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ; അവ യോജിപ്പിച്ചാൽ നക്ഷത്രത്തിന്റെ പുറംവരകളുമായി.

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയും വരകൾ വരച്ച്, മൂലകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ ചിത്രം നോട്ടുബുക്കിൽ വരച്ചുനോക്കൂ:

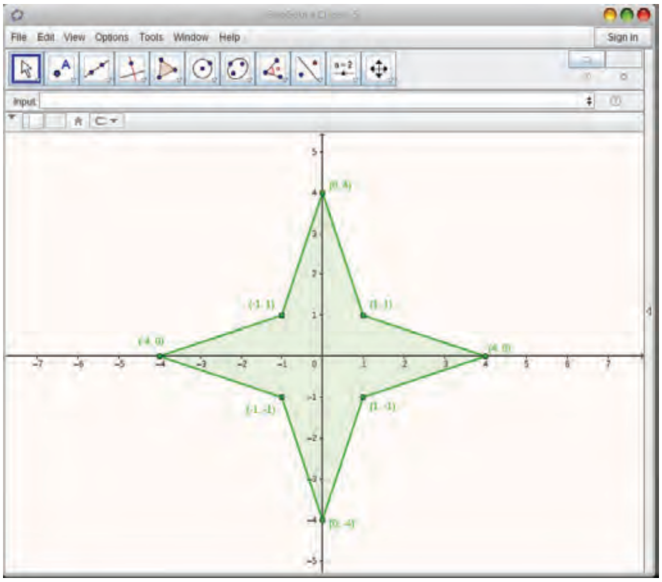


ഇനി ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ എങ്ങനെ വരയ്ക്കുമെന്നു നോക്കാം. ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ജോടിയായി ജിയോജിബ്രയിൽ സൂചിപ്പിച്ചത് ഓർമ്മയുണ്ടോ ?

ഉദാഹരണമായി, $p(x) = x^2$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ, $x = 0.5$ എന്നെടുക്കുമ്പോൾ $p(x) = 0.25$ ആകും. അപ്പോൾ വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ 0.5 എന്ന സ്ഥാനത്തിനു മുകളിൽ 0.25 ഉയരത്തിലുള്ള ബിന്ദു $p(x)$ ന്റെ ചിത്രരൂപത്തിലെ ബിന്ദുവാണ്. ഇത് അടയാളപ്പെടുത്താൻ, ജിയോജിബ്രയിലെ Input ആയി (0.5, 0.25) എന്നു ടൈപ്പു ചെയ്താൽ മതി എന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദചിത്രങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

ഇതുപോലെ, മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെ വലതു മേൽമൂല, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ 1 സെന്റിമീറ്റർ അടയാളപ്പെടുത്തിയ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 1 സെന്റിമീറ്റർ ഉയരെയാണ്. അപ്പോൾ ഈ ബിന്ദുവിനെ (1, 1) എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ.

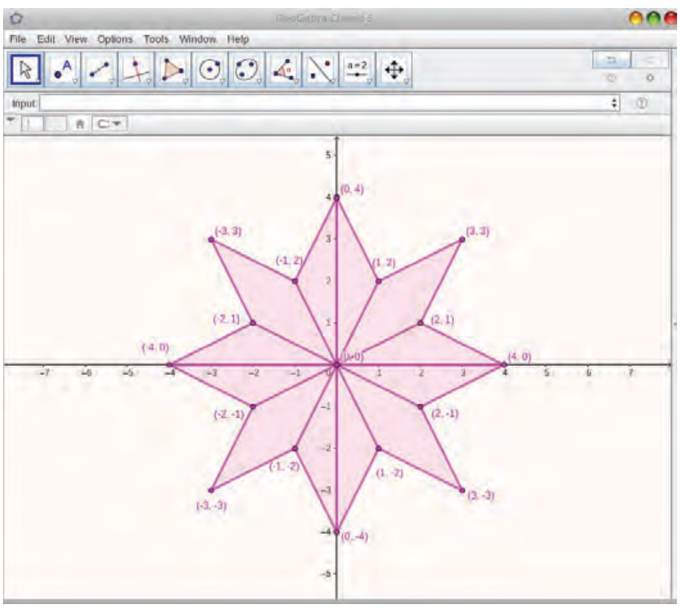
ഇതുപോലെ ചിത്രത്തിന്റെ എല്ലാ മൂലകളും അടയാളപ്പെടുത്താം:



ജിയോജിബ്രയിൽ സംഖ്യാജോടികൾ ഉപയോഗിച്ച് കുത്തുകളിടാൻ Input Bar ൽ അവ ഓരോന്നായി കൊടുത്താൽ മതി. ഈ കുത്തുകൾ മൂലകളായുള്ള ബഹുഭുജം വരയ്ക്കാൻ Polygon എന്നു കൊടുക്കണം. ഉദാഹരണമായി, Input Bar ൽ ഇങ്ങനെ നിർദേശം കൊടുത്തു നോക്കൂ.

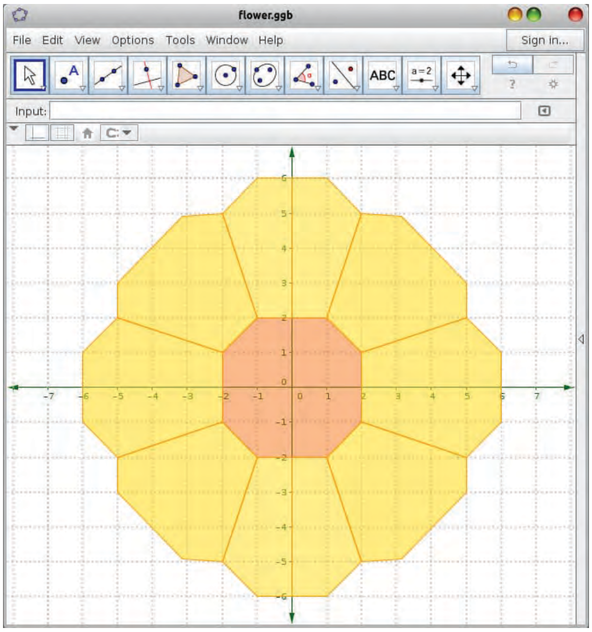
Polygon [(–1, –1), (1, –1), (1, 1), (–1, 1)]

ഇനി ഈ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കാമോ?



Geogebra തുറന്ന് Input Bar ൽ (0, 0), (4, 0), (2, 1), (3, 3), (1, 2), (0, 4) എന്നീ സംഖ്യാജോടികൾ ഓരോന്നായി Type ചെയ്ത് Enter അമർത്തുക. Polygon Tool എടുത്ത് *A, B, C, D, E, F, A* എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്രമത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് ചിത്രത്തിന്റെ വലതു മുകൾ ഭാഗത്ത് കാൽ ഭാഗം പൂർത്തിയാക്കാം. Segment Tool എടുത്ത് *A, C* എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്ലിക്ക് ചെയ്തും, പിന്നീട് *A, E* എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്ലിക്ക് ചെയ്തും ഇടയിലെ രണ്ട് വരകൾ കൂടി വരയ്ക്കാം. Reflect about line എന്ന ടൂൾ എടുത്ത് ചിത്രത്തിലും തുടർന്ന് കുത്തനെയുള്ള വരയിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ചിത്രത്തിന്റെ പ്രതിബിംബം ഇടത് ഭാഗത്ത് വന്നില്ലേ? ഇതുപോലെ രണ്ട് വരകളും Reflect ചെയ്യാം. ചിത്രത്തിന്റെ താഴത്തെ പകുതി കിട്ടാൻ ഇതേ ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് മുകളിലുള്ള ഓരോ ചിത്രഭാഗവും വിലങ്ങനെയുള്ള വരയും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക.

ഈ ചിത്രമായാലോ ?



മൂലകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള സൗകര്യത്തിനാണ് ഇതിൽ കളങ്ങൾ (ജിയോജിബ്രയിലെ Grid) കൂടി വരച്ചിരിക്കുന്നത്.

ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോട്ടുബുക്കിൽ വരയ്ക്കാമോ ?

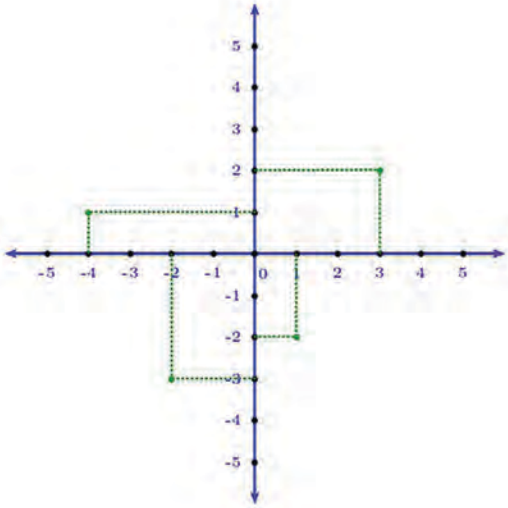
ജ്യാമിതിയും സംഖ്യകളും

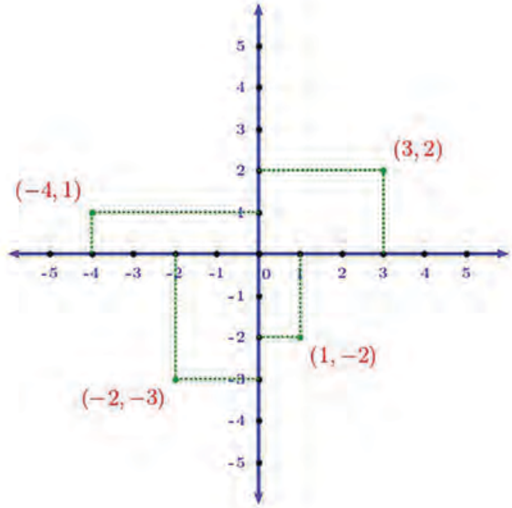
ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം രണ്ടു സംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ച് ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി കണ്ടില്ലേ ?

വിലങ്ങനെയും കുത്തനെയുമുള്ള വരകൾ ഉപയോഗിച്ചാണല്ലോ ഈ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുന്നത്. ഈ വരകൾക്ക്, **സൂചകാക്ഷങ്ങൾ (Axes of coordinates)** എന്നാണ് പേര്; വിലങ്ങനെയുള്ള വര **x-അക്ഷം (x-axis)**, കുത്തനെയുള്ള വര **y-അക്ഷം (y-axis)**. ഈ വരകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ **ആധാരബിന്ദു (Origin)** എന്നാണ് പറയുന്നത്.

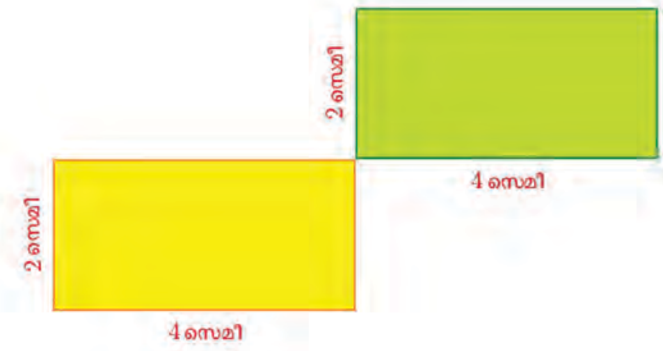
അക്ഷങ്ങൾ വരച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ, നേരത്തെ കണ്ട ഉദാഹരണങ്ങളിലെപ്പോലെ, ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം സംഖ്യാജോടിയായി എഴുതാം. ഈ സംഖ്യകളെ ബിന്ദുവിന്റെ **സൂചകസംഖ്യകൾ (Coordinates)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ആദ്യത്തേത് **x-സൂചകസംഖ്യ (x-coordinate)** രണ്ടാമത്തേത് **y-സൂചകസംഖ്യ (y-coordinate)**.

ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാൻ, അക്ഷങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങൾ സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ മതി. ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക:

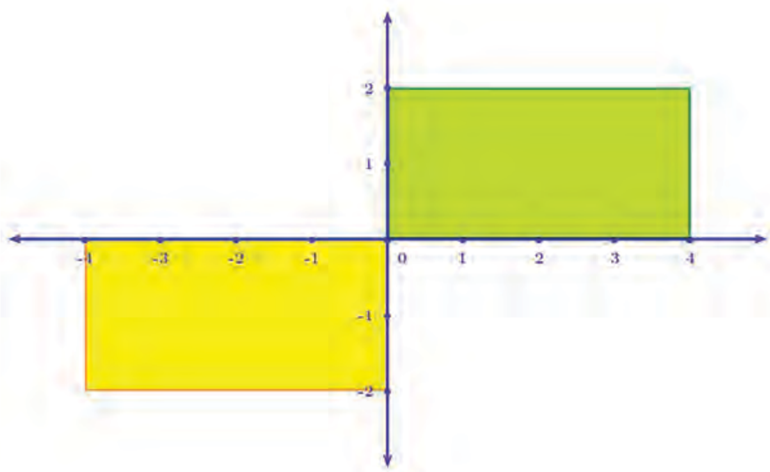




ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാൻ, പരസ്പരം ലംബമായ ഏതു രണ്ടു വരകളും അക്ഷങ്ങളായി എടുക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

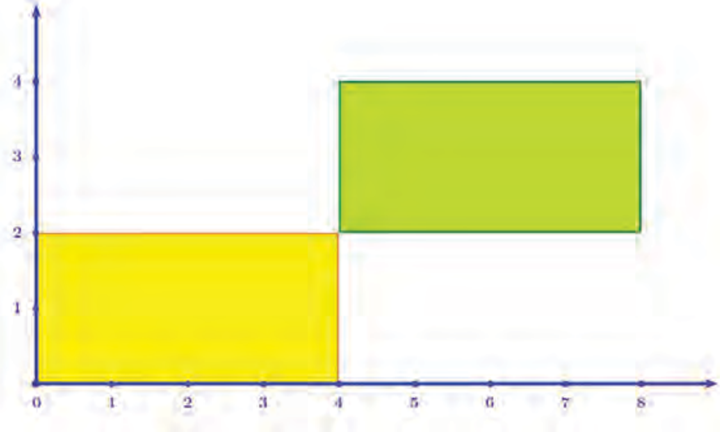


അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം:



രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടെയും മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തെല്ലാമാണ്?

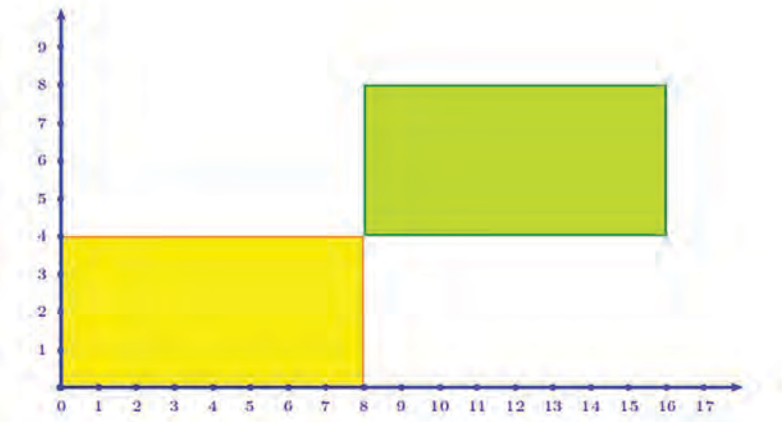
ഇനി അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരച്ചാലോ ?



ഈ അക്ഷങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തെല്ലാമാണ്?

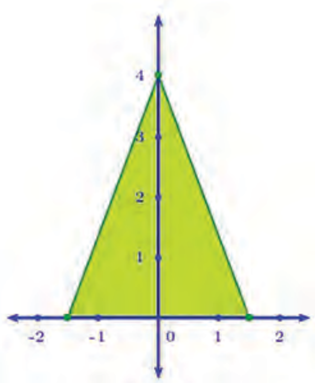
അക്ഷങ്ങളിലെ സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ഒരു സെന്റിമീറ്റർ തന്നെ ആകണമെന്നില്ല. സൗകര്യം പോലെ ഏതകലവുമാകാം.

ഉദാഹരണമായി, അര സെന്റിമീറ്റർ ഇടവിട്ട് കുത്തുകളിട്ടാൽ, മുകളിലത്തെ ചിത്രം ഇങ്ങനെയാകും:



ഇപ്പോൾ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തായി?

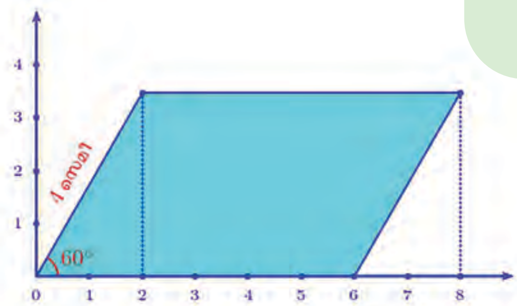
സൂചകസംഖ്യകൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളാകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി, പാദം 3 സെന്റിമീറ്ററും, ഉയരം 4 സെന്റിമീറ്ററുമായ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, പാദത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദു ആധാരബിന്ദുവായി, ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ അക്ഷങ്ങളെടുക്കാം:



ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

ഇനി ഈ സാമാന്തരികം വരയ്ക്കണമെങ്കിലോ?

അക്ഷങ്ങൾ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കാം:



സൂചകസംഖ്യകൾ $(2, 2\sqrt{3})$ ആയ ബിന്ദു കിട്ടാൻ ജിയോജിബ്രയുടെ Input Bar ൽ (2,2sqrt (3)) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി.

കോണുകൾ 30°, 60°, 90° ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അറിയാമല്ലോ. അപ്പോൾ മുകളിലെ ഇടതു മൂലയുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(2, 2\sqrt{3})$.

വലതു മൂലയുടെയോ?

അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചിത്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുമ്പോൾ, *x*-അക്ഷത്തിനെ (ഇടത്തുനിന്ന് വലത്തോട്ട്) *X'X* എന്നും, *y*-അക്ഷത്തിനെ (മുകളിൽനിന്ന് താഴോട്ട്) *YY'* എന്നും ആണ് അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. ആധാരബിന്ദുവിനെ *O* എന്നും.

(1) ചുവടെപ്പറയുന്നവ കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) *x*-അക്ഷത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും *y*-സൂചകസംഖ്യ

(ii) *y*-അക്ഷത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും *x*-സൂചകസംഖ്യ

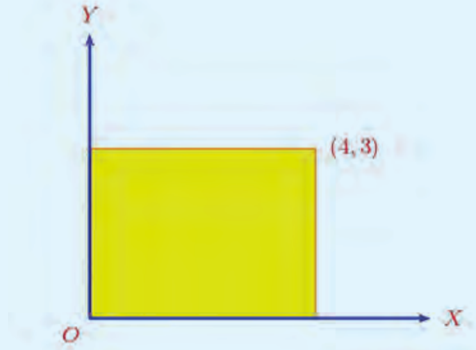
(iii) ആധാരബിന്ദുവിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ

(iv) (0, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ *x*-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും *y*-സൂചകസംഖ്യ

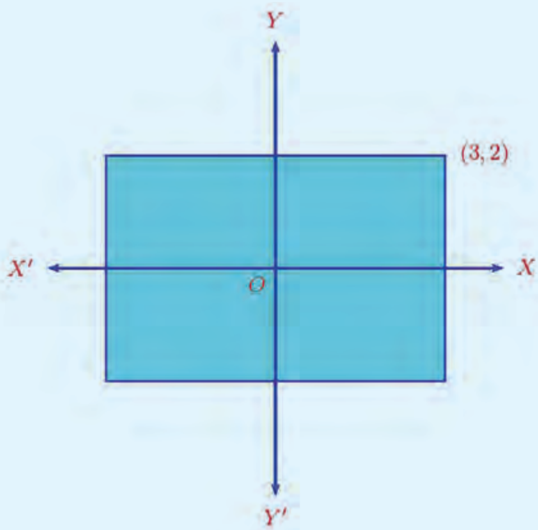
(v) (1, 0) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ *y*-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന വരയിലെ ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും *x*-സൂചകസംഖ്യ

ജിയോജിബ്രയിൽ *a* എന്ന പേരിൽ ഒരു സ്ലൈഡർ നിർമ്മിക്കുക. Input Bar ൽ (*a*, 0) എന്ന് നൽകുക. സ്ലൈഡർ നിരക്കി *a* മാറ്റി നോക്കൂ. ഈ ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത ഏതാണ്? ഇതുപോലെ (*a*,2), (*a*,1), (*a*,–2), (3,*a*), (–2,*a*) എന്നിങ്ങനെയുള്ള ബിന്ദുക്കളെടുത്ത് *a* മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് ഓരോ ബിന്ദുവും സഞ്ചരിക്കുന്ന പാതയുടെ പ്രത്യേകത എന്തെന്ന് നോക്കുക. ബിന്ദുവിന് Trace On കൊടുത്തു നോക്കൂ.

(2) ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക:



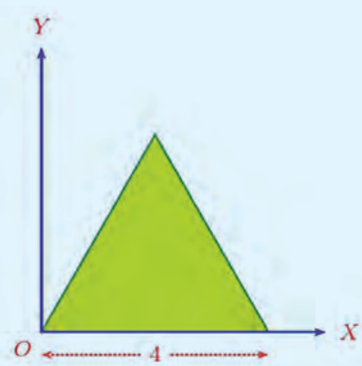
(3) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിലെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ആധാരബിന്ദു ചതുരത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവാണ് (വികർണ്ണങ്ങൾ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദു).

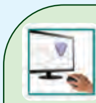


ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു മൂന്നു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ് ?

(4) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചിത്രമാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുടെയെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.





ജിയോജിബ്രയിലെ Input Bar ൽ Sequence[(a,a+1),a,0,5] എന്ന് കൊടുത്തു നോക്കൂ. *a* ആയി 0 മുതൽ 5 വരെയുള്ള പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ച് (*a*, *a* + 1) എന്ന രൂപത്തിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും അടയാളപ്പെടുത്താനുള്ള നിർദേശമാണിത്. അതായത് (0,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ.

നിർദേശങ്ങളിൽ ചെറിയ ഒരു മാറ്റം വരുത്തി Sequence[(*a*,*a*+1),*a*,0,5,0.5] എന്നാക്കി നോക്കൂ. ഇവിടെ *a* ആയി എടുക്കുന്നത് പൂജ്യത്തിൽ തുടങ്ങി 0.5 വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാകണം എന്നതാണ് അവസാനം 0.5 എന്ന് കൊടുക്കുന്നതുകൊണ്ട് ഉദ്ദേശിക്കുന്നത്. (1 വീതമാണ് കൂട്ടേണ്ടതെങ്കിൽ പ്രത്യേകിച്ച് ഒന്നും പറയേണ്ടതില്ല). അപ്പോൾ (0,1), (0.5,1.5), (1,2), ... എന്നിങ്ങനെ (5, 6) വരെയുള്ള ബിന്ദുക്കളാണ് കിട്ടുന്നത്.

ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ നിർദേശത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സവിശേഷതകൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

Sequence[(a,0),a,0,5,0.5]

Sequence[(a,2a),a,–3, 4,0.25]

Sequence[(a,a),a,–3,3,0.2]

Sequence[(a,-a),a,–3,3,0.2]

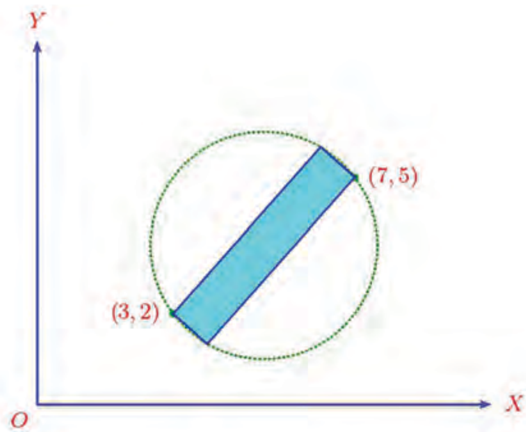
Sequence[(a^2,a),a,–4,4,0.1]

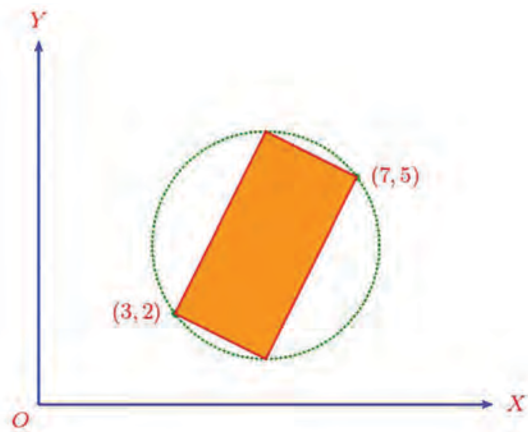
ചതുരക്കണക്കുകൾ

ചിത്രം നോക്കൂ:

ഇവ എതിർമൂലകളായ ഒരു ചതുരം വരയ്ക്കണം

എത്ര വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാം:



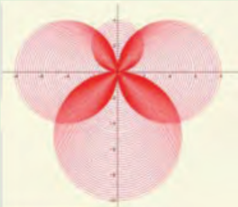


Input Bar ൽ circle[(1,3),2] എന്നെഴുതിയാൽ, ജിയോജിബ്രയിൽ കേന്ദ്രം (1, 3) എന്ന ബിന്ദുവും ആരം 2 ഉം ആയ വൃത്തം കിട്ടും.

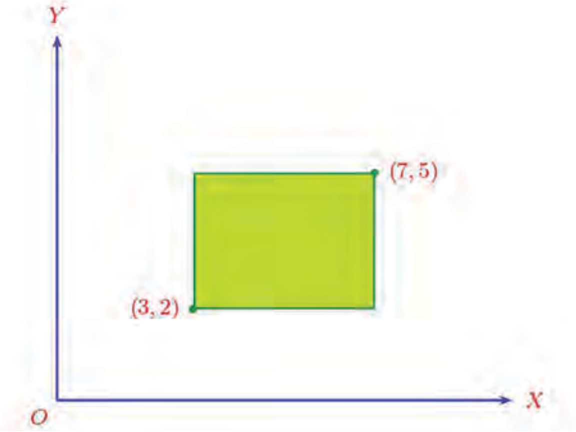
Sequence[circle[(a, 0),1],a,0,5,0.2] എന്ന നിർദേശം നൽകിയാൽ (0, 0), (0.2, 0), (0.4, 0),...,(5, 0) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രമായി, ആരം 1 ആയ വൃത്തങ്ങളും കിട്ടും. ഇതുപോലെ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഓരോ നിർദേശവും നൽകിയാൽ കിട്ടുന്ന ചിത്രങ്ങൾ മനസ്സിൽ കാണാൻ ശ്രമിച്ചു നോക്കൂ. അതിനു ശേഷം ജിയോജിബ്രയിൽ ചെയ്തു നോക്കാം.

- Sequence[circle[(a, 0),a],a,0,10,0.1]
- Sequence[circle[(a, 0),$\frac{a}{4}$],a,0,10,0.1]

ആവശ്യമായ നിർദേശങ്ങൾ നൽകി ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.



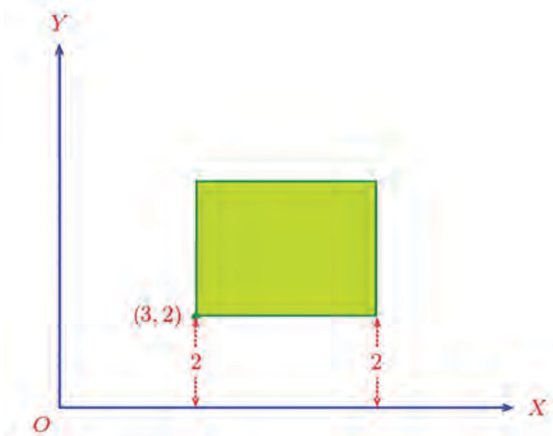
ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമാകണം എന്നുകൂടി പറഞ്ഞാലോ? ഒരെണ്ണമല്ലേ വരയ്ക്കാൻ കഴിയുള്ളൂ?

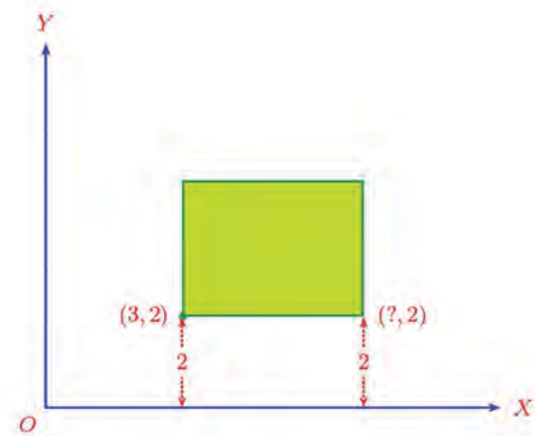


ഈ ചതുരത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എന്താണ്?

അതിന് ചിത്രം അല്പം കൂടി വിശദമാക്കാം. താഴത്തെ ഇടതുമൂലയുടെ y-സൂചകസംഖ്യ 2 ആയതിനാൽ, x-അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് അതിലേക്കുള്ള ഉയരം 2 ആണ്.

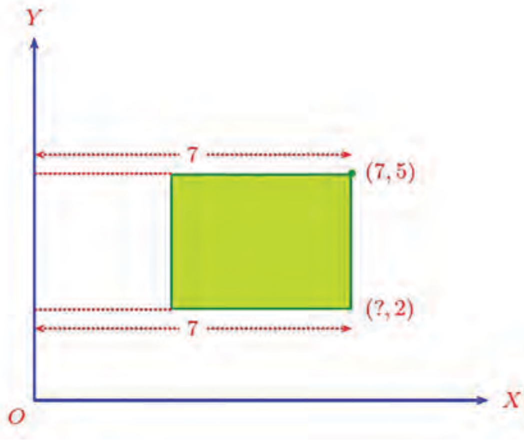
താഴത്തെ വശം x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ വശത്തിന്റെ മറ്റേ മൂലയും ഇതേ ഉയരത്തിലാണ്; അതായത് ഈ മൂലയുടെയും y-സൂചകസംഖ്യ 2 തന്നെ.

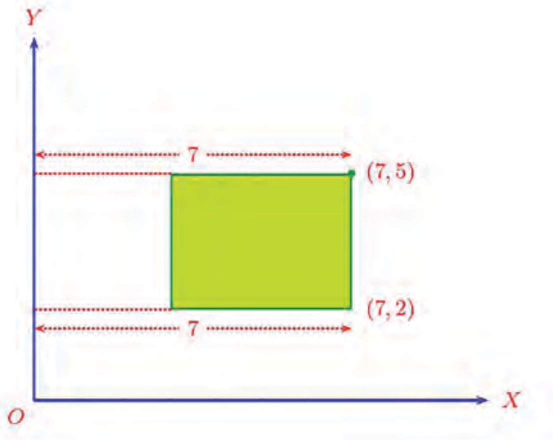




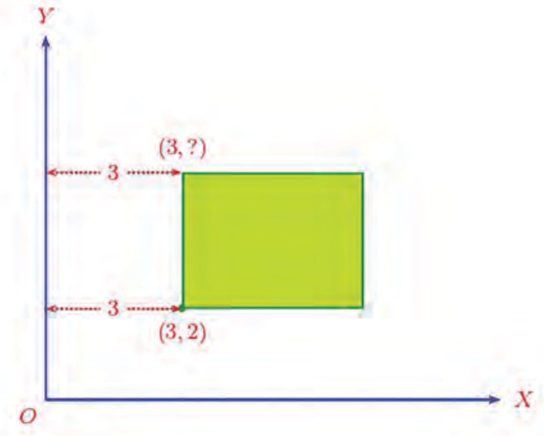
ഈ മൂലയുടെ x-സൂചകസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാൻ, മുകളിലെ വലതുമൂല നോക്കുക. ഇതിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യ 7 ആയതിനാൽ, y-അക്ഷത്തിൽനിന്ന് ഈ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലം 7 ആണ്.

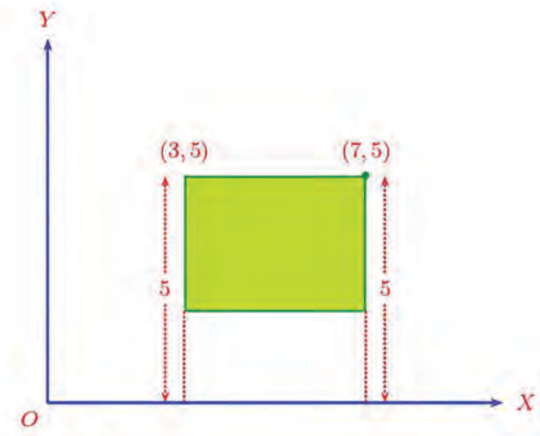
ചതുരത്തിന്റെ വലതുവശം, y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഈ വശത്തിലെ മറ്റേ മൂലയും ഇതേ അകലത്തിലാണ്; അതായത്, അതിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യയും 7 തന്നെ.





ഇതുപോലെ ചതുരത്തിന്റെ ഇടതു മേൽമൂലയും കണ്ടുപിടിക്കാം:





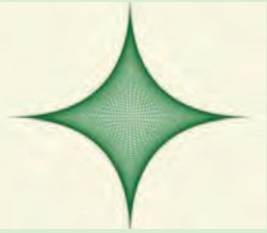
ജിയോജിബ്രയിൽ

Segment[(2,-1), (3,5)]

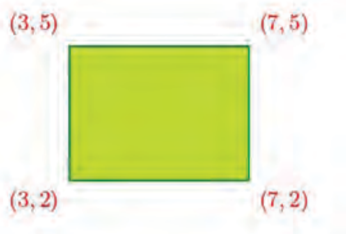
എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ (2, –1), (3, 5) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരക്കഷണം കിട്ടും. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിർദേശങ്ങൾ തരുന്ന വരകളുടെ പ്രത്യേകതകൾ ചർച്ച ചെയ്യുക.

- Sequence[segment[(*a*, 0),(*a*, 3)],*a*,0,5,0.2]
- Sequence[segment[(*a*, 0),(*a*, *a*)],*a*,0,5,0.2]
- Sequence[segment[(0, 3),(*a*, 0)],*a*,–4,4,0.1]
- Sequence[segment[(*a*, 0),(0, *a*)],*a*, –3,3,0.2]
- Sequence[segment[(*a*, 0),(0,5 – *a*)],*a*,0,5,0.1]

ആവശ്യമായ നിർദേശങ്ങൾ കൊടുത്ത് ഈ ചിത്രം വരയ്ക്കുക.



ചതുരത്തിന്റെ നാലു മൂലകളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ ഒരുമിച്ചു നോക്കൂ:



സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിച്ച മാർഗവും ഒന്നുകൂടി നോക്കൂ. ഉപയോഗിച്ച തത്വമെന്താണ് ?

x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി നീങ്ങുമ്പോൾ y-സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല; y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി നീങ്ങുമ്പോൾ x-സൂചകസംഖ്യ മാറുന്നില്ല;

വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ മറ്റൊരു ചതുരം നോക്കൂ:

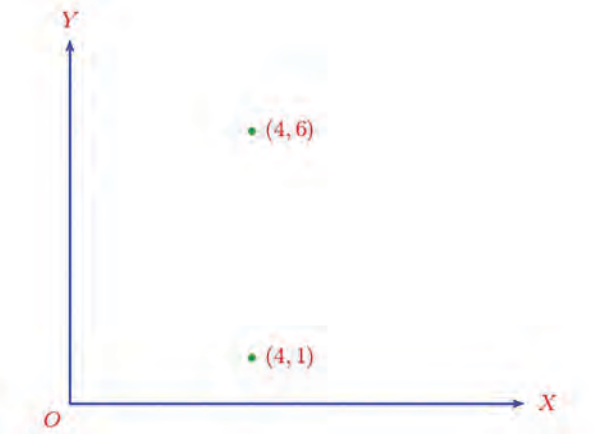
ഇതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കും ?

ആദ്യം ഇടതുവശത്തെ താഴത്തെ മൂല നോക്കാം. ഇടതുവശത്തെ മുകളിലെ മൂലയുടെ x-സൂചക സംഖ്യ 2; ഈ വശം y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, താഴത്തെ മൂലയുടെ x-സൂചക സംഖ്യയും 2 തന്നെ.

ഈ മൂല താഴത്തെ വശത്തിലുമാണല്ലോ. താഴത്തെ വശത്തിലെ വലത് മൂലയുടെ y-സൂചകസംഖ്യ 1; ഈ വശം x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനാൽ, ഇടത് മൂലയുടെ y-സൂചക സംഖ്യയും 1 തന്നെ.

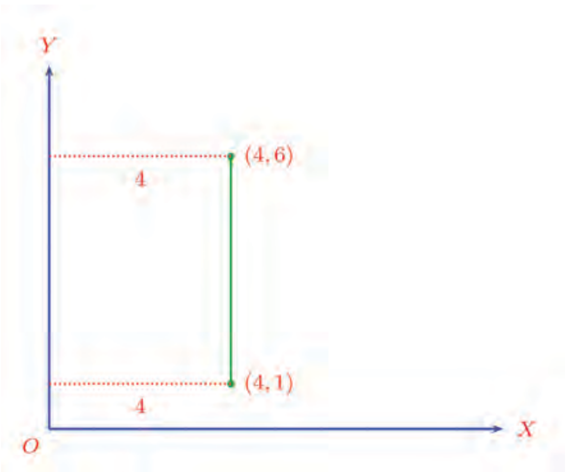
ഇതുപോലെ ആലോചിച്ച്, വലതു മേൽമൂലയും കണക്കാക്കാം:

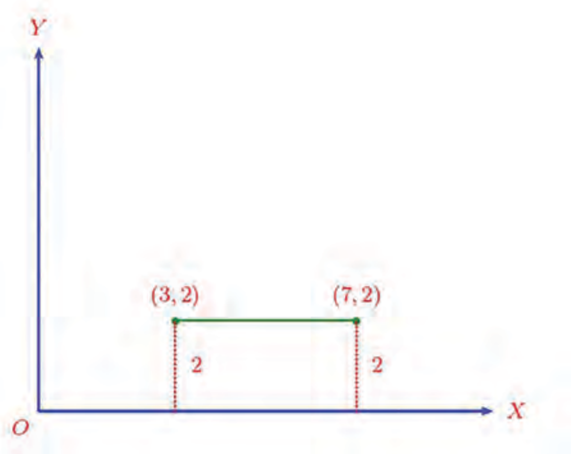
ഏതു രണ്ടു ജോടി ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ തന്നാലും, ഇവ എതിർമൂലകളായ ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ ? ബിന്ദുക്കൾ ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും തരത്തിൽ ആയാലോ ?



എന്തുകൊണ്ടാണ് ഈ രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലെയും ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയാത്തത് ?

ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര y-അക്ഷത്തിനും, രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര x-അക്ഷത്തിനും സമാന്തരമല്ലേ ?





വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായ ഏതു ചതുരത്തിന്റെയും വികർണ്ണം, അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാകാൻ കഴിയില്ലല്ലോ.

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തുപറയാം ?

- രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ x-സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര y-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്

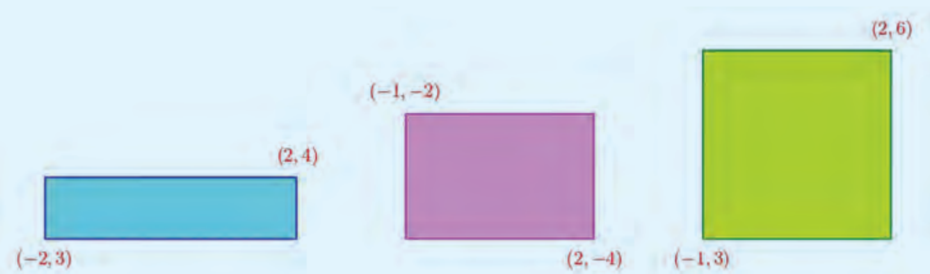
- രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ y-സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വര x-അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമാണ്

ഈ രണ്ടു തരത്തിലുമുള്ള ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല.

അപ്പോൾ ഇത്തരത്തിലുള്ള ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകളെക്കുറിച്ച് എന്തു പറയാം ?

രണ്ടു നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കൾ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ചതുരം വരയ്ക്കാൻ കഴിയണമെങ്കിൽ, ബിന്ദുക്കളുടെ x-സൂചകസംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമാകണം; y-സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമാകണം.

(1) ചുവടെയുള്ള ചതുരങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമാണ്. ഓരോ ചതുരത്തിന്റെയും മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക:



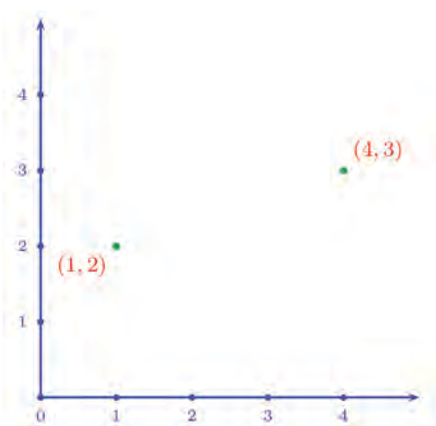
(2) അക്ഷങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ ചുവടെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ജോടികൾ, ഇടതു-വലതു, മേൽ-കീഴ് സ്ഥാനങ്ങൾ ശരിയായി അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ എതിർമൂലകളായും വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും വരയ്ക്കുന്ന ചതുരങ്ങളുടെ മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) (3,5), (7,8) (ii) (6,2), (5, 4) (iii) (−3, 5), (−7,1) (iv) (−1, −2), (−5, −4)

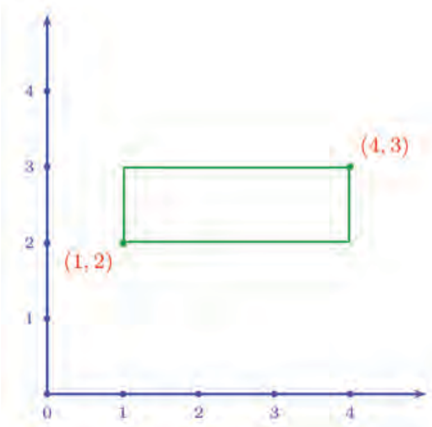
നീളങ്ങളും അകലങ്ങളും

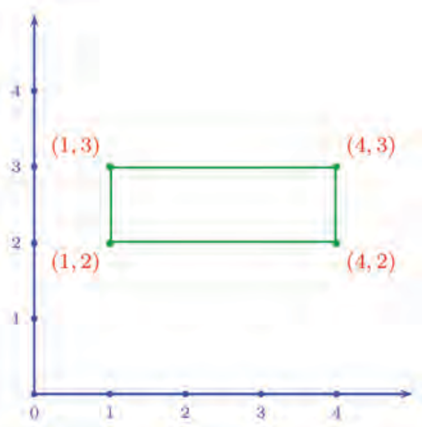
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.



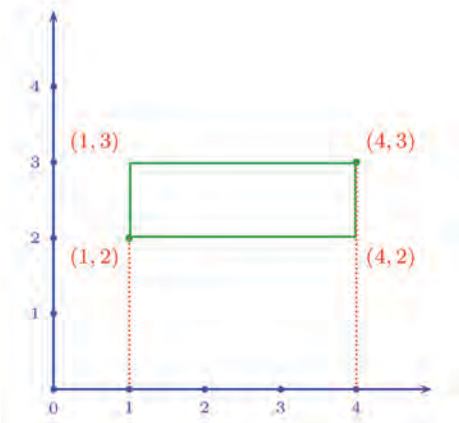
ഇവ എതിർമൂലകളായും, വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരമായും ചതുരം വരയ്ക്കാമല്ലോ; അതിന്റെ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുകയും ചെയ്യാം:





ഇനി ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമോ ?

താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം x-അക്ഷത്തിലെ 1, 4 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തന്നെയല്ലേ ?



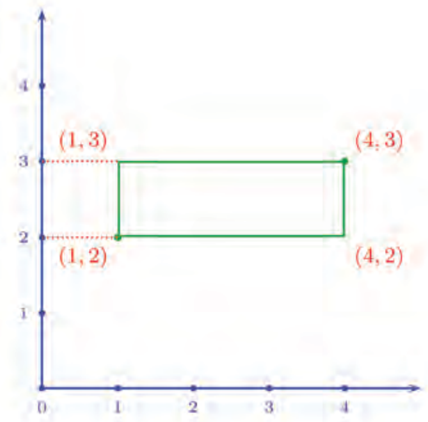
ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയാണ് ?

അക്ഷങ്ങളിൽ അകലങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്താൻ ഏതു നീളവും ഏകകമായെടുക്കാമെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ, നീളങ്ങളും അകലങ്ങളുമെല്ലാം ഈ ഏകകത്തിന്റെ മടങ്ങായി മാത്രമേ പറയാൻ കഴിയൂ.

അപ്പോൾ x-അക്ഷത്തിൽ 1, 4 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, ഈ ഏകകത്തിന്റെ 3 മടങ്ങ്.

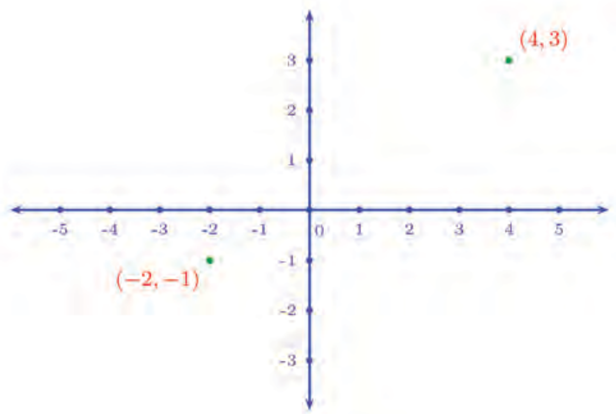
സാധാരണയായി, ഇത്തരം അളവുകൾ ഏകകം ഒന്നുമില്ലാതെ സംഖ്യകൾ മാത്രമായാണ് പറയുന്നത്. അപ്പോൾ ചതുരത്തിലെ മുകളിലും താഴെയുമുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം 3.

ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളമോ ?

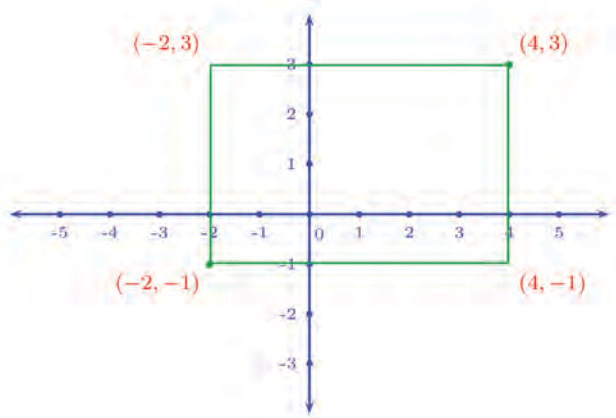


y-അക്ഷത്തിലെ 2, 3 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം; അതായത് 1

ഇനി എതിർമൂലകൾ ഇങ്ങനെ ആയാലോ ?



ചതുരം വരച്ച്, മറ്റു മൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകളും കണക്കാക്കാം:



താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം, x-അക്ഷത്തിലെ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ് ?

ഈ അകലം എത്രയാണ് ?

ഇതുപോലെ, ചതുരത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമോ ?

പൊതുവേ എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ആയതും വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായതുമായ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ പറയാം ?

- താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം, x-അക്ഷത്തിൽ x_1, x_2 എന്നീ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്
- ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം, y-അക്ഷത്തിൽ y_1, y_2 എന്നീ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലമാണ്

ഈ അകലങ്ങൾ എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

അക്ഷങ്ങളോരോന്നിനേയും ഒരു സംഖ്യാരേഖയായി കാണാം. അപ്പോൾ ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഓരോ അകലവും അടയാളപ്പെടുത്തിയ സംഖ്യകളിൽ വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുതു കുറച്ചതാണ്; ഈ ക്രിയയെ കേവലമൂല്യമായി എഴുതുകയും ചെയ്യാം (ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **അകലങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

മുകളിൽ പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങൾ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

എതിർമൂലകളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ഉം വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങൾക്ക് സമാന്തരവും ആയ ചതുരത്തിന്റെ

- താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം $|x_1 - x_2|$
- ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം, $|y_1 - y_2|$

ഇനി എതിർമൂലകൾ അറിഞ്ഞു കഴിഞ്ഞാൽ, അക്ഷങ്ങൾ വരയ്ക്കാതെ തന്നെ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

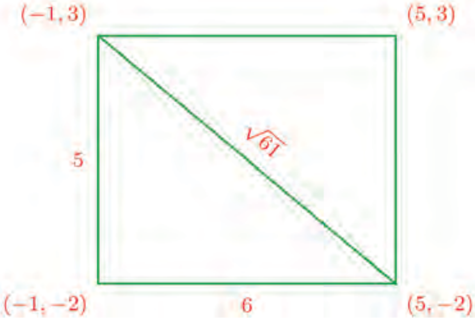
ഉദാഹരണമായി, എതിർമൂലകൾ $(-1, 3)$, $(5, -2)$ എന്നായാലോ ?

താഴത്തെയും മുകളിലെയും വശങ്ങളുടെ നീളം $5 - (-1) = 6$

ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ നീളം $3 - (-2) = 5$

എതിർമൂലകൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നത്, ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണമാണല്ലോ. അതിന്റെ നീളം എത്രയാണ് ?

$$\sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61}$$

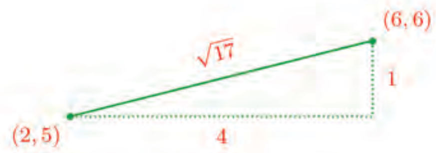


x-സൂചകസംഖ്യകളും y-സൂചകസംഖ്യകളും വ്യത്യസ്തമായ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും ഒരു ചതുരത്തിന്റെ എതിർമൂലകളാകാമല്ലോ.

അപ്പോൾ അത്തരം ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലവും ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി (2, 5), (6, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം? ഇവ എതിർ മൂലകളായി വരുന്ന ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം 6 – 2 = 4 ഉം 6 – 5 = 1 ഉം; അപ്പോൾ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം

$$\sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$



ഇക്കാര്യം പൊതുവേ എങ്ങനെ പറയാം?

(i) സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ആയ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ചതുരത്തിന്റെ എതിർ മൂലകൾ ആകണമെങ്കിൽ $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ എന്നായിരിക്കണം.

(ii) ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|$

(iii) ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം ചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളമായതിനാൽ, ഈ അകലം $\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$

ഏതു സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ കേവലമൂല്യത്തിന്റെയും വർഗം ഒന്നുതന്നെയാണെന്ന് ഒമ്പതാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ (**രേഖീയസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **കേവലമൂല്യം** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ

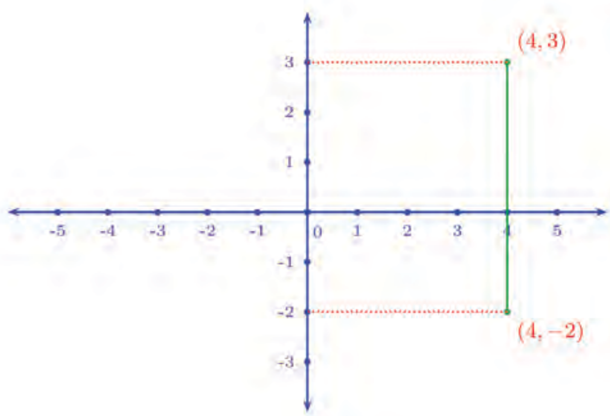
$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ഇതെല്ലാം ചേർത്ത് ഇങ്ങനെ പറയാം:

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) എന്നും, ഇവയിൽ $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ എന്നും ആണെങ്കിൽ, ഈ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ഇനി ഏതെങ്കിലും സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമായ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും?

ഉദാഹരണമായി, സൂചകസംഖ്യകൾ (4, −2) ഉം (4, 3) ഉം ആയ ബിന്ദുക്കളെടുക്കാം:



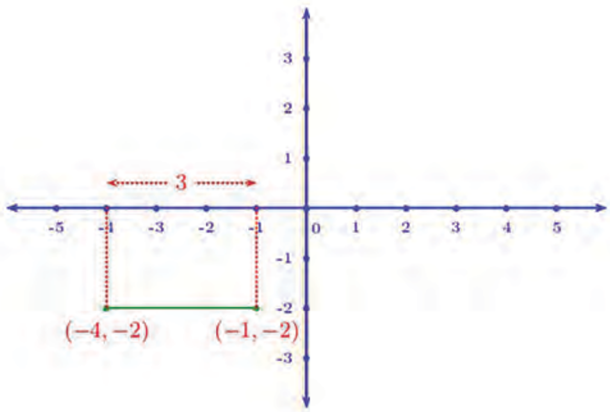
ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം, y-അക്ഷത്തിൽ 3, –2 എന്നടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം തന്നെയല്ലേ ?

അതായത് $3 - (-2) = 5$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഒരേ x സൂചകസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയെ (x, y_1), (x, y_2) എന്നെടുക്കാം; അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $|y_1 - y_2|$.

ഒരേ y-സൂചകസംഖ്യകളായ ബിന്ദുക്കളായാലോ ?



രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്ക് ഒരേ y സൂചകസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, അവയെ (x_1, y), (x_2, y) എന്നെടുക്കാം; അവ തമ്മിലുള്ള അകലം $|x_1 - x_2|$.

ഇനി, സൂചകസംഖ്യകൾ വ്യത്യസ്തമായ ബിന്ദുക്കൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച $\sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ $x_1 = x_2$ എന്നെടുത്താലോ ?

$$\sqrt{|y_1 - y_2|^2} = |y_1 - y_2|$$

$y_1 = y_2$ എന്നെടുത്താലോ ?

$$\sqrt{|x_1 - x_2|^2} = |x_1 - x_2|$$

അപ്പോൾ ഏതെങ്കിലും സൂചകസംഖ്യകൾ തുല്യമായ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കാനും ഈ ക്രിയതന്നെ ഉപയോഗിക്കാം:

സൂചകസംഖ്യകൾ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ആയ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

ഉദാഹരണമായി, സൂചകസംഖ്യകൾ (4, –2), (–3, –1) ആയ ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള അകലം

$$\sqrt{\left(4-(-3)\right)^2 + \left(-2-(-1)\right)^2} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

സൂചകസംഖ്യകൾ (–2, 1) എന്ന ബിന്ദുവും ആധാരബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലമോ ?

$$\sqrt{(-2-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{5}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ

സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) ആയ ബിന്ദുവും, ആധാരബിന്ദുവും തമ്മിലുള്ള അകലം $\sqrt{x^2+y^2}$

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

സൂചകസംഖ്യകൾ (–1, 2), (3, 5), (9, – 3) ആയ ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണോ ?

മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ വരയിലാണെങ്കിൽ, അവ തമ്മിലുള്ള അകലങ്ങളിലെ ഏറ്റവും വലുത്, മറ്റു രണ്ട് അകലങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കണം.

കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾക്ക് *A, B, C* എന്നു പേരിടാം. അപ്പോൾ

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2+(2-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(3-9)^2+(5-(-3))^2} = \sqrt{36+64} = 10$$

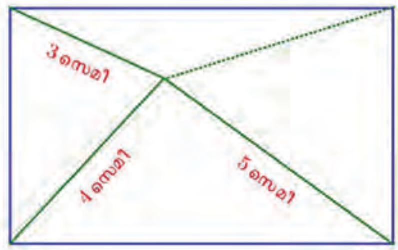
$$AC = \sqrt{(-1-9)^2+(2-(-3))^2} = \sqrt{100+25} = 5\sqrt{5}$$

ഇവയിൽ ഏറ്റവും വലുത് *AC* (അതെങ്ങനെ കിട്ടി ?). ഇനി *AB, BC* ഇവയുടെ നീളം കൂട്ടിയാൽ 15; ഇത് *AC* യുടെ നീളമല്ല. അപ്പോൾ *A, B, C* ഇവ ഒരേ വരയിലുമല്ല.

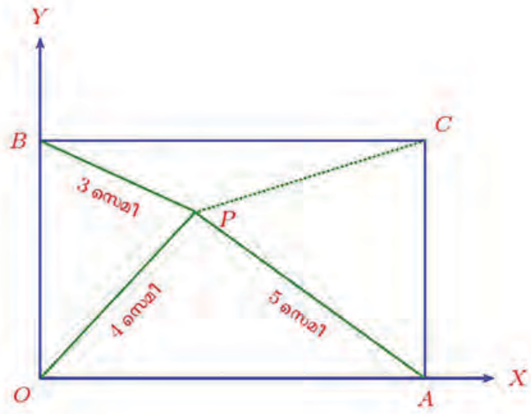
മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ഒരു ചതുരത്തിനകത്തെ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ചതുരത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിലേക്കുള്ള അകലം 3 സെന്റിമീറ്റർ, 4 സെന്റിമീറ്റർ, 5 സെന്റിമീറ്റർ എന്നിങ്ങനെയാണ്. നാലാമത്തെ മൂലയിലേക്കുള്ള അകലം എന്താണ് ?

ഒരു ചിത്രം വരയ്ക്കാം:



ചതുരത്തിന്റെ താഴത്തെ ഇടതുമൂല ആധാരബിന്ദുവായും, അതിലൂടെയുള്ള രണ്ടു വശങ്ങൾ അക്ഷങ്ങളായും എടുക്കാം:

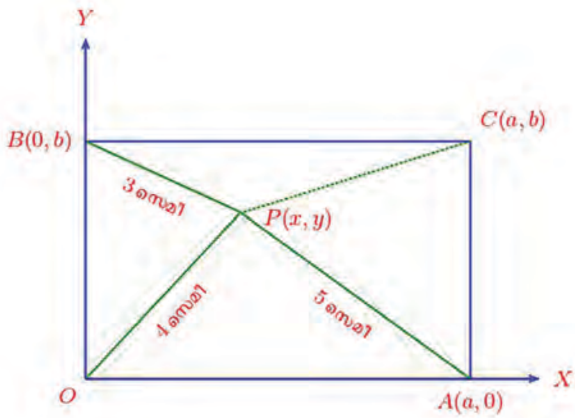


ചിത്രത്തിൽ A എന്ന ബിന്ദു x-അക്ഷത്തിലായതിനാൽ, അതിന്റെ y-സൂചകസംഖ്യ 0 ആണ്; അതിന്റെ x-സൂചകസംഖ്യ a എന്നെടുത്താൽ, A യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(a, 0)$

ഇതുപോലെ B യുടെ y-സൂചകസംഖ്യ b എന്നെടുത്താൽ, അതിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ $(0, b)$

അപ്പോൾ C യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (a, b) ആകണം.

P യുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ (x, y) എന്നെടുക്കാം:



ഇനി അറിയാവുന്ന നീളമെല്ലാം സൂചകസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചെഴുതാം:

$$x^2 + (y - b)^2 = 9$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 25$$

നമുക്കു കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് PC ആണല്ലോ; അതിന്റെ വർഗം

$$(x - a)^2 + (y - b)^2$$

മുകളിലെഴുതിയ മൂന്നു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന് ഇത് അരിച്ചെടുക്കാൻ പറ്റുമോ ?

ഇതിലെ ആദ്യത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും സമവാക്യങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ

$$(x^2 + (y - b)^2) + (x - a)^2 + y^2 = 9 + 25$$

അതായത്,

$$x^2 + y^2 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 34$$

രണ്ടാമത്തെ സമവാക്യമനുസരിച്ച്, $x^2 + y^2 = 16$ ആണല്ലോ. ഇക്കാര്യം ഇപ്പോൾ കിട്ടിയ സമവാക്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചാൽ,

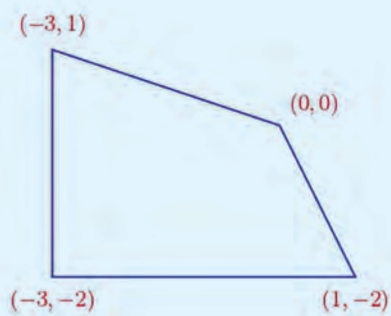
$$16 + (x - a)^2 + (y - b)^2 = 34$$

അപ്പോൾ

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 34 - 16 = 18$$

അപ്പോൾ PC യുടെ നീളം $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ

(1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയും വികർണ്ണങ്ങളുടെയും നീളം കണക്കാക്കുക.



(2) (2, 1), (3, 4), (−3, 6) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ, ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) ആധാരബിന്ദു കേന്ദ്രവും, ആരം 10 ഉം ആയി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നു.

(i) സൂചകസംഖ്യകൾ (6, 9), (5, 9), (6, 8) ആയ ബിന്ദുക്കൾ ഈ വൃത്തത്തിനകത്തോ, പുറത്തോ, വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(ii) ഈ വൃത്തത്തിലെ 8 ബിന്ദുക്കളുടെ സൂചകസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(4) കേന്ദ്രത്തിന്റെ സൂചകസംഖ്യകൾ (1, 1) ഉം, ആരം $\sqrt{2}$ ഉം ആയ വൃത്തം x-അക്ഷത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെയും, y-അക്ഷത്തെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെയും സൂചകസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(5) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ (0, 0), (4, 0), (1, 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കളാണ്. ഇതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആരവും കണ്ടുപിടിക്കുക.