5 രണ്ടാംകൃതി സമവാക്യങ്ങൾ

വർഗപ്രശ്നങ്ങൾ

ഒരു കണക്കിൽ നിന്നു തുടങ്ങാം:

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, ചുറ്റളവ് 36 മീറ്റർ ആയി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു ?

പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $36 \div 4 = 9$ മീറ്റർ; അപ്പോൾ പഴയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $9 - 1 = 8$ മീറ്റർ എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ചോദ്യം ഇങ്ങനെയായാലോ ?

> ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ കൂട്ടി വലുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 36 ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരുന്നു ?

പുതുക്കിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ് ?

$$\sqrt{36} = 6 \text{ മീറ്റർ, അല്ലേ ?}$$

അപ്പോൾ ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം $6 - 1 = 5$ മീറ്റർ.

(1) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ കുറച്ച് ചെറുതാക്കിയപ്പോൾ, പരപ്പളവ് 49 ചതുരശ്രമീറ്ററായി. ആദ്യത്തെ സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്ര മീറ്ററായിരുന്നു ?

(2) സമചതുരാകൃതിയായ ഒരു മൈതാനത്തിനു ചുറ്റും 2 മീറ്റർ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. മൈതാനവും പാതയും ചേർന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 1225 ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്. മൈതാനത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

മറ്റൊരു കണക്ക്:

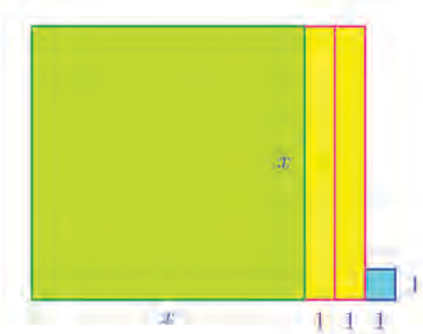
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

പച്ച നിറത്തിലൊരു സമചതുരവും, അതേ ഉയരമുള്ള രണ്ടു മഞ്ഞച്ചതുരങ്ങളും, നീല നിറത്തിലൊരു ചെറുസമചതുരവും ചേർത്തു വച്ചിരിക്കുന്നു. മഞ്ഞച്ചതുരങ്ങൾ ഓരോന്നിന്റെയും വീതിയും, നീല സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവുമെല്ലാം 1 മീറ്ററാണ്; ചിത്രത്തിന്റെ ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്ററും.

പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം കണ്ടുപിടിക്കണം.

നേരിട്ടാലോചിച്ചു കണക്കാക്കാൻ വിഷമമാണ്, അല്ലേ?

ബീജഗണിതം പരീക്ഷിക്കാം. പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം.



ആകെ പരപ്പളവ് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$$

ആകെ പരപ്പളവ് 100 ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്; അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം:

$x^2 + 2x + 1 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

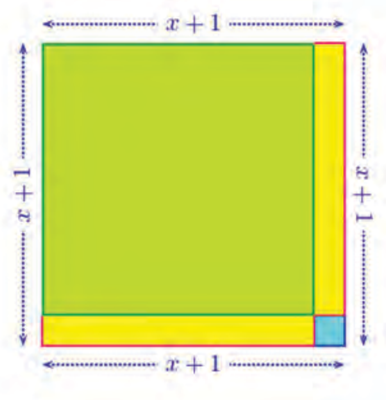
$x^2 + 2x + 1$ എന്ന രൂപം പരിചയമുണ്ടോ?

എട്ടാം ക്ലാസിലെ **വർഗസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ

$$(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

എന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

ചിത്രത്തിലെ ചതുരങ്ങൾ മാറ്റിയടുക്കിയും ഇതു കാണാം.



അപ്പോൾ പ്രശ്നം മാറ്റിയെഴുതാം:

$(x + 1)^2 = 100$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ് ?

ഇനി $x + 1 = 10$ എന്നും, അങ്ങനെ $x = 9$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

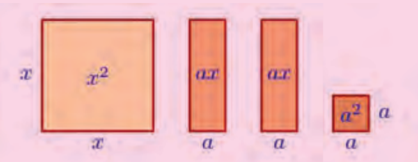
അതായത്, പച്ച സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം 9 മീറ്ററാണ്.

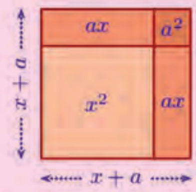
ജ്യാമിതീയവർഗം

x, a എന്നീ ഏതു രണ്ടു സംഖ്യകളെടുത്താലും

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

ആണല്ലോ. x, a ഇവ അധിസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഈ ബീജഗണിതവാക്യം ചിത്രമാക്കാം:





(1) അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയപ്പോൾ 289 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(2) 6 ന്റെ അടുത്തടുത്ത രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിനോട് 9 കൂട്ടിയപ്പോൾ 729 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(3) 9, 11, 13, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ കുറച്ച് പദങ്ങളുടെ തുകയും 16 ഉം കൂട്ടിയപ്പോൾ 256 കിട്ടി. എത്ര പദങ്ങളാണ് കൂട്ടിയത് ?

വർഗത്തികവ്

ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് ?

ആദ്യം പ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിതത്തിലാക്കാം. ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വലിയ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 2$ മീറ്റർ; പരപ്പളവ്, $x (x + 2) = x^2 + 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ.

ഇനി ചതുരപ്രശ്നം, ബീജഗണിതപ്രശ്നമാക്കാം:

$x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ് ?

ഇനിയെന്തു ചെയ്യും ?

മുമ്പു ചെയ്ത ഒരു കണക്കിൽ $x^2 + 2x + 1$ നെ $(x + 1)^2$ എന്നു മാറ്റിയെഴുതി മുന്നോട്ടു പോയത് ഓർമ്മയുണ്ടോ? ഈ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 2x$ മാത്രമേയുള്ളൂ.

1 കൂട്ടിയാൽപ്പോരേ?

അപ്പോൾ ഇങ്ങനെ തുടരാം:

(i) $x^2 + 2x = 224$ ആണെങ്കിൽ $x^2 + 2x + 1 = 224 + 1 = 225$

(ii) അതായത്, $(x + 1)^2 = 225$

(iii) $(x + 1)^2 = 225$ ആണെങ്കിൽ $x + 1 = \sqrt{225} = 15$

(iv) $x + 1 = 15$ ആണെങ്കിൽ $x = 14$

അങ്ങനെ ചതുരത്തിന്റെ ചെറിയ വശം 14 മീറ്റർ എന്നു കിട്ടി.

അപ്പോൾ വലിയ വശം $14 + 2 = 16$ മീറ്റർ

ഈ ചോദ്യം തന്നെ അല്പമൊന്നു മാറ്റി ഇങ്ങനെ ആക്കിയാലോ?

> ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 20 മീറ്റർ നീളം കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്റർ. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?

ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ മാറും:

$x^2 + 20x = 224$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ്?

ഇവിടെയും 1 കൂട്ടിയാൽ സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ സംഖ്യ $225 = 15^2$ ആകും; പക്ഷേ, ഇടതുവശത്തെ ബീജഗണിതവാക്യം $x^2 + 20x + 1$ എന്നാണാകുന്നത്.

ഇതിനെ $(x + a)^2$ എന്ന രൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ?

a ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും

$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$ ആണല്ലോ.

നമ്മുടെ പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 20x$ ആണുള്ളത്. അതായത്, പൊതുവായ സമവാക്യത്തിലെ $2ax$ ന്റെ സ്ഥാനത്ത് $20x$, അപ്പോൾ, a ആയി 10 എടുത്തു നോക്കിയാലോ?

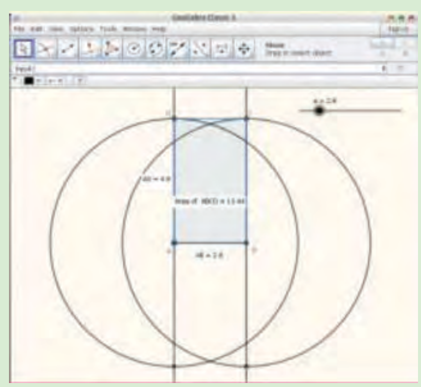
$$(x + 10)^2 = x^2 + 20x + 100$$

പ്രശ്നത്തിൽ $x^2 + 20x = 224$ ആണ്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച് 100 കൂട്ടി തുടർന്നാലോ?

$$\begin{aligned} x^2 + 20x &= 224 \\ x^2 + 20x + 100 &= 324 \\ (x + 10)^2 &= 324 \\ x + 10 &= \sqrt{324} = 18 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

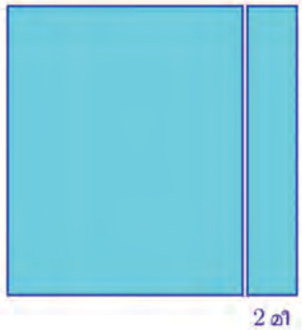
അങ്ങനെ ഈ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8 മീറ്ററും, 28 മീറ്ററുമാണെന്നു കണക്കാക്കാം.

വലിയവശം ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 കൂടുതലായ ചതുരങ്ങൾ ജിയോജിബ്രയുടെ സഹായത്താൽ വരക്കാം. ഇതിനായി min = 0 ആയ a എന്ന സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കുക. നീളം a ആയി ഒരു വര AB വരച്ച ശേഷം അതിന്റെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി AB യ്ക്കു ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. A, B ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളായി ആരം $a + 2$ വരത്തക്കവിധം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഓരോ വൃത്തവും ലംബങ്ങളുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ C, D അടയാളപ്പെടുത്തുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് $ABCD$ എന്ന ചതുരം വരയ്ക്കുക. ഇനി വരകളും വട്ടങ്ങളും മറച്ചു വയ്ക്കാം. ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 224 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ്?



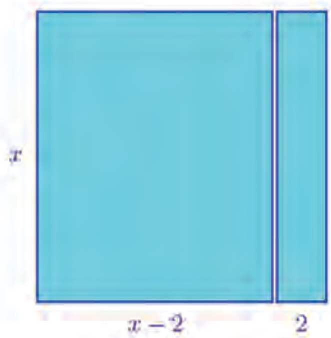
വേറൊരു ചതുരക്കണക്ക്:

ഒരു സമചതുരത്തിൽ നിന്ന് 2 മീറ്റർ വീതിയുള്ള ഒരു കഷണം മുറിച്ചുമാറ്റുന്നു.



മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 99 ചതുരശ്രമീറ്റർ; സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് ?

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം x മീറ്റർ, $x - 2$ മീറ്റർ എന്നാകും:



മിച്ചമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് $x(x - 2) = x^2 - 2x$ ചതുരശ്രമീറ്റർ എന്നുമാകും.

അപ്പോൾ പ്രശ്നത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇതാണ്.

$x^2 - 2x = 99$ ആണെങ്കിൽ x എന്താണ് ?

$x^2 + 2x$ നെപ്പോലെ $x^2 - 2x$ നെയും വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ പറ്റുമോ ?

എട്ടാം ക്ലാസിലെ മറ്റൊരു സമവാക്യം ഓർത്തുനോക്കൂ:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

ഇനി പ്രശ്നത്തിലെ x കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ

$$\begin{aligned} x^2 - 2x &= 99 \\ x^2 - 2x + 1 &= 100 \\ (x - 1)^2 &= 100 \\ x - 1 &= 10 \\ x &= 11 \end{aligned}$$

സമചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 11 മീറ്റർ.

മറ്റൊരു കണക്ക്:

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ നീളം, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളത്തേക്കാൾ 5 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 12 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്ററും. ഈ വശങ്ങളുടെ നീളം എത്രയാണ് ?

ലംബവശങ്ങളിൽ ചെറുതിന്റെ നീളം x എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $x + 5$ ആകും; പരപ്പളവോ ?

അപ്പോൾ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ബീജഗണിതത്തിലാക്കിയാൽ

$$\frac{1}{2}x(x + 5) = 12$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതുതന്നെ

$$x^2 + 5x = 24$$

എന്നെഴുതാം.

$x^2 + 5x$ നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടിയാലാണ്, $x^2 + 2ax + a^2$ എന്ന രൂപത്തിലാകുക ?

$$x^2 + 5x = x^2 + \left(2 \times \frac{5}{2}\right)x$$

എന്നെഴുതി നോക്കൂ.

ഇതിനെ വർഗരൂപത്തിലാക്കാൻ കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ് ?

$$x^2 + \left(2 \times \frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2$$

അപ്പോൾ നമ്മുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരു ഭാഗത്തും $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ കൂട്ടാം.

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 24 + \frac{25}{4}$$

അതായത്

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$x + \frac{5}{2} = \sqrt{\frac{121}{4}} = \frac{11}{2}$$

എന്നും, അതിൽനിന്ന്

$$x = \frac{11}{2} - \frac{5}{2} = 3$$

എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

അതായത് ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 3 സെന്റിമീറ്ററും, 8 സെന്റിമീറ്ററും.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ഒരു ചതുരം ഉണ്ടാക്കണം. അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം ?

ചതുരത്തിന്റെ നീളം, വീതി ഇവയുടെ തുക 50 മീറ്ററാണല്ലോ. അപ്പോൾ, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $50 - x$ മീറ്റർ; പരപ്പളവ് $x(50 - x) = 50x - x^2$ ചതുരശ്ര മീറ്റർ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$50x - x^2 = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

$50x - x^2$ എന്നതിനെ വർഗരൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയില്ലല്ലോ. സമവാക്യം അല്പം മാറ്റിയെഴുതാം. $50x$ എന്ന സംഖ്യയിൽനിന്ന് x^2 കുറച്ചാൽ 525 കിട്ടണമെങ്കിൽ, തിരിച്ചു കുറച്ചാൽ അതിന്റെ ന്യൂനമായ −525 കിട്ടണമല്ലോ. അപ്പോൾ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$x^2 - 50x = -525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

ഇനി $x^2 - 50x$ നോട് ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടി വർഗരൂപത്തിലാക്കണം. കൂട്ടേണ്ട സംഖ്യ എന്താണ് ?

$$x^2 - 50x + 625 = (x - 25)^2$$

ഇനി നമ്മുടെ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ പരിഹരിക്കാം:

$$\begin{aligned} x^2 - 50x &= -525 \\ x^2 - 50x + 625 &= -525 + 625 = 100 \\ (x - 25)^2 &= 100 \\ x - 25 &= 10 \\ x &= 35 \end{aligned}$$

അതായത്, ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 35 മീറ്ററും 15 മീറ്ററും.

ഈ കണക്ക് മറ്റൊരു രീതിയിലും ചെയ്യാം;

ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററായ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 25 മീറ്ററാണല്ലോ; അതിനാൽ പരപ്പളവ് 625 ചതുരശ്രമീറ്ററും.

കണക്കിലെ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, 525 ചതുരശ്രമീറ്ററാണല്ലോ; അപ്പോൾ അതേതായാലും സമചതുരമല്ല. അതിനാൽ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും നീളം 25 മീറ്ററുമല്ല.

രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും നീളം 25 മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാണെങ്കിൽ, ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാകും; രണ്ടും 25 മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവാണെങ്കിൽ, ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവാകും. അപ്പോൾ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 25 മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലും, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം 25 മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവുമാകണം.

ഈ നീളങ്ങളുടെ തുക 50 തന്നെ ആകണം എന്നതിനാൽ (എന്തുകൊണ്ട് ?), കൂടിയതും കുറഞ്ഞതും ഒരേ അളവിലായിരിക്കണം.

അത് x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, വശങ്ങളുടെ നീളം $25 + x$ മീറ്റർ, $25 - x$ മീറ്റർ എന്നാകും;

പരപ്പളവ് $(25 + x)(25 - x)$ ചതുരശ്രമീറ്ററും.

അപ്പോൾ കണക്കിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെയാകും:

$(25 + x)(25 - x) = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

ഇതിലെ $(25 + x)(25 - x)$ എന്നതിനെ ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ.

$$(25 + x)(25 - x) = 625 - x^2$$

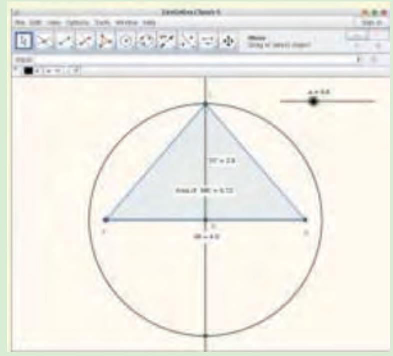
(എട്ടാം ക്ലാസിലെ **വർഗസമവാക്യങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വർഗവ്യത്യാസം** എന്ന ഭാഗം).
ഇതുപയോഗിച്ച്, ചോദ്യം ഇങ്ങനെയാക്കാം:

$625 - x^2 = 525$ ആകണമെങ്കിൽ x എന്താകണം ?

ഇതിൽനിന്ന് $x^2 = 625 - 525 = 100$ എന്നും, തുടർന്ന് $x = 10$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

അതായത്, വശങ്ങളുടെ നീളം $25 + 10 = 35$ മീറ്ററും $25 - 10 = 15$ മീറ്ററും.

a എന്ന പേരിൽ min = 2, max = 10 ആയ ഒരു സ്ലൈഡർ ഉണ്ടാക്കി, നീളം a ആയ ഒരു വര വരച്ച് അതിന്റെ മധ്യബിന്ദുവും ലംബസമഭാജിയും അടയാളപ്പെടുത്തുക. മധ്യബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ആരം $a - 2$ ആയ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. വൃത്തം ലംബസമഭാജിയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി ത്രികോണം പൂർത്തിയാക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് അടയാളപ്പെടുത്തുക. സ്ലൈഡറിന്റെ വില മാറ്റി നോക്കൂ. പരപ്പളവ് 12 ആകുന്നത് എപ്പോഴാണ് ?



(1) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണം ഉണ്ടാക്കണം.

ഉയരം, പാദത്തെക്കാൾ 2 മീറ്റർ കുറവാകണം; പരപ്പളവ് 12 ചതുരശ്രമീറ്ററുമാകണം. ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തായിരിക്കണം ?

(2) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ ഒരു വശത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങിൽനിന്ന് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ കുറച്ചതാണ് അതിനു ലംബമായ വശം; രണ്ടു മടങ്ങിനോട് ഒരു സെന്റിമീറ്റർ കൂട്ടിയതാണ് കർണ്ണം. വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ് ?

(3) 2.6 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പ് ഭിത്തിയിൽ ചാരിവച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പിന്റെ ചുവട്, ഭിത്തിയിൽ നിന്ന് 1 മീറ്റർ അകലെയാണ്. കമ്പിന്റെ താഴത്തെ അറ്റം അല്പം മുന്നോട്ട് നീക്കിയപ്പോൾ, മുകളറ്റം അത്രയും തന്നെ താഴോട്ടു നീങ്ങി. എത്ര ദൂരമാണ് മുന്നോട്ടു നീക്കിയത് ?

(4) അടുത്തടുത്ത രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 195 ആണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

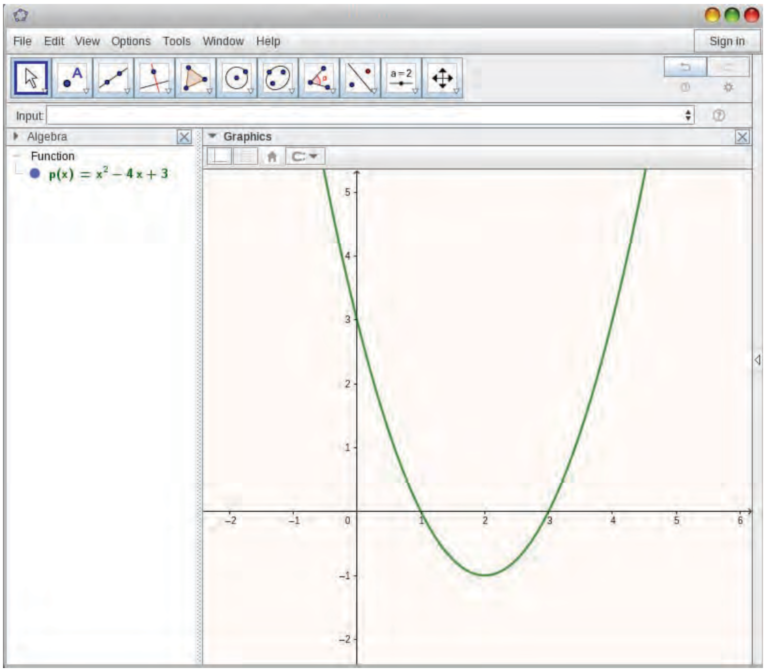
(5) 5, 7, 9, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലാണ് 140 കിട്ടുക ?

രണ്ട് ഉത്തരം

രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിത്രരൂപം ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ബഹുപദചിത്രങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിൽ കണ്ടല്ലോ (**രണ്ടാംകൃതി ബഹുപദങ്ങൾ** എന്ന ഭാഗം).

ഉദാഹരണമായി, $p(x) = x^2 - 4x + 3$

എന്ന ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ ഇങ്ങനെ വരച്ചുകിട്ടും.



ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രം വിലങ്ങനെയുള്ള വരയെ മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്, 1, 3 എന്നീ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയാണല്ലോ.

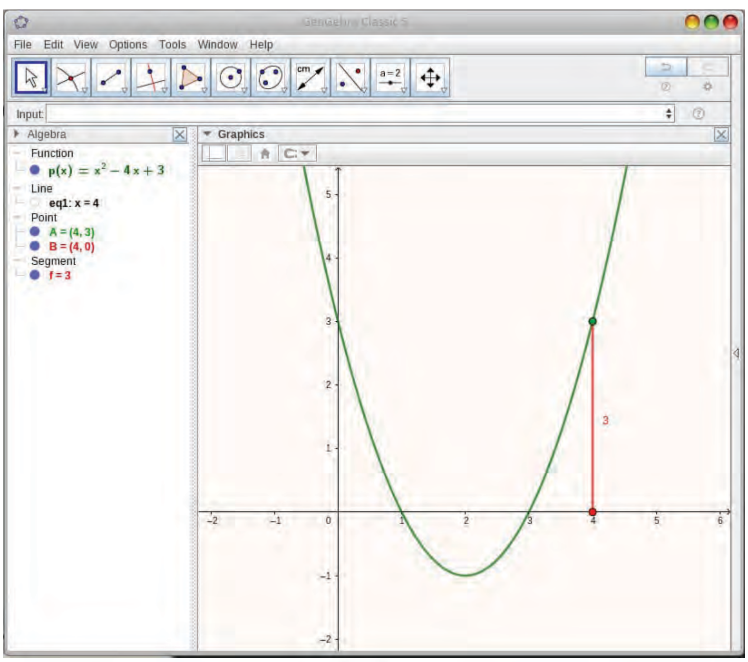
അപ്പോൾ $p(1)$, $p(3)$ ഇവ ഏതു സംഖ്യകളാകണം ?

പൊതുവേ, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിൽ x എന്ന സംഖ്യ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബിന്ദു എടുത്താൽ, അതിൽനിന്ന് ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപത്തിലേക്കുള്ള ഉയരമാണല്ലോ $p(x)$

ഉദാഹരണമായി,

$$p(4) = 4^2 - (4 \times 4) + 3 = 3$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. ചിത്രത്തിൽനിന്ന്, വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിലെ 4 എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്ന് ബഹുപദത്തിന്റെ ചിത്രരൂപത്തിലേക്കുള്ള ഉയരം 3 എന്നു കാണുകയും ആവാം:



വിലങ്ങനെയുള്ള വരയിലെ 1, 3 സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള ഈ ഉയരം പൂജ്യമാണല്ലോ. അപ്പോൾ $p(1)$, $p(3)$ ഇവ പൂജ്യമാണോ ?

പരിശോധിച്ചു നോക്കാം:

$$p(1) = 1^2 - (4 \times 1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$p(3) = 3^2 - (4 \times 3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$$

ഇങ്ങനെ ചിത്രം വരയ്ക്കാതെ തന്നെ $p(x) = 0$ ആകുന്ന x, ഏതു സംഖ്യയാണെന്ന് ബീജഗണിതത്തിലൂടെ തന്നെ കണക്കാക്കാൻ കഴിയുമോ ?

ചോദ്യം ഇതാണ്:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ ആകണമെങ്കിൽ } x \text{ എന്താകണം ?}$$

നേരത്തെ ചെയ്ത കണക്കുകൾ പോലെ ഇതു ചെയ്യാൻ കഴിയുമോ?

$x^2 - 4x + 3$ നോട് ഏതെങ്കിലും സംഖ്യ കൂട്ടി $(x - a)^2$ എന്ന രൂപത്തിലാക്കാമോ ?

$$x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$$

എന്നറിയാമല്ലോ. ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$(x^2 - 4x + 3) + 1 = (x - 2)^2$$

ഇനി നമുക്ക് വേണ്ട x കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 + 1 &= 0 + 1 \\ x^2 - 4x + 4 &= 1 \\ (x - 2)^2 &= 1 \\ x - 2 &= 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

അതായത്, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, $p(3) = 0$

പക്ഷേ, $p(1) = 0$ എന്നും നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ. മറ്റൊരു രീതിയിൽ പറഞ്ഞാൽ, $x = 1$ എന്നതും $x^2 - 4x + 3 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരമാണ്.

ഈ ഉത്തരം കിട്ടാത്തത് എന്തുകൊണ്ടാണ് ?

ബീജഗണിത രീതിയിൽ പരിഹാരം കണ്ടെത്തിയ വഴികളിലൂടെ ഒന്നുകൂടി പോയി നോക്കാം. ഇതിൽ ഒരിടത്ത്

$$(x - 2)^2 = 1$$

എന്നു കിട്ടിയില്ലേ ?

അതിൽനിന്ന് $x - 2 = 1$ എന്നും എഴുതി.

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗം 1 ആണെങ്കിൽ സംഖ്യയും 1 തന്നെ ആകണമെന്നുണ്ടോ ?

(-1) ന്റെ വർഗം എന്താണ് ?

$$(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

(ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **ന്യൂനസംഖ്യകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ആന്ദോളനം** എന്ന ഭാഗം).

അപ്പോൾ നമ്മുടെ കണക്കിൽ,

$$(x-2)^2 = 1$$

എന്നതിൽ നിന്ന്

$$x - 2 = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x - 2 = -1$$

എന്നേ പറയാൻ കഴിയൂ. ഇതിൽ

$$x - 2 = 1 \text{ എന്നെടുത്താൽ, } x = 1 + 2 = 3$$

$$x - 2 = -1 \text{ എന്നെടുത്താൽ, } x = -1 + 2 = 1$$

ഇപ്പോൾ ബീജഗണിതരീതിയിലും $p(x) = 0$ ആകാൻ x ആയി എടുക്കാവുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളും കിട്ടിയില്ലേ ?

അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: ഇതുവരെ ചെയ്ത കണക്കുകളിലെല്ലാം ഇങ്ങനെ ന്യൂനവർഗമൂലവും എടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ, മറ്റൊരുത്തരം കൂടി കിട്ടുമായിരുന്നോ ?

ഉദാഹരണമായി, നേരത്തെ ചെയ്ത ഒരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: വലിയ വശത്തിന് ചെറിയ വശത്തേക്കാൾ 2 മീറ്റർ കൂടുതൽ നീളവും, പരപ്പളവ് 224 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിന്റെ വശങ്ങൾ കണക്കാക്കാൻ ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ, $(x + 1)^2 = 225$ എന്നു കിട്ടുമെന്നു കണ്ടു. തുടർന്ന് $x + 1 = 15$ എന്നെടുത്ത്, ചെറിയ വശത്തിന്റെ നീളം 14 മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ബീജഗണിതം മാത്രം നോക്കിയാൽ $x + 1 = -15$ എന്നും ആകാം; അതായത് $x = -16$

പക്ഷേ ഈ കണക്കിൽ x ഒരു ചതുരത്തിന്റെ വശമായതിനാൽ, അതൊരു അധിസംഖ്യയാണ്. അപ്പോൾ $x = -16$ എന്ന ഉത്തരം ചതുരക്കണക്കിനു പറ്റിയതല്ല.

നേരത്തെ ചെയ്ത മറ്റൊരു ചതുരക്കണക്കു നോക്കാം: ചുറ്റളവ് 100 മീറ്ററും, പരപ്പളവ് 525 ചതുരശ്രമീറ്ററുമായ ചതുരം.

ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം x മീറ്റർ എന്നെടുത്താൽ $(x - 25)^2 = 100$ എന്നു കണ്ടു. ഇതിൽനിന്ന്, $x - 25 = 10$ എന്നെടുത്ത്, ഒരു വശം 35 മീറ്റർ, മറ്റേ വശം $50 - 35 = 15$ മീറ്റർ എന്നു കണക്കാക്കി.

ന്യൂനവർഗമൂലം എടുത്താലോ ?

$x - 25 = -10$ എന്നും, ഇതിൽനിന്ന് $x = 15$ എന്നും കിട്ടും. അതായത്, ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 15 മീറ്റർ എന്നും, മറ്റേ വശത്തിന്റെ നീളം $50 - 15 = 35$ മീറ്റർ എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ ഈ കണക്കിൽ രണ്ടു വർഗമൂലങ്ങളിൽ ഏതെടുത്താലും ഒരേ ചതുരം തന്നെയാണ് കിട്ടുന്നത്. പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഒരു പ്രായോഗിക പ്രശ്നത്തെ ബീജഗണിത സമവാക്യമാക്കി, ഗണിതപരമായി മാത്രം ആലോചിക്കുമ്പോൾ, ഒന്നിൽക്കൂടുതൽ ഉത്തരങ്ങൾ കിട്ടിയെന്നിരിക്കും. ഇവയിൽ ചിലതു മാത്രമോ, എല്ലാം തന്നെയോ, തുടങ്ങിയ പ്രായോഗിക പ്രശ്നത്തിന് യോജിച്ചതല്ലെന്നും വരാം.

അപ്പോൾ സാധാരണയായി ബീജഗണിതരീതിയിൽ എല്ലാ ഉത്തരങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കുകയും, തുടർന്ന് ഇവയിൽ നിന്ന് സന്ദർഭത്തിനു യോജിച്ചവ മാത്രം എടുക്കുകയുമാണ് പതിവ്.

ഇനി ഈ കണക്കു നോക്കൂ:

99, 97, 95, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലാണ് 900 കിട്ടുന്നത് ?

ഈ ശ്രേണിയിലെ n-ാം പദം $101 - 2n$ എന്നും, അതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$101n - n(n + 1) = 100n - n^2$$

എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ. അപ്പോൾ ചോദ്യത്തിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$100n - n^2 = 900$ ആകണമെങ്കിൽ n എന്തായിരിക്കണം ?

ഇത് ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$\begin{aligned} 100n - n^2 &= 900 \\ n^2 - 100n &= -900 \\ n^2 - 100n + 50^2 &= -900 + 2500 \\ (n - 50)^2 &= 1600 \end{aligned}$$

ഇതിൽനിന്ന് എന്താണ് കിട്ടുന്നത് ?

1600 എന്നത് 40 ന്റെയും –40 ന്റെയും വർഗമാണല്ലോ.

അപ്പോൾ മുകളിലെ സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന്

$n - 50 = 40$ അല്ലെങ്കിൽ $n - 50 = -40$

എന്ന രണ്ട് ഉത്തരം കിട്ടും. അതായത്

$n = 90$ അല്ലെങ്കിൽ $n = 10$

അപ്പോൾ ഈ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 10 പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും, ആദ്യത്തെ 90 പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും 900 തന്നെ കിട്ടും.

(1) ഒരു സംഖ്യയും, അതിനോടു 2 കൂട്ടിയതും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചപ്പോൾ 168 കിട്ടി. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(2) തുക 4 ഉം, ഗുണനഫലം 2 ഉം ആയ രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(3) 55, 45, 35, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണി നോക്കുക.

   (i) ഇതിലെ ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 175 കിട്ടും ?

   (ii) ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 180 കിട്ടും ?

   (iii) ആദ്യത്തെ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ 0 കിട്ടും ?