3 സമാന്തരശ്രേണിയും ബീജഗണിതവും

ബീജഗണിതരൂപം

ഒരു നിശ്ചിത നിയമമനുസരിച്ച്, സംഖ്യകളെ ഒന്നാമത്തേത്, രണ്ടാമത്തേത്, മൂന്നാമത്തേത് എന്നിങ്ങനെ ക്രമീകരിക്കുന്നതാണ് ഒരു സംഖ്യാശ്രേണി എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. ഒരു ശ്രേണി ഉണ്ടാക്കുന്നതിന്റെ നിയമം എങ്ങനെയാണ് പറയുന്നത്?

ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയെ എങ്ങനെ പറയും ? ഓരോ സ്ഥാനത്തേയും സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് ആ സ്ഥാനത്തെ പദം.

സ്ഥാനം	1	2	3	...
പദം	$1 \times 2 = 2$	$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 6$	...

1, 3, 5, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയാണെങ്കിലോ ?

ഓരോ സ്ഥാനത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയുടെ രണ്ടു മടങ്ങിൽ നിന്ന് ഒന്നു കുറച്ചതാണ് ആ സ്ഥാനത്തെ പദം:

സ്ഥാനം	1	2	3	...
പദം	$(1 \times 2) - 1 = 1$	$(2 \times 2) - 1 = 3$	$(3 \times 2) - 1 = 5$	...

ഇതെല്ലാം ചുരുക്കിപ്പറയാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാമല്ലോ.

ആദ്യത്തെ ശ്രേണിയെ ഇങ്ങനെ പറയാം:

n-ാം സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ $2n$

രണ്ടാമത്തെ ശ്രേണിയെയോ ?

n-ാം സ്ഥാനത്തെ സംഖ്യ $2n - 1$

പൊതുവായ ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എഴുതുമ്പോൾ, പദങ്ങൾ ഓരോന്നിനെയും വ്യത്യസ്ത അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാൻ സാധ്യമല്ലല്ലോ. അതിനാൽ, ഒരക്ഷരത്തിന്റെ കൂടെ പദസ്ഥാനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയും ചേർത്ത് എഴുതുകയാണ് പതിവ്.

ഉദാഹരണമായി, ഒന്നാമത്തെ പദം x_1, രണ്ടാമത്തെ പദം x_2, മൂന്നാമത്തെ പദം x_3 എന്നിങ്ങനെ തുടരാം. x നു പകരം മറ്റക്ഷരങ്ങളും ഉപയോഗിക്കാം.

ഇതനുസരിച്ച്, മുകളിലെഴുതിയ ശ്രേണികൾ അല്പം കൂടി ചുരുക്കിയെഴുതാം:

2, 4, 6, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി : $x_n = 2n$

1, 3, 5, ... എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി : $y_n = 2n - 1$

ഇങ്ങനെ ഒരു ശ്രേണിയിൽ സ്ഥാനവും പദവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറയുന്നതിനെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എന്നു പറയാം.

ഇനി ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, ഈ സമാന്തരശ്രേണി നോക്കുക:

12, 23, 34, ...

ഇതിലെ അടുത്ത പദം എന്താണ്? അതിനടുത്ത പദമോ ?

ഇങ്ങനെ ഓരോന്നായി നോക്കാതെ, ഏതു സ്ഥാനത്തേയും പദം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

ഇതിലെ 10-ാം പദം കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെയാണ്?

(i) ശ്രേണിയിലെ 1-ാം പദം 12

(ii) പൊതുവ്യത്യാസം 11

(iii) 1-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് 10-ാം പദത്തിലേക്കുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $10 - 1 = 9$

(iv) 10-ാം പദം $12 + (11 \times 9) = 111$

ഇങ്ങനെ ഏതു സ്ഥാനത്തേയും പദം കണക്കാക്കാമല്ലോ.

പൊതുവേ n-ാം സ്ഥാനത്തെ പദം എങ്ങനെ എഴുതാം ?

(i) 1-ാം പദത്തിൽ നിന്ന് n-ാം പദത്തിലേക്കുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $n - 1$

(ii) n-ാം പദം $12 + 11(n - 1)$

ഇതിലെ $11(n - 1)$ എന്നതിനെ അല്പം മാറ്റി എഴുതാം:

$$11(n - 1) = 11n - 11$$

അപ്പോൾ

$$12 + 11(n - 1) = 12 + (11n - 11) = 11n + 1$$

അതായത്, ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 11n + 1$$

ഇതിൽ n ആയി 1, 2, 3, ... എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുത്താൽ, $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ആയി അതതു സ്ഥാനത്തെ പദം കിട്ടും:

$$x_1 = (11 \times 1) + 1 = 12$$
$$x_2 = (11 \times 2) + 1 = 23$$
$$x_3 = (11 \times 3) + 1 = 34$$

....

പൊതുരൂപങ്ങൾ

1, 3, 5, ... എന്നീ ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = 2n - 1$ എന്നു പറഞ്ഞല്ലോ. ഇതിൽ n എന്നത് ഓരോ പദത്തിന്റെയും സ്ഥാനത്തെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. അപ്പോൾ $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ, ഒന്നാം പദം 1, രണ്ടാം പദം 3, എന്നിങ്ങനെ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും കിട്ടും.

ഏഴാം ക്ലാസിലെ ബീജഗണിതം എന്ന പാഠത്തിൽ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപം $2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) എന്നു പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ n എന്നത്, ഒറ്റസംഖ്യയെ 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലമാണ്.

അപ്പോൾ $n = 0, 1, 2, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ എടുത്താൽ, 2 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ

ഹരണഫലം 0 ഉം മിച്ചം 1 ഉം ആയ 1,

ഹരണഫലം 1 ഉം മിച്ചം 1 ഉം ആയ 3,

എന്നിങ്ങനെ എല്ലാ ഒറ്റ സംഖ്യകളും കിട്ടും.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം. $\frac{1}{4}$ ൽ തുടങ്ങി, $\frac{1}{2}$ വീതം കൂട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണി

$$\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}, \ldots$$

ഇതിലെ n-ാം പദം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം ?

(i) 1-ാം പദം $\frac{1}{4}$

(ii) പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{2}$

(iii) 1-ാം പദത്തിൽനിന്ന് n-ാം പദത്തിലേക്കുള്ള സ്ഥാനവ്യത്യാസം $n - 1$

(iv) n-ാം പദം $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1)$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

ആദ്യത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ n-ാം പദം, n നെ 11 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടിയതാണ്;

രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ n-ാം പദം, n നെ $\frac{1}{2}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് $\frac{1}{4}$ കുറച്ചതാണ്;

അഥവാ $-\frac{1}{4}$ കൂട്ടിയതാണ്.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലും n-ാം പദം, n നെ ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയതാണോ ?

പൊതുവേ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യപദം f എന്നും, പൊതുവ്യത്യാസം d എന്നും എടുക്കാം. n-ാം പദം, ആദ്യപദമായ f നോട് $n - 1$ തവണ പൊതുവ്യത്യാസമായ d കൂട്ടിയതാണല്ലോ;

അതായത് n-ാം പദം

$$f + d(n-1) = dn + (f - d)$$

അതായത് n നെ d കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $f - d$ കൂട്ടിയതാണ് n-ാം പദം

അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലും, സ്ഥാനസംഖ്യയെ ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയാൽ ആ സ്ഥാനത്തെ പദം കിട്ടും. അതായത് ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

എന്നാണ്; ഇതിൽ a, b ഇവ നിശ്ചിത സംഖ്യകളാണ്

ഇതിൽ n ആയി 1, 2, 3, ... എന്നിങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താൽ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ

$$a + b, 2a + b, 3a + b, \ldots$$

എന്നിങ്ങനെ കിട്ടുമല്ലോ. ഇത് മറ്റൊരുതരത്തിൽ പറയാം:

1, 2, 3, ... എന്ന എണ്ണൽസംഖ്യാശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെയെല്ലാം ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്നതാണ് ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയിലെയും പദങ്ങൾ.

ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം ഗുണിക്കുന്ന നിശ്ചിത സംഖ്യയാണ് പൊതുവ്യത്യാസം.

ഇതുപയോഗിച്ച്, ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{2}$ ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, തുടർച്ചയായി $\frac{1}{3}$ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണി നോക്കാം:

$$\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \ldots$$

പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{3}$ ആയതിനാൽ, എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം $\frac{1}{3}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കൂട്ടിയതാണ് ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം.

ഏതു സംഖ്യയാണ് കൂട്ടിയത്?

$\frac{1}{3}$ നോട് ഈ സംഖ്യ കൂട്ടിയതാണല്ലോ ആദ്യത്തെ പദം

ആദ്യത്തെ പദമായ $\frac{1}{2}$ കിട്ടാൻ, $\frac{1}{3}$ നോട് ഏതു സംഖ്യ കൂട്ടണം?

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

അപ്പോൾ എണ്ണൽസംഖ്യകളെയെല്ലാം $\frac{1}{3}$ കൊണ്ടു ഗുണിച്ച്, $\frac{1}{6}$ കൂട്ടിയതാണ് ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ;

അതായത്

$$x_n = \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}$$

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽനിന്ന് ശ്രേണിയെക്കുറിച്ച് പലതും മനസ്സിലാക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഈ ഉദാഹരണത്തിലെ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{n}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2n + 1}{6}$$

എന്നെഴുതാമല്ലോ.

n ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യയായാലും $2n + 1$ ഒറ്റസംഖ്യ ആണ്; ഛേദം ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും; അതിനാൽ $\frac{2n + 1}{6}$ എന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളിലൊന്നും, അംശം ഛേദത്തിന്റെ ഗുണിതമല്ല. അതായത്, ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളൊന്നും എണ്ണൽസംഖ്യകളല്ല.

നിയമത്തിന്റെ ഭാഷ

ഒരു ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കണമെങ്കിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം വ്യക്തമാക്കണമെന്നു കണ്ടല്ലോ. ഈ നിയമം ബീജഗണിതത്തിൽപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളും കണ്ടു. എന്നാൽ, ചില ശ്രേണികളുടെ നിയമം ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... എന്നു തുടരുന്ന അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു ബീജഗണിതവാചകം ഇതുവരെ കണ്ടുപിടിച്ചിട്ടില്ല.

അതുപോലെ, π യുടെ ദശാംശരൂപത്തിൽ വരുന്ന 3, 1, 4, 1, 5, 9, ... എന്ന ശ്രേണിയിലെയും ഒരു നിശ്ചിതസ്ഥാനത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ബീജഗണിതവാചകമൊന്നുമില്ല. ഇത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ, ശ്രേണിയുടെ നിയമം, സാധാരണ ഭാഷയിൽ പറയാനേ നിവൃത്തിയുള്ളൂ.

ഇനി $\frac{1}{2}$ ൽ തുടങ്ങി $\frac{1}{4}$ വീതം കൂട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയായാലോ ?
ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = \frac{n}{4} + \frac{1}{4}$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$x_n = \frac{n+1}{4}$$

ഇതിൽ n ആയി, 3, 7, 11, ... എന്നെല്ലാമെടുത്താൽ

$$x_3 = 1$$

$$x_7 = 2$$

$$x_{11} = 3$$

....

എന്നെല്ലാം കിട്ടും. അതായത്, എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളാണ്.

(1) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന സമാന്തരശ്രേണികളുടെ ബീജഗണിതരൂപം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) 1, 6, 11, 16, ... (ii) 2, 7, 12, 17, ... (iii) 21, 32, 43, 54, ...

(iv) 19, 28, 37, ... (v) 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, ... (vi) $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, ...

(2) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിലെ പദങ്ങൾ ചുവടെ പറഞ്ഞിട്ടുണ്ട്. ഓരോന്നിന്റെയും ബീജഗണിതരൂപം എഴുതുക.

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
1-ാം പദം 5	1-ാം പദം 5	5-ാം പദം 10	8-ാം പദം 2
10-ാം പദം 23	7-ാം പദം 23	10-ാം പദം 5	12-ാം പദം 8

(3) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{1}{6}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ എണ്ണൽസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ആദ്യപദം $\frac{1}{3}$ ഉം, പൊതുവ്യത്യാസം $\frac{2}{3}$ ഉം ആയ സമാന്തരശ്രേണിയിൽ എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളും ഉണ്ട് എന്നും ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയും ഇല്ല എന്നും തെളിയിക്കുക.

(5) 4, 7, 10, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങൾ ഈ ശ്രേണിയിൽത്തന്നെ ഉണ്ട് എന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) 5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിൽ പൂർണവർഗങ്ങളൊന്നും ഇല്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളെല്ലാം ആ ശ്രേണിയിൽത്തന്നെ ഉണ്ടാകുമല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട് ?).

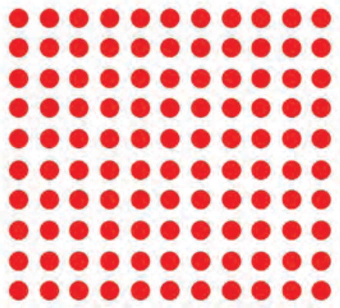
മറ്റു കൃതികളോ ?

ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ആയാലോ ?

മറ്റേതെങ്കിലും സമാന്തരശ്രേണിയിൽ, പദങ്ങളുടെ എല്ലാ കൃതികളും ആ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ ആകുമോ ?

തുകകൾ

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



ചതുരത്തിൽ ആകെ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട് ?

ഓരോന്നായി എണ്ണേണ്ട കാര്യമില്ലല്ലോ. ഓരോ വരിയിലും 11, അങ്ങനെ

$$11 \times 10 = 110$$

ഈ ത്രികോണത്തിൽ എത്ര പൊട്ടുകളുണ്ട് ?

ഓരോന്നായി എണ്ണിയെടുക്കാം:

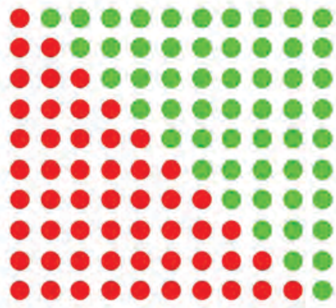
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

ഇതിനും എളുപ്പവഴി വല്ലതുമുണ്ടോ ?

ഇതിനെ ചതുരമാക്കിയാലോ ?

അതിന് ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണമുണ്ടാക്കുക:

ഇത് തലകീഴായി, ആദ്യത്തെ ത്രികോണവുമായി ഇങ്ങനെ ചേർത്തുവയ്ക്കുക:



ഈ ചതുരത്തിൽ, നേരത്തെ കണ്ടതുപോലെ, $11 \times 10 = 110$ പൊട്ടുകളുണ്ട്.

ഒരു ത്രികോണത്തിലോ ?

110 ന്റെ പകുതി 55

ചിത്രമുപയോഗിച്ചു ചെയ്തത് സംഖ്യകൾ മാത്രമുപയോഗിച്ചും എഴുതാം:

$$s = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

എന്നെടുക്കാം. ഇതുതന്നെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$s = 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലോ ?

$$2s = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 110$$

അപ്പോൾ

$$s = 110 \div 2 = 55$$

ഇതുപോലെ 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളും കൂട്ടിയെടുക്കാമല്ലോ.

$$s = 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

ഒരേ സ്ഥാനത്തുള്ള സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ,

$$2s = \overbrace{101 + 101 + \cdots + 101 + 101}^{100 \text{ എണ്ണം}}$$

$$= 101 \times 100$$

ഒരു ഗണിതകഥ

ഗൗസ് എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനെക്കുറിച്ച് കേട്ടിട്ടില്ലേ? നന്നേ ചെറുപ്പത്തിൽത്തന്നെ ഗണിതത്തിൽ ഇദ്ദേഹം അസാധാരണമായ കഴിവു പ്രകടിപ്പിച്ചിരുന്നുവത്രെ. അതിനെക്കുറിച്ചൊരു കഥയുണ്ട്.

ഗൗസിനു പത്തു വയസ്. ക്ലാസിലെ അധ്യാപകൻ, കുട്ടികളെ അടക്കിയിരുത്താനായി, ഒന്നു മുതൽ നൂറു വരെയുള്ള സംഖ്യകളെല്ലാം കൂട്ടി തുക കാണാൻ പറഞ്ഞു. വളരെപ്പെട്ടെന്നു തന്നെ കൊച്ചു ഗൗസ് ഉത്തരം പറഞ്ഞു: 5050. ഇങ്ങനെ വിശദീകരിക്കുകയും ചെയ്തു: 1 ഉം 100 ഉം 101; അതുപോലെ 2 ഉം 99 ഉം 101; ഇങ്ങനെ 50 ജോടികൾ

ആകെ തുക

$$101 \times 50 = 5050$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$s = \frac{1}{2} \times 100 \times 101 = 5050$$

100 നു പകരം ഏതു സംഖ്യ ആയാലും, ഇതേ രീതിയിൽ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത്

ഒന്നു മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ കുറേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക, അവസാനസംഖ്യയുടെയും അതിനടുത്ത സംഖ്യയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ്

ബീജഗണിതഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളിലെ പദങ്ങളുടെ തുകയും കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി 2, 4, 6, ..., 100 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക നോക്കാം.

ഈ തുക ഇങ്ങനെ എഴുതാമല്ലോ

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 50)$$

നേരത്തെ കണ്ടതനുസരിച്ച്

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 50 = \frac{1}{2} \times 50 \times 51$$

എന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 100 = 2 \times \frac{1}{2} \times 50 \times 51 = 2550$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ആദ്യത്തെ n ഇരട്ടസംഖ്യകൾ

$$2, 4, 6, \ldots, 2n$$

ഇവയുടെ തുക

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2 \times \frac{1}{2} \times n(n + 1) = n(n + 1)$$

2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ 2, 4, 6, ... എന്ന ശ്രേണിക്കു പകരം, 3 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ 3, 6, 9, ... എന്ന ശ്രേണി ആയാലോ ?

ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങൾ

$$3, 6, 9, \ldots, 3n$$

ഇവയുടെ തുക

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$= 3 \times \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$= \frac{3}{2}n(n + 1)$$

ഇതുപോലെ 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെയും 5 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളുടെയുമെല്ലാം തുകകൾ കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. ചെയ്തു നോക്കൂ:

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക നോക്കാം.

ആദ്യം ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി ബീജഗണിതരൂപത്തിലെഴുതാം.

1 ൽ നിന്നു തുടങ്ങി, 2 വീതം കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയാണല്ലോ ഇത്.

അപ്പോൾ n-ാം ഒറ്റസംഖ്യ x_n എന്നെഴുതിയാൽ

$$x_n = 1 + (2 \times (n - 1)) = 2n - 1$$

ഇതിൽ $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ ക്രമമായെടുത്താൽ, ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ശ്രേണി കിട്ടും.

അപ്പോൾ ഈ ശ്രേണി ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\begin{aligned} x_1 &= (2 \times 1) - 1 \\ x_2 &= (2 \times 2) - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= (2 \times n) - 1 \end{aligned}$$

ഇവയെല്ലാം മുകളിൽനിന്ന് താഴോട്ട് കൂട്ടിയാലോ ?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= ((2 \times 1) + (2 \times 2) + \cdots + (2 \times n)) - \overbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}^{n \text{ എണ്ണം}} \\ &= 2(1 + 2 + \cdots + n) - n \end{aligned}$$

ഇതിൽ $1 + 2 + \ldots + n$ നേരത്തെ കണക്കാക്കിയല്ലോ.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n &= \frac{1}{2} n(n + 1) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= 2 \times \frac{1}{2} n(n + 1) - n \\ &= n(n + 1) - n \\ &= n^2 + n - n = n^2 \end{aligned}$$

എന്നു കാണാം.

അതായത്, 1 മുതൽ തുടർച്ചയായ ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക, സംഖ്യകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർഗമാണ്.

ഇതുപോലെ ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുക കണക്കാക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയും

$$x_n = an + b$$

എന്ന രൂപത്തിലാണല്ലോ. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, $n = 1, 2, 3, \ldots$ എന്നെഴുതി, കൂട്ടാം

$$\begin{aligned} x_1 &= a + b \\ x_2 &= 2a + b \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= na + b \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (a + 2a + \cdots + na) + \overbrace{(b + b + \cdots + b)}^{n \text{ എണ്ണം}}$$

$$= a(1 + 2 + \cdots + n) + nb$$

$$= \frac{1}{2}an(n + 1) + nb$$

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = an + b$$

ആണെങ്കിൽ, അതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}an(n + 1) + nb$$

ഉദാഹരണമായി

$$1, 4, 7, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഈ ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$x_n = 3n - 2$$

അപ്പോൾ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$3 \times \frac{1}{2} \times 100 \times 101 - (2 \times 100) = 14950$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$3 \times \frac{1}{2}n(n + 1) - 2n = 3 \times \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2n = \frac{1}{2}(3n^2 - n)$$

ഒരു ശ്രേണിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക കാണാൻ sum എന്ന നിർദേശം ഉപയോഗിക്കാം.

L=Sequence($n^{2,}n$,1,10) എന്ന് input നിർദേശം കൊടുത്താൽ L എന്ന പേരിൽ ആദ്യത്തെ പത്ത് പൂർണ്ണവർഗങ്ങൾ ലഭിക്കും. sum(L) എന്ന നിർദേശം കൊടുത്താൽ ഈ സംഖ്യകളുടെ തുക കിട്ടും. sum(n^2,n,1,10) എന്ന് നിർദേശം നേരിട്ട് കൊടുത്താലും മതി.

5, 8, 11, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടാൻ sum(3n + 2,n,1,20) എന്നു കൊടുത്താൽ മതി. ഈ ശ്രേണിയുടെ 10 മുതൽ 20 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ് വേണ്ടതെങ്കിൽ sum(3n + 2,n,10,20) എന്നു കൊടുക്കണം.

സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുക മറ്റൊരു രീതിയിലും കണക്കാക്കാം. അതിന് തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അല്പം മാറ്റിയെഴുതാം:

$$\frac{1}{2}an(n + 1) + bn = \frac{1}{2}n(a(n + 1) + 2b)$$

$$= \frac{1}{2}n(an + a + 2b)$$

$$= \frac{1}{2}n((an + b) + (a + b))$$

ഇതിൽ $an + b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ n-ാം പദമായ x_n ഉം, $a + b$ എന്നത്, ശ്രേണിയുടെ 1-ാം പദമായ x_1 ഉം ആണല്ലോ.

അപ്പോൾ

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}n(x_1 + x_n)$$

സാധാരണഭാഷയിൽ പറഞ്ഞാൽ

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തേയും പദങ്ങളുടെ തുകയെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ്

ഇതനുസരിച്ച്, 1, 4, 7, … എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യം 100-ാം പദം കണക്കാക്കുക

$$1 + (3 \times 99) = 298$$

ഇനി ആദ്യത്തെ 100 പദങ്ങളുടെ തുക

$$\frac{1}{2} \times 100 \times (1 + 298) = 14950$$

എന്നു കണക്കാക്കാം.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് പൊതുവായ ഒരു ബീജഗണിത രൂപമുണ്ട്. ഇതു കാണാൻ, തുക ഇങ്ങനെയെഴുതാം:

$$\frac{1}{2}an(n + 1) + bn = \frac{1}{2}an^2 + \left(\frac{1}{2}a + b\right)n$$

ഇതിൽ $\frac{1}{2}a$ യും $\frac{1}{2}a + b$ യും ശ്രേണിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിശ്ചിത സംഖ്യകളാണല്ലോ. അപ്പോൾ തുക, n^2 നെയും n നെയും നിശ്ചിത സംഖ്യകൾ കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയതാണ്.

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$pn^2 + qn$$

എന്നാണ്; ഇതിൽ p, q നിശ്ചിതസംഖ്യകളാണ്

ഉദാഹരണമായി,

$$3, 10, 17, \ldots$$

എന്നു തുടരുന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം

$$7n - 4$$

എന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല. ഇതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയോ ?

$$\frac{1}{2} \times 7 \times n(n + 1) - 4n = \frac{1}{2}(7n^2 + 7n - 8n) = \frac{1}{2}(7n^2 - n)$$

വിസ്തരിച്ചു പറഞ്ഞാൽ, $\frac{1}{2}(7n^2 - n)$ എന്ന ബീജഗണിതവാചകത്തിൽ, $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ, നമ്മുടെ സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യപദമായ 3 കിട്ടും;

$n = 2$ എന്നെടുത്താൽ, ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുകയായ 13 ഉം,

$n = 3$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുകയായ 30 ഉം കിട്ടും.

അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യം:

> ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക
>
> $$3n^2 + n$$
>
> ആണ്. ശ്രേണി കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം:

(i) തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ $n = 1$ എന്നെടുത്താൽ ആദ്യപദം കിട്ടും

(ii) $(3 \times 1^2) + 1 = 4$

(iii) തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ $n = 2$ എന്നെടുത്താൽ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക കിട്ടും

(iv) ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക $(3 \times 2^2) + 2 = 14$

(v) ഇതിൽനിന്ന് ആദ്യത്തെ പദം കുറച്ചാൽ രണ്ടാമത്തെ പദം കിട്ടും

(vi) രണ്ടാമത്തെ പദം $14 - 4 = 10$

(vii) ശ്രേണി 4, 10, 16, ...

(viii) ഇതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപം $x_n = 6n - 2$

ഒരു ശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം അറിയാമെങ്കിൽ, അതിലെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക കാണാൻ പൈഥൻ ഭാഷയിലെ sum ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ആദ്യത്തെ നൂറു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കാൻ

```
sum(x**2 for x in range(1,101))
```

എന്നെഴുതിയാൽ മതി.

വർഗങ്ങളുടെ തുക

$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ എന്ന സർവ്വസമവാക്യം കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതുപോലെ

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നതും ഒരു സർവ്വസമവാക്യമാണ്.

ഇതിൽ നിന്ന്, x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

എന്നു കാണാം. ഇതിൽ $x = 1, 2, 3, ..., n$ എന്നെടുത്താൽ

$x = 1,\quad 2^3 - 1^3 = 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$

$x = 2,\quad 3^3 - 2^3 = 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$

....

$x = n-1,\quad n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1$

$x = n,\quad (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

ഇവയെല്ലാം കൂട്ടിയാൽ

$$2^3 - 1^3 + 3^3 - 2^3 + ... + n^3 - (n-1)^3 + (n+1)^3 - n^3$$
$$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

എന്നു കിട്ടും. അതായത്

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

അതായത്, $n^3 + 3n^2 + 3n$

$$= 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

അപ്പോൾ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$
$$= \frac{1}{3}\left(n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n(n+1) - n\right)$$

ഈ സമവാക്യത്തിലെ വലതുഭാഗം ലഘൂകരിച്ച്,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

എന്നാക്കാം.

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം.

$$4, 10, 16, \ldots$$

എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$x_n = 6n - 2$$

ഇതിലെ ആദ്യപദം, ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുക, ആദ്യത്തെ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ തുക എന്നിങ്ങനെ കണക്കാക്കിയാൽ

$$4, 14, 30, \ldots$$

എന്ന മറ്റൊരു ശ്രേണി കിട്ടുമല്ലോ. അതിന്റെ ബീജഗണിതരൂപമാണ്

$$y_n = 3n^2 + n$$

(1) ചുവടെയുള്ള സമാന്തരശ്രേണികളുടെ തുകകൾ, മനക്കണക്കായി കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) $51 + 52 + 53 + \ldots + 70$

(ii) $1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + \ldots + 12\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2} + \ldots + 12\frac{1}{2}$

(iv) $\frac{1}{101} + \frac{3}{101} + \frac{5}{101} + \ldots + \frac{201}{101}$

(2) ചുവടെയുള്ള ഓരോ സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക:

(i) 11, 22, 33, ... (ii) 12, 23, 34, ... (iii) 21, 32, 43, ... (iv) 19, 28, 37, ...

(3) ഒമ്പതിന്റെ ഗുണിതങ്ങളായ എല്ലാ മൂന്നക്ക സംഖ്യകളുടെയും തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

(4) ചില സമാന്തരശ്രേണികളുടെ n-ാം പദം ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഓരോന്നിന്റെയും n പദങ്ങളുടെ തുക കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $2n + 3$ (ii) $3n + 2$ (iii) $2n - 3$ (iv) $3n - 2$

(5) ചില സമാന്തരശ്രേണികളിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഓരോ ശ്രേണിയിലെയും n-ാം പദം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $n^2 + 2n$ (ii) $2n^2 + n$ (iii) $n^2 - 2n$ (iv) $2n^2 - n$ (v) $n^2 - n$

(6) (i) 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

(ii) എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 5 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് 1 കൂട്ടിയ ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക. ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

(7) 7, 13, 19, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ് 15, 21, 27, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 25 പദങ്ങളുടെ തുക.

(8) ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയിലെ 10-ാം പദം 50 ഉം 21-ാം പദം 75 ഉം ആണ്. ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ 30 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക.

1 മുതൽ തുടർച്ചയായ എത്ര ഒറ്റ സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാലും ഒരു പൂർണ്ണവർഗം കിട്ടുമെന്ന് അറിയാമല്ലോ.

4, 12, 20, ... എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ പദം മുതൽ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങൾ കൂട്ടി നോക്കൂ.

ആദ്യപദം മുതൽ തുടർച്ചയായ എത്ര പദങ്ങൾ കൂട്ടിയാലും പൂർണ്ണവർഗം കിട്ടുന്ന മറ്റു സമാന്തരശ്രേണികളുണ്ടോ ?