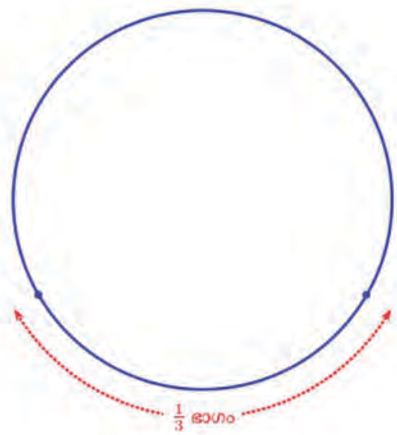
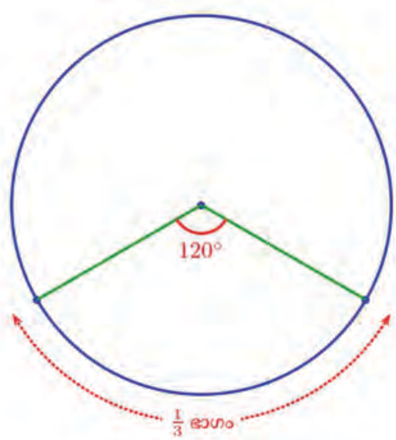
2 വൃത്തങ്ങളും കോണുകളും

വൃത്തഭാഗങ്ങൾ

ഒരു വളയത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം മുറിച്ചെടുക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

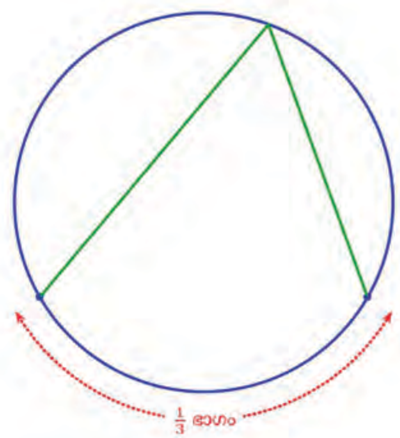


ഒമ്പതാംക്ലാസിലെ **വൃത്തഭാഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **നീളവും കോണും** എന്ന ഭാഗത്ത് കണ്ടതനുസരിച്ച്, ഇത്തരം ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $360° \times \frac{1}{3} = 120°$ ആയിരിക്കണമല്ലോ.

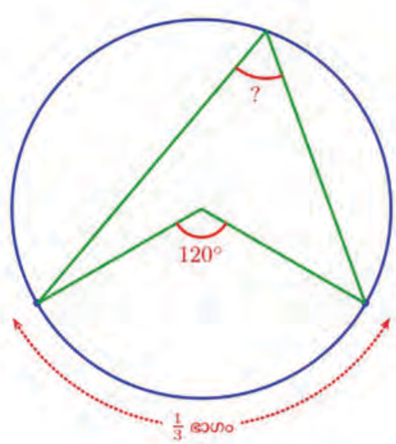


അപ്പോൾ ആദ്യം, എട്ടാംക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ഞാണുകൾ** എന്ന ഭാഗത്തിൽ കണ്ട ഏതെങ്കിലും രീതി ഉപയോഗിച്ച്, വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക; കേന്ദ്രത്തിൽ $120°$ കോൺ വരച്ച്, $\frac{1}{3}$ ഭാഗം നീളമുള്ള ചാപം അടയാളപ്പെടുത്തുക.

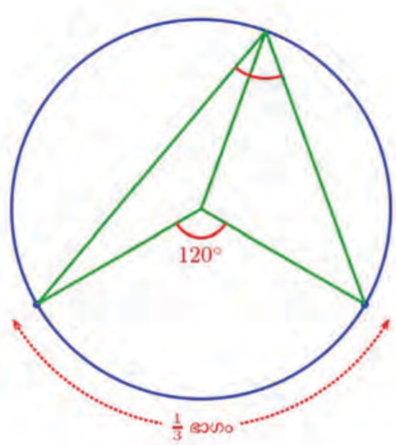
കേന്ദ്രം അടയാളപ്പെടുത്താതെ, നേരിട്ട് ഈ ചാപം അടയാളപ്പെടുത്താൻ കഴിയുമോ? അതായത്, വൃത്തത്തിലെ തന്നെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് രണ്ടു വര വരച്ച്, ഈ ചാപം അടയാള പ്പെടുത്താൻ വല്ല വഴിയുമുണ്ടോ?



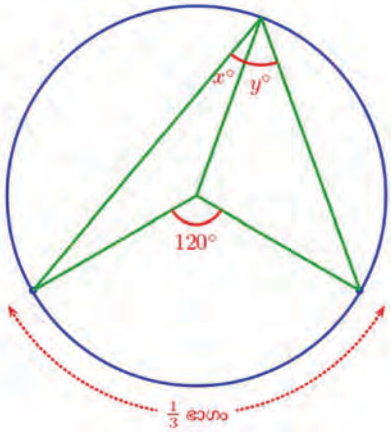
ചോദ്യം കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കാം. മുകളിലെ ചിത്രത്തിലെ കോൺ എത്രയായി എടുത്താലാണ്, കേന്ദ്രത്തിലെ കോൺ $120°$ ആകുക?

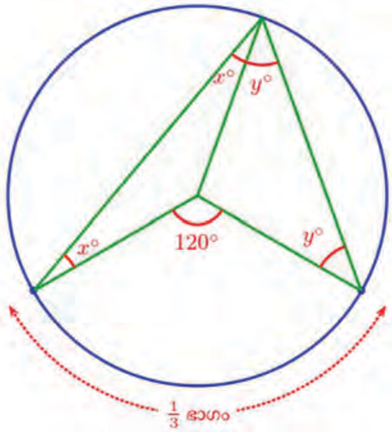


ഇതു കണക്കാക്കാൻ, ഈ കോണിന്റെ മൂലയും വൃത്തകേന്ദ്ര വും തമ്മിൽ യോജിപ്പിച്ച്, ഈ കോണിനെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാ ക്കാം:

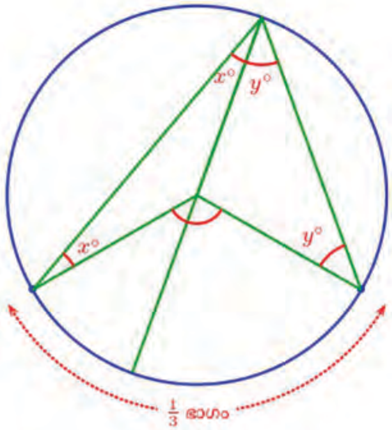


ഇപ്പോൾ ചിത്രത്തിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുണ്ടല്ലോ. രണ്ടിന്റെയും ഒരു ജോടി വശങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ ആയതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ നീളമാണ്; അതായത് ഇവ രണ്ടും സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളാണ്. അപ്പോൾ മുകളിലെ കോണിന്റെ ഭാഗങ്ങൾ $x°$, $y°$ എന്നെടുത്താൽ, ത്രികോണങ്ങളിലെ താഴത്തെ കോണുകളും ഇവ തന്നെയാണ്.

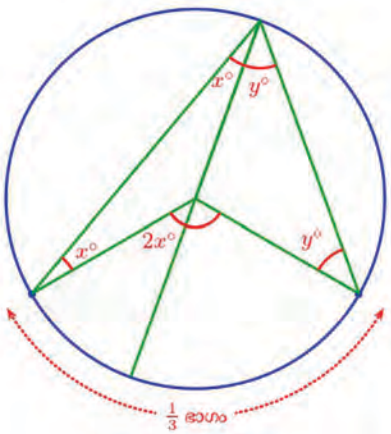


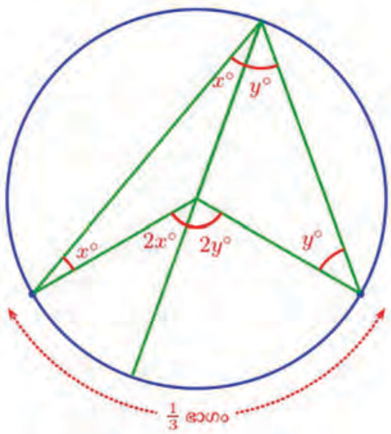


ഇനി ത്രികോണങ്ങളുടെ പൊതുവായ വശം നീട്ടി വരച്ചാൽ, കേന്ദ്രകോണും രണ്ടു ഭാഗമാകും:



കേന്ദ്രകോണിന്റെ ഈ ഭാഗങ്ങൾ, ഇടതും വലതുമുള്ള സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളുടെ മൂന്നാം മൂലകളിലെ പുറംകോണുകളാണ്; അതിനാൽ ഇവ മറ്റു രണ്ടു മൂലകളിലെ അകക്കോണുകളുടെ തുകകളാണ് (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **ബഹുഭുജങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **പുറംകോണുകൾ** എന്ന ഭാഗം).





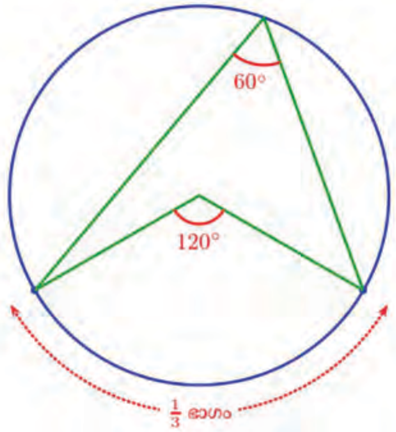
കേന്ദ്രകോൺ 120° ആയതിനാൽ

$$2x + 2y = 120$$

എന്നും, ഇതിൽനിന്ന്

$$x + y = 60$$

എന്നും കാണാമല്ലൊ. അതായത്, ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവിലുണ്ടാക്കുന്ന കോൺ, 60°.



a എന്ന പേരിൽ ഒരു Angle Slider നിർമ്മിക്കുക. *A* എന്ന ഒരു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിൽ *B* എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Angle With Given Size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് *B* യിലും തുടർന്ന് വൃത്തകേന്ദ്രത്തിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി '*a*' എന്ന് നൽകുക. വൃത്തത്തിൽ ഒരു പുതിയ ബിന്ദു B' ലഭിക്കും. BA, AB' എന്നീ വരകൾ വരച്ച് കേന്ദ്രകോൺ അടയാളപ്പെടുത്തുക. കേന്ദ്രകോൺ 180° യിൽ കുറവാകത്തക്കവിധം ക്രമീകരിക്കുക. വൃത്തത്തിലെ വലിയ ചാപത്തിൽ *C* എന്ന ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി BC, $B'C$ എന്നീ വരകൾ വരച്ച് $\angle C$ അടയാളപ്പെടുത്തുക. $\angle A$, $\angle C$ ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ് ? *C* യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റി നോക്കൂ. സ്ലൈഡർ ഉപയോഗിച്ച് $\angle A$ മാറ്റി നോക്കൂ.

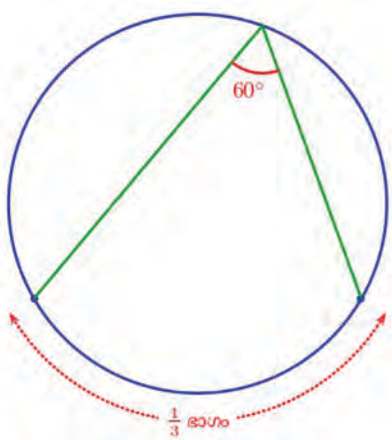
ഇവിടെ കണ്ടത് എന്താണ് ?

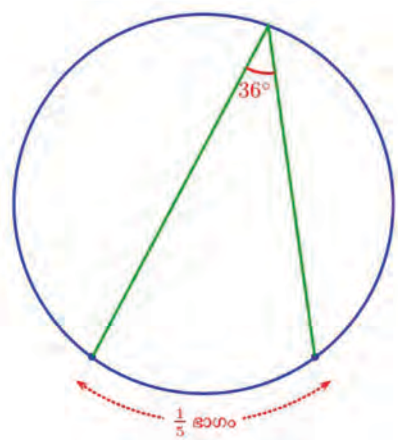
വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം അടയാളപ്പെടുത്താൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ 120° അടയാളപ്പെടുത്തുന്നതിനു പകരം, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ 60° അടയാളപ്പെടുത്തിയാലും മതി.

ഇതുപോലെ, ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം അടയാളപ്പെടുത്താൻ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കേണ്ട കോണിന്റെ അളവ് എത്രയാണെന്നു കണക്കാക്കുക.

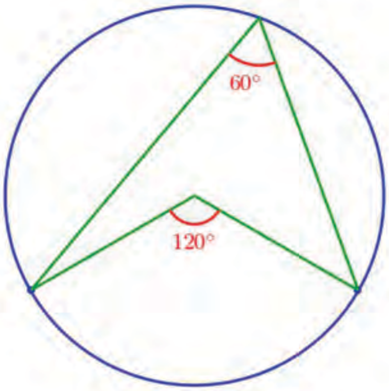
ചാപവും കോണും

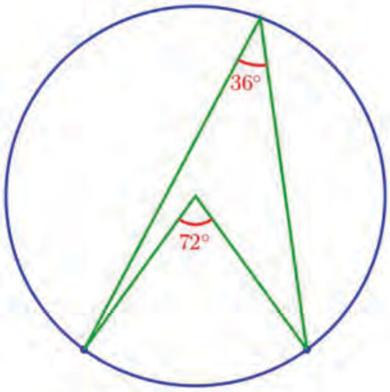
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ 60° അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗമായ ചാപം കിട്ടുമെന്നും, 36° അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗമായ ചാപം കിട്ടുമെന്നും കണ്ടല്ലോ.





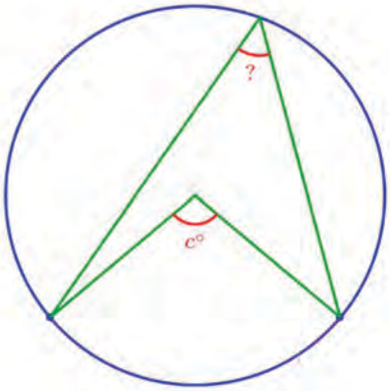
ഇക്കാര്യങ്ങൾ, വൃത്തത്തിന്റെ ഭാഗങ്ങൾക്കു പകരം, ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകൾ ഉപയോഗിച്ചും പറയാം.





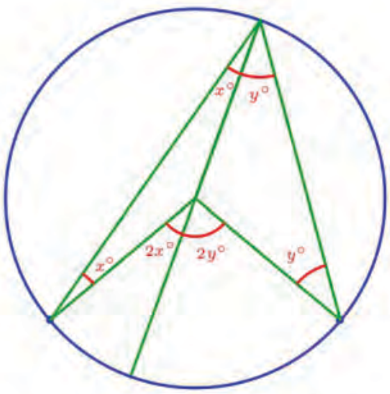
അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യം: വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ, കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതികോൺ കിട്ടുമോ?

ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ $c°$ എന്നെടുക്കാം.



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ, വൃത്തകേന്ദ്രവും, വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര മുകളിലെ കോണിനെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ $x°, y°$ എന്നെടുക്കാം.

ഈ വര നീട്ടിവരച്ച് കോണുകൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താമല്ലോ.



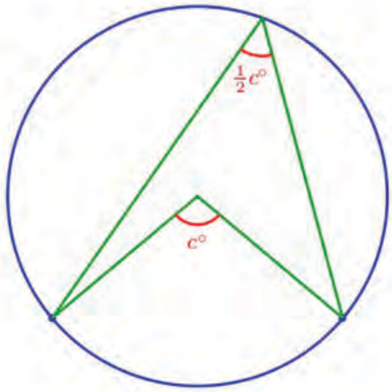
കേന്ദ്രകോൺ $c°$ എന്നാണല്ലോ എടുത്തത്. അപ്പോൾ

$$2x + 2y = c$$

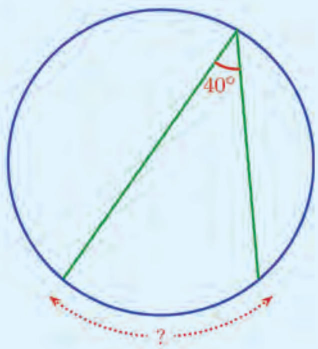
എന്നും ഇതിൽനിന്ന്

$$x + y = \frac{1}{2}c$$

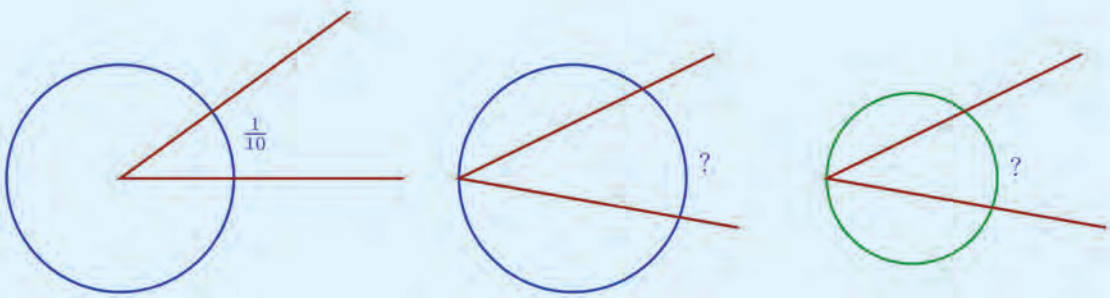
എന്നും കാണാം.



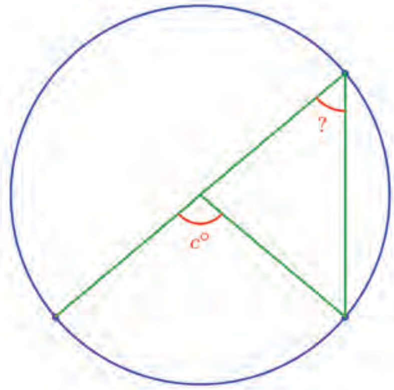
(1) ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ്?



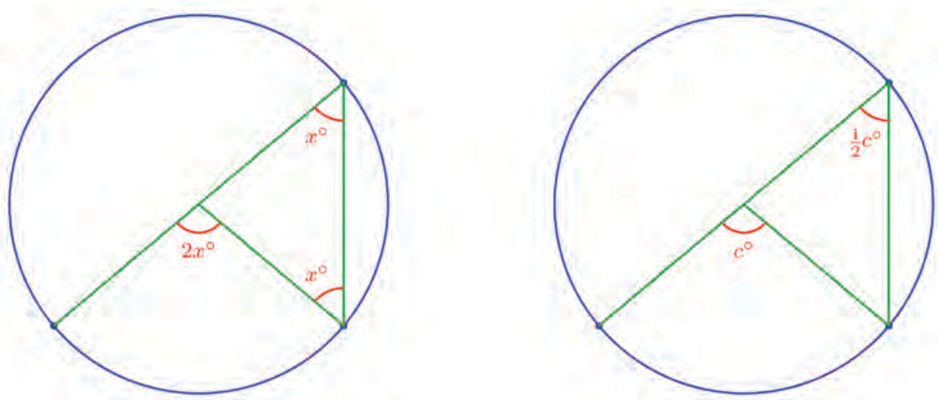
(2) ഒരു കമ്പി രണ്ടായി മടക്കി, അതിന്റെ മൂല ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ വച്ചപ്പോൾ, വൃത്തത്തിന്റെ $\frac{1}{10}$ ഭാഗം അതിനുള്ളിൽപ്പെട്ടു. ഇതേ കമ്പിയുടെ മൂല, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ചേർത്തു വച്ചാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണ് അതിനുള്ളിലുണ്ടാകുക? മറ്റേതെങ്കിലും വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ചേർത്തുവച്ചാലോ?



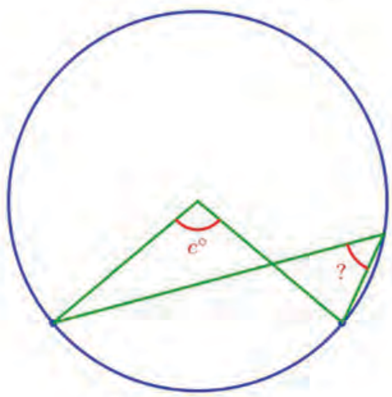
അപ്പോൾ മറ്റൊരു ചോദ്യം: ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലും പകുതിക്കോൺ കിട്ടുമോ? ചിത്രം ഇങ്ങനെ ആയാലോ ?



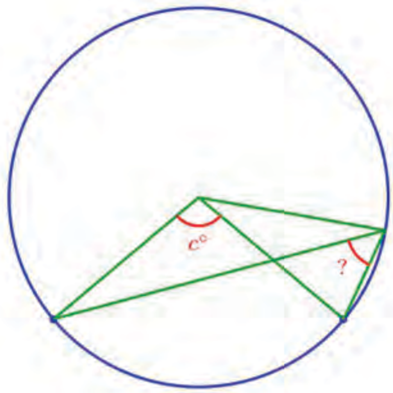
ഇതിൽ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദു, ചാപത്തിന്റെ ഒരറ്റത്തിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന വ്യാസം വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവാണ്. അപ്പോൾ ഈ ബിന്ദുവിൽ ചാപം ഉണ്ടാക്കുന്ന കോൺ $x°$ എന്നെടുത്താൽ, മറ്റു കോണുകൾ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാമല്ലോ.



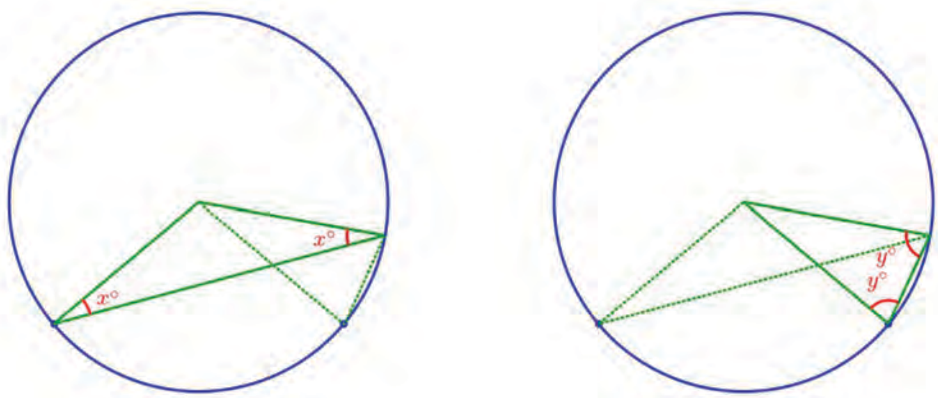
ഇനി വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദു വീണ്ടും താഴ്ത്തി ഇങ്ങനെ എടുത്താലോ ?



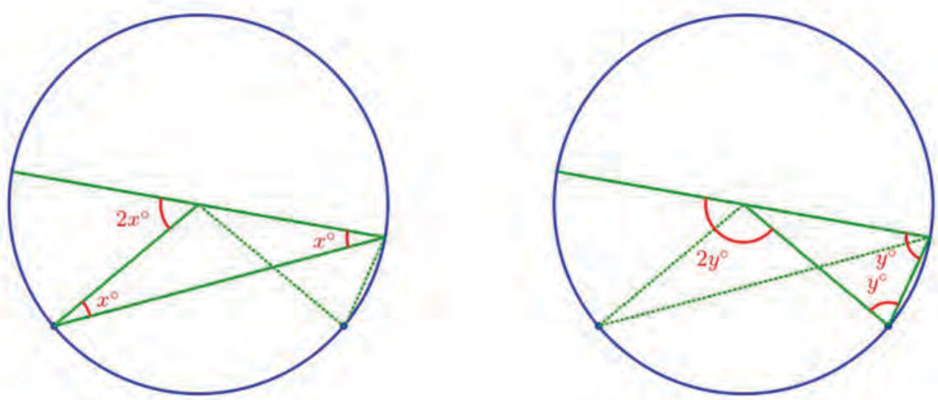
വീണ്ടും ഈ ബിന്ദുവും വൃത്തകേന്ദ്രവും യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കാം.



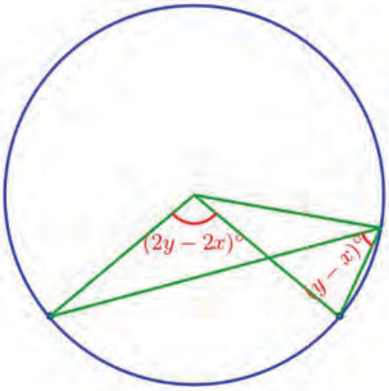
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളിലെ തുല്യമായ കോണുകൾ $x°$, $y°$ എന്നെടുക്കാം:

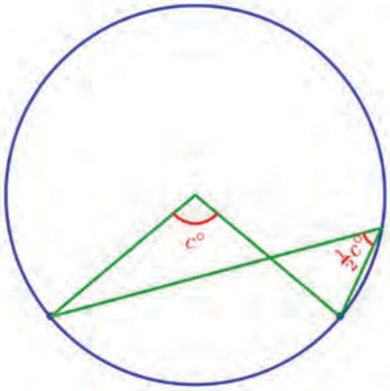


ഇനി ത്രികോണങ്ങളുടെ പൊതുവായ വശം നീട്ടി വരച്ച്, പുറംകോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം:

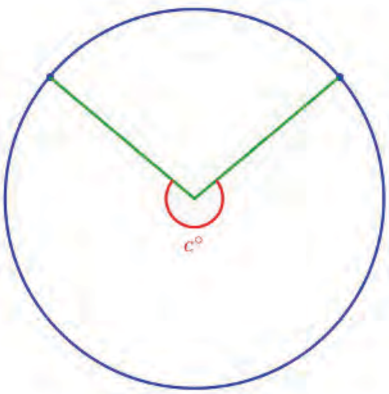


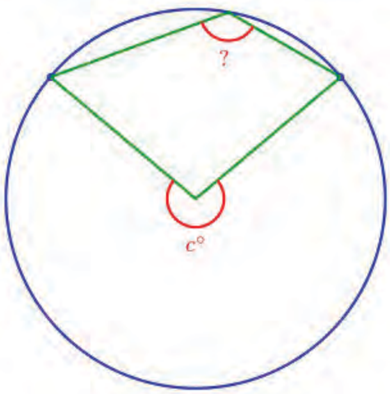
ഇതിൽനിന്ന്, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും കണക്കാക്കാമല്ലോ.



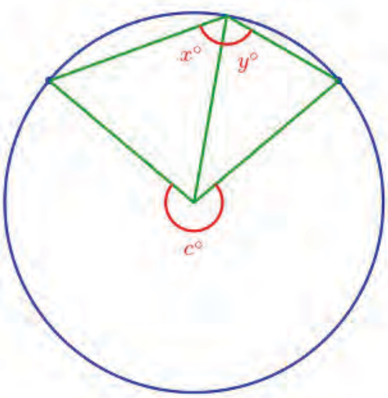


ഇതുവരെ ഉപയോഗിച്ചതെല്ലാം, കേന്ദ്രകോൺ 180° യേക്കാൾ കുറവായ ചാപങ്ങളാണ്. കേന്ദ്രകോൺ 180° യേക്കാൾ കൂടുതലായാലോ ?

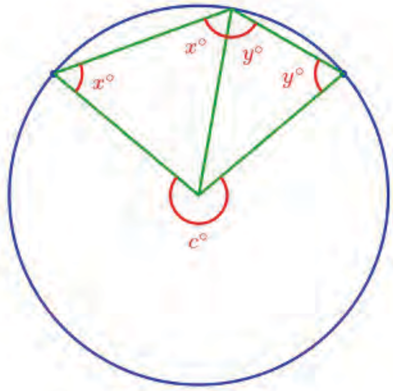




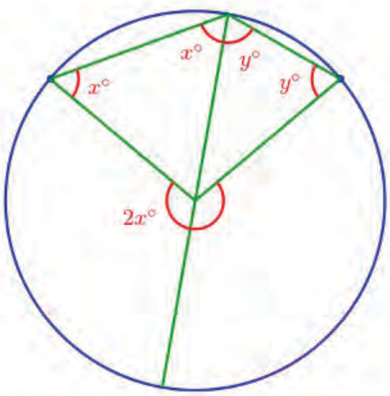
മുമ്പു ചെയ്തതുപോലെ വൃത്തകേന്ദ്രവും ചാപത്തിലല്ലാത്ത വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ഈ ബിന്ദുവിലെ കോണിനെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങൾ $x°$, $y°$ എന്നെടുക്കാം.

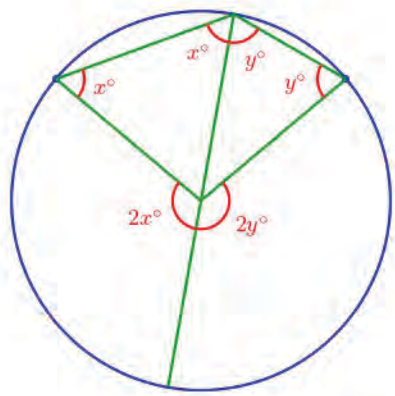


വൃത്തത്തിലെ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടും സമപാർശ്വമായതിനാൽ, ഇടതും വലതും കോണുകളും $x°$ യും $y°$ യും തന്നെ.

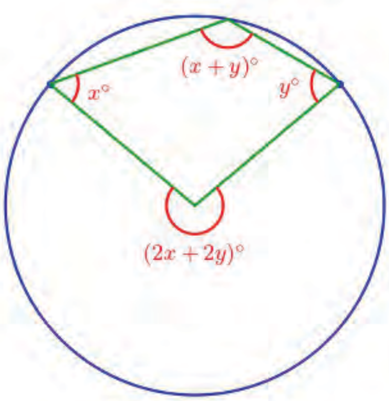


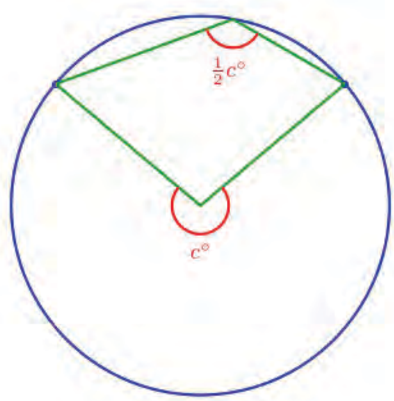
ഇനി നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെതന്നെ, ഈ വര നീട്ടി വരച്ച്, കേന്ദ്രകോണിനെ ത്രികോണങ്ങളുടെ പുറംകോണുകളായി ഭാഗിക്കാം.



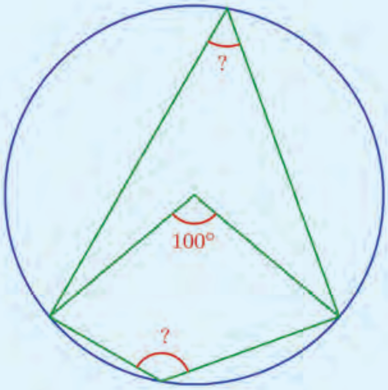


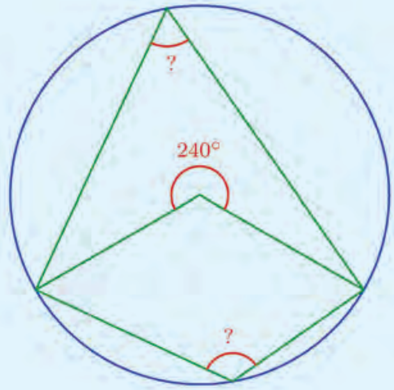
ഇതിൽനിന്ന്, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണും കണക്കാക്കാമല്ലോ.





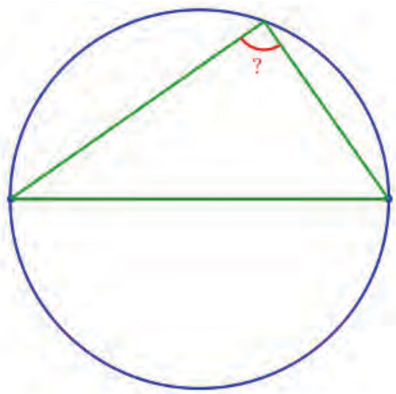
ചുവടെയുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ, വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്.



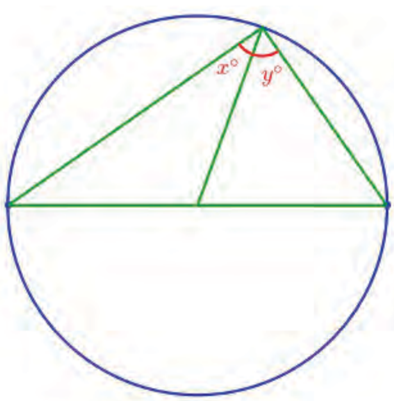


ഓരോ ചിത്രത്തിലും ചാപം വൃത്തത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

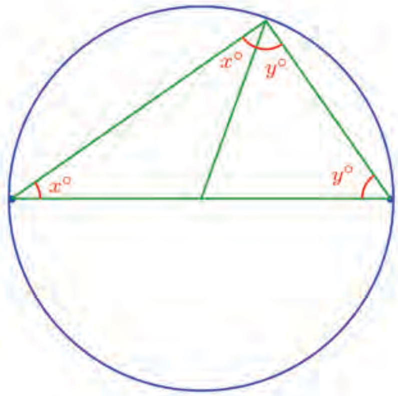
ഇനി ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോൺ 180° തന്നെയായാലോ ? അതായത്, ചാപം അർധവൃത്തമായാലോ ?

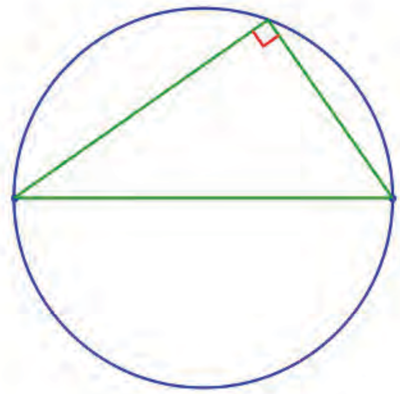


വൃത്തകേന്ദ്രവും വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വര, ബിന്ദുവിലെ കോണിനെ, $x°$, $y°$ എന്നീ ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു എന്നെടുക്കാം.



സമപാർശ്വത്രികോണങ്ങളിലെ താഴത്തെ കോണുകളും $x°$, $y°$ ഇവതന്നെയാണ്.





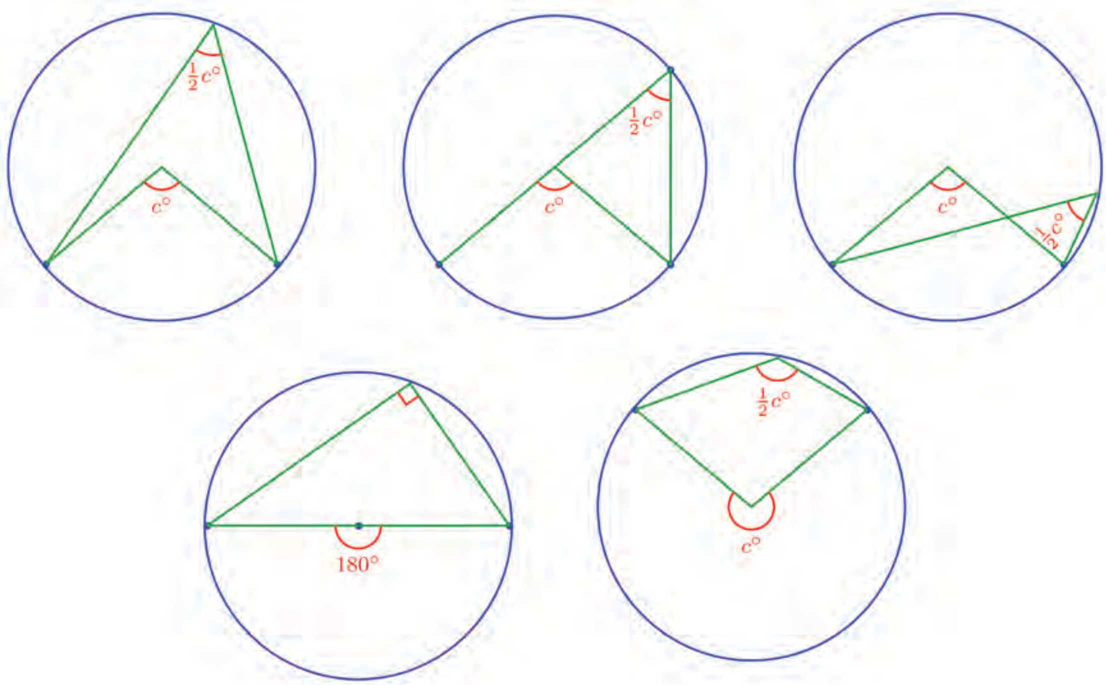
വൃത്തത്തിനകത്തെ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ

$$(x + y) + x + y = 180$$

എന്നും ഇതിൽ നിന്ന് $x + y = 90$ എന്നും കാണാമല്ലോ.

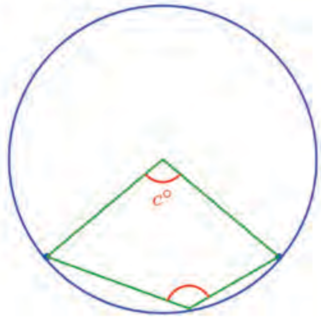
ഈ കണക്കുകളിലെല്ലാം ചെയ്തത് എന്താണ്?

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചു കിട്ടുന്ന കോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണക്കാക്കി:



ഇതിലെല്ലാം ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദു, ചാപത്തിന്റെ പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ചാപത്തിലെ തന്നെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോൺ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയല്ലെന്ന് എളുപ്പം കാണാമല്ലോ:



ഇതുവരെ കണ്ടതെല്ലാം ചേർത്ത് പൊതുതത്വമായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, വൃത്തത്തിലെ ആ ചാപത്തിൽ അല്ലാത്ത, ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാലുണ്ടാകുന്ന കോൺ, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്

ഇതിൽ അർധവൃത്തത്തിന്റെ കാര്യം പ്രത്യേകം പറയേണ്ടതാണ്.

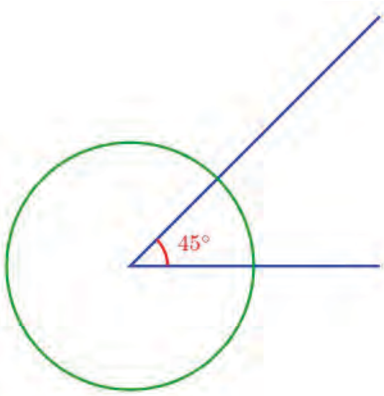
അർധവൃത്തത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ മറ്റേതെങ്കിലും ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന കോൺ മട്ടമാണ്

ഇതല്പം ചുരുക്കി, ഇങ്ങനെയും പറയാം:

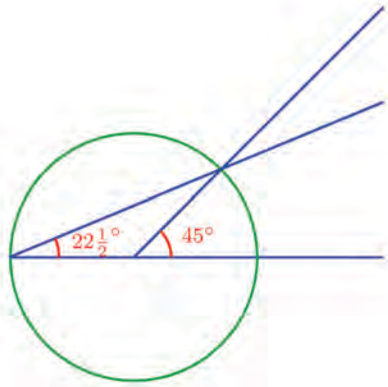
അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടമാണ്

ഈ തത്വങ്ങളുടെ ചില പ്രയോഗങ്ങൾ നോക്കാം.

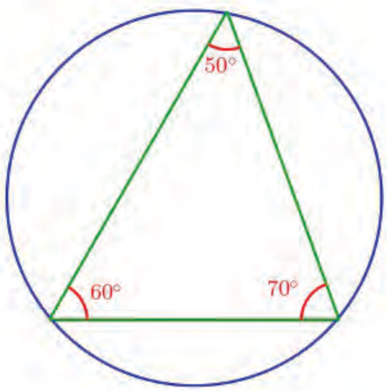
കോണുകൾ പകുതിയാക്കാൻ ആദ്യം പറഞ്ഞ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



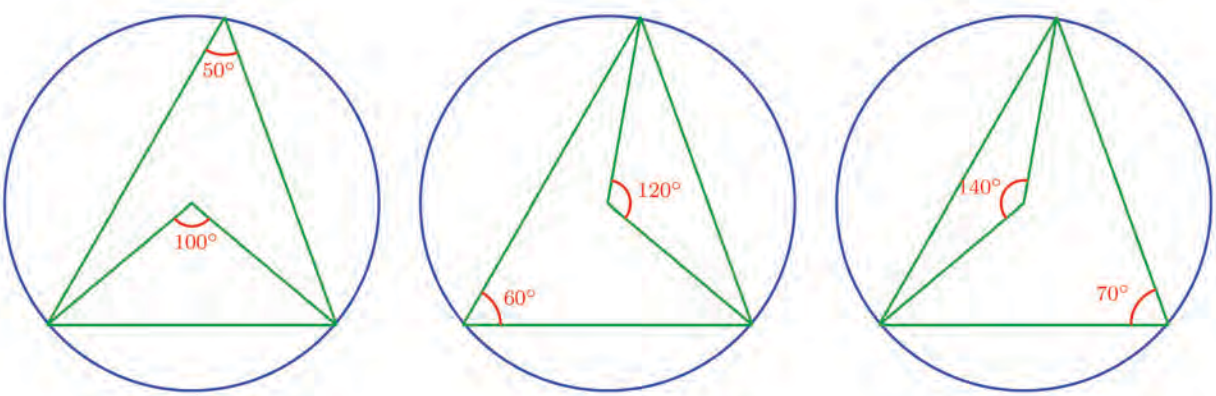
കോണിന്റെ മൂല കേന്ദ്രമായാണ് വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്നത്. ഇനി കോണിന്റെ താഴത്തെ വര നീട്ടി വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും, കോണിന്റെ മുകളിലെ വര വൃത്തത്തെ മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുവും യോജിപ്പിച്ചാൽ പകുതിക്കോണായി.



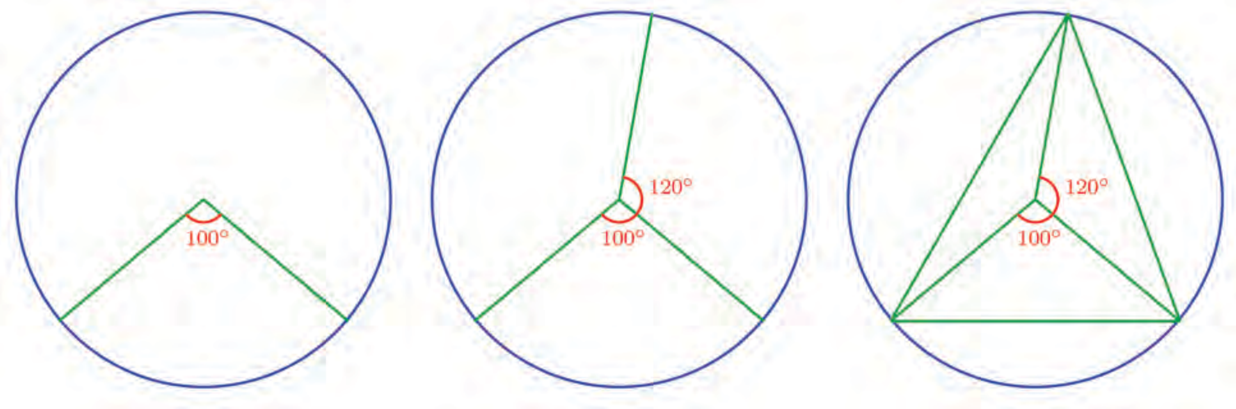
ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ നിശ്ചിത കോണുകളുള്ള ത്രികോണം വരയ്ക്കാനും ഈ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, മൂലകളെല്ലാം വൃത്തത്തിലായതും, കോണുകൾ 50°, 60°, 70° യും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം.



ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ, വൃത്തത്തെ മൂന്നു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നുണ്ടല്ലോ. അവയുടെ കേന്ദ്രകോണുകൾ എന്താണ് ?

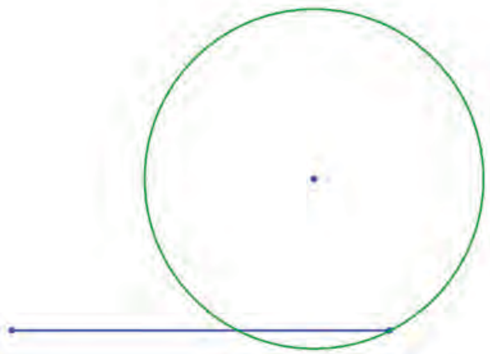


അപ്പോൾ ത്രികോണം വരയ്ക്കാൻ, കേന്ദ്രത്തിൽ ഇതിലെ രണ്ടു കോണുകൾ വരച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

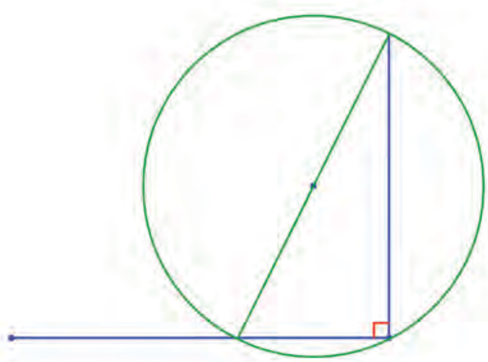


ഇനി അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടമാണ് എന്ന തത്വം ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. ചിത്രത്തിലെ വരയുടെ വലത്തെ അറ്റത്തുകൂടി വരയ്ക്ക് ലംബം വരയ്ക്കണം.

അതിന് ആദ്യം, ഈ ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതും, വരയെ മറ്റൊരു ബിന്ദുവിൽ മുറിച്ചുകടക്കുന്നതുമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കണം:



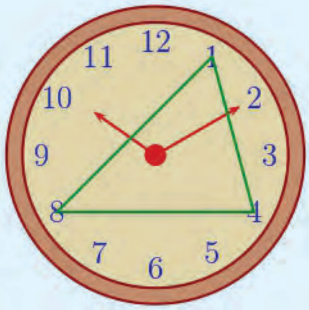
ഇനി ഈ ബിന്ദുവിൽക്കൂടിയുള്ള വ്യാസം വരച്ച്, അതിന്റെ മറ്റേ അറ്റം, ആദ്യത്തെ വരയുടെ അറ്റവുമായി യോജിപ്പിക്കുക:



അർധവൃത്തത്തിലെ കോൺ മട്ടമായതിനാൽ, ഈ വര, ആദ്യത്തെ വരയ്ക്ക് ലംബമാണ്.

സ്കേലും കോമ്പസും ഉപയോഗിച്ച് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കാനുള്ള മറ്റൊരു മാർഗം എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർമയുണ്ടോ (**സമഭാജികൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വരയുടെ സമഭാജികൾ** എന്ന ഭാഗം).

(1) ഒരു ക്ലോക്കിലെ 1, 4, 8 എന്നീ സംഖ്യകൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നു.



(i) ഈ ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

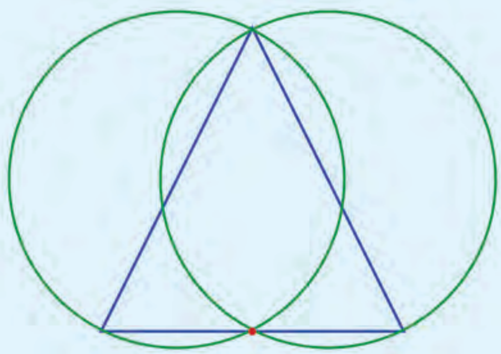
(ii) ക്ലോക്കിലെ സംഖ്യകൾ യോജിപ്പിച്ച് എത്ര സമഭുജത്രികോണങ്ങളുണ്ടാക്കാം ?

(2) പരിവൃത്തആരം 3.5 സെന്റിമീറ്റർ ആയ ഒരു സമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(3) പരിവൃത്തആരം 3 സെന്റിമീറ്ററും, രണ്ടു കോണുകൾ $32\frac{1}{2}^\circ$ യും $37\frac{1}{2}^\circ$ യും ആയ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

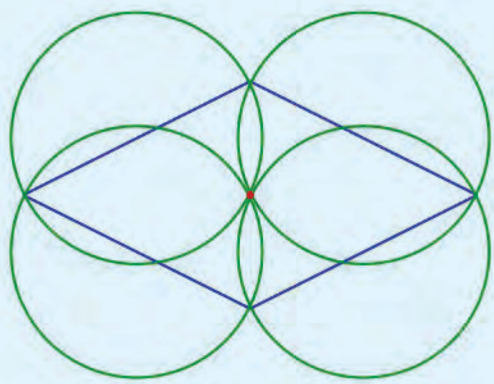
(4) ചിത്രത്തിൽ ഒരു വര വ്യാസമായി വലിയ അർധവൃത്തവും, വരയുടെ പകുതി വ്യാസമായി ചെറിയ അർധവൃത്തവും വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും വലിയ അർധവൃത്തത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരയെ, ചെറിയ അർധവൃത്തം സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(5) ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ തുല്യമായ വശങ്ങൾ വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങൾ, മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക:

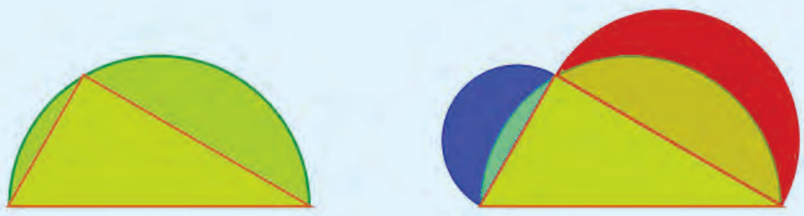


(*സൂചന : ഓരോ വൃത്തമായി പരിശോധിക്കുക*).

(6) ഒരു സമഭുജസാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു വശങ്ങളും വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളെല്ലാം പൊതുവായ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക.



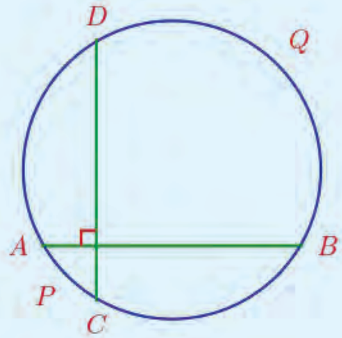
(7) ഒരു അർധവൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവും, വ്യാസത്തിന്റെ രണ്ടറ്റങ്ങളും ചേർത്ത് ഒരു ത്രികോണം വരച്ചു. തുടർന്ന്, ത്രികോണത്തിന്റെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ വ്യാസമായി അർധ വൃത്തങ്ങളും വരച്ചിട്ടുണ്ട്.



രണ്ടാം ചിത്രത്തിലെ നീലയും ചുവപ്പുമായ ചന്ദ്രക്കലകളുടെ പരപ്പളവുകൾ കൂട്ടിയാൽ, ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കിട്ടുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

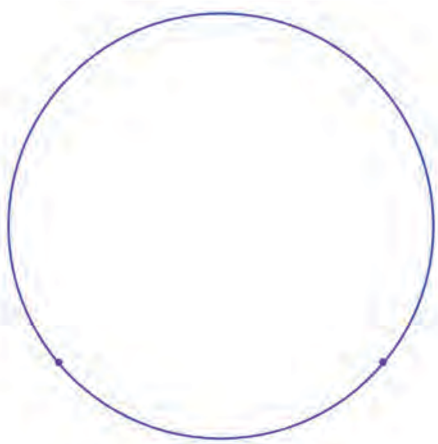
(സൂചനഃ ഒമ്പതാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തഭാഗങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ അവസാനത്തെ ചോദ്യം ഓർക്കുക).

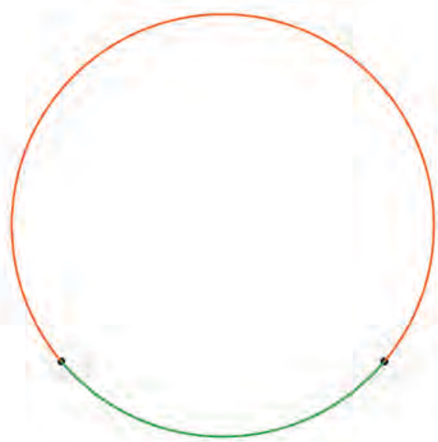
(8) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തത്തിൽ, AB, CD ഇവ പരസ്പരം ലംബമായ ഞാണുകളാണ്. APC, BQD എന്നീ ചാപങ്ങൾ ചേർത്തുവച്ചാൽ, വൃത്തത്തിന്റെ പകുതിയാകും എന്നു തെളിയിക്കുക.



വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ

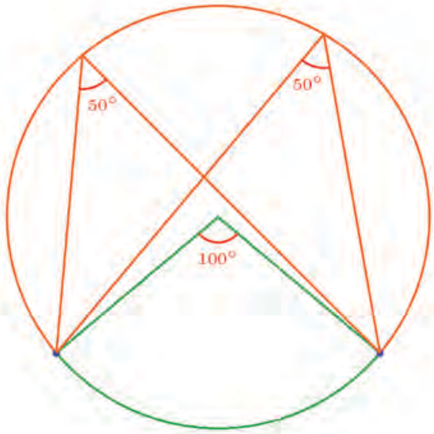
വൃത്തത്തിലെ ഏതു രണ്ടു ബിന്ദുക്കളും അതിനെ രണ്ടു ചാപങ്ങളായി ഭാഗിക്കുമല്ലോ.

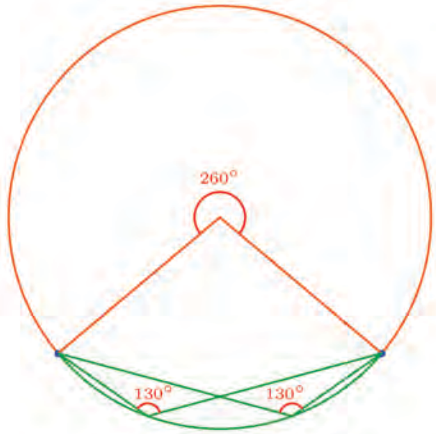




ഇവയിൽ ഓരോ ചാപത്തിനേയും മറ്റേ ചാപത്തിന്റെ **മറുചാപം (Alternate arc)** എന്നു വിളിക്കാം. വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദു, ഇവയിലെ ഒരു ചാപത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ അതിന്റെ മറുചാപത്തിലാണ്. അപ്പോൾ ഒരു ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണും, അതിന്റെ അറ്റങ്ങൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന കോണും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഇങ്ങനെ പറയാം:

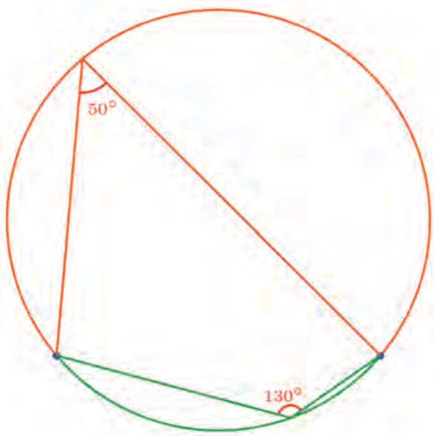
വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപത്തിന്റെ അറ്റങ്ങൾ, മറുചാപത്തിലെ ഏതു ബിന്ദുവുമായും യോജിപ്പിച്ചാലുണ്ടാകുന്ന കോൺ, ചാപത്തിന്റെ കേന്ദ്രകോണിന്റെ പകുതിയാണ്



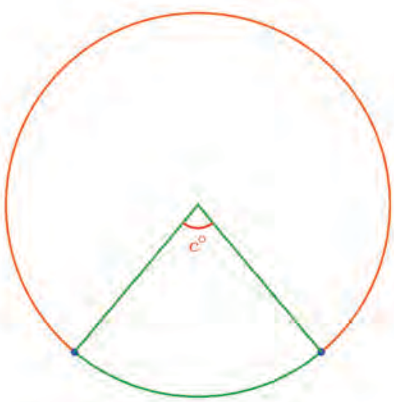


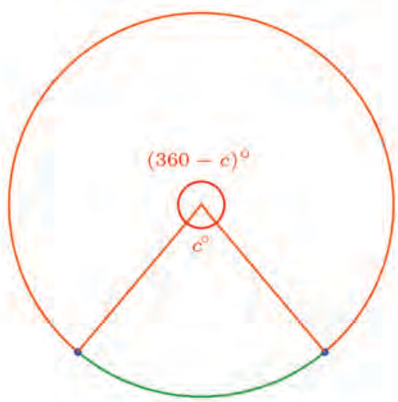
അതായത്, വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തെ രണ്ട് ചാപങ്ങളായി മുറിക്കുന്നു; ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഇവയിലെ ഒരു ചാപത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളെല്ലാം തുല്യമാണ്.

ഒരു ചാപത്തിലെയും മറുചാപത്തിലെയും ബിന്ദുക്കളുമായി യോജിപ്പിച്ച് ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തമ്മിലെന്താണ് ബന്ധം ?

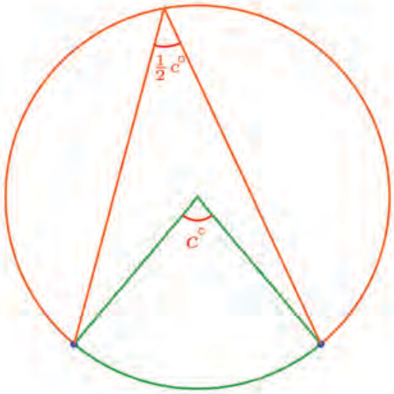


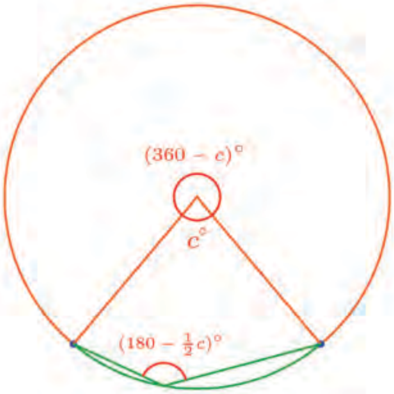
വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന ഒരു ചാപത്തിന്റെയും മറുചാപത്തിന്റെയും കേന്ദ്ര കോണുകളുടെ തുക 360° ആണല്ലോ.





ഒരു ചാപത്തിലെയും മറുചാപത്തിലെയും ബിന്ദുക്കളിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ ഇവയുടെ പകുതിയും.

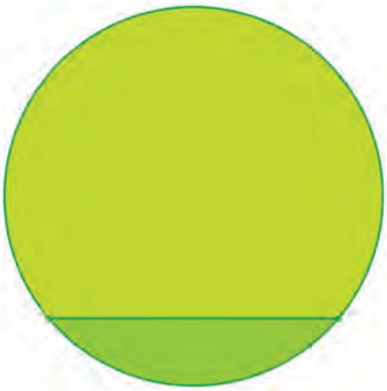




അപ്പോൾ എന്തു പറയാം ?

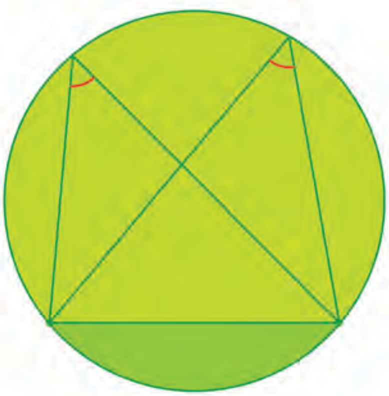
> വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ, അവ നിശ്ചയിക്കുന്ന ഒരു ചാപത്തിലും മറുചാപത്തിലും ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകളുടെ തുക 180° ആണ്.

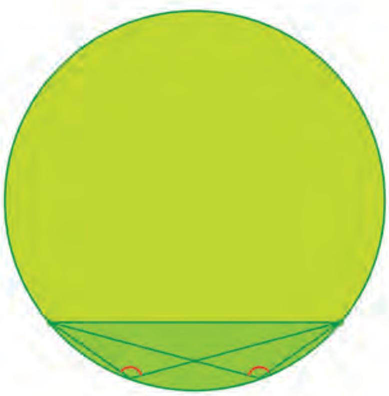
ഇത് മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറയാം. വൃത്തത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഒരു ഞാൺ, വൃത്തപ്പരപ്പിനെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കുമല്ലോ.



ഇത്തരം വൃത്തഭാഗങ്ങളെ **വൃത്തഖണ്ഡം (Circular segment)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഒരു ഞാൺ മുറിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്ത ഖണ്ഡങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ മറ്റൊന്നിന്റെ **മറുഖണ്ഡം (Alternate segment)** എന്നും പറയാം.

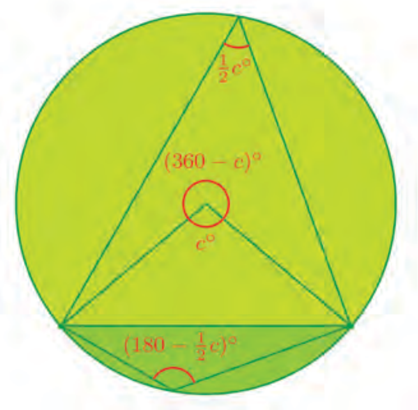
അപ്പോൾ വൃത്തത്തിലെ കോണുകളെക്കുറിച്ച് ചാപങ്ങൾ ഉപ യോഗിച്ചു പറഞ്ഞത്, വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും പറയാം.



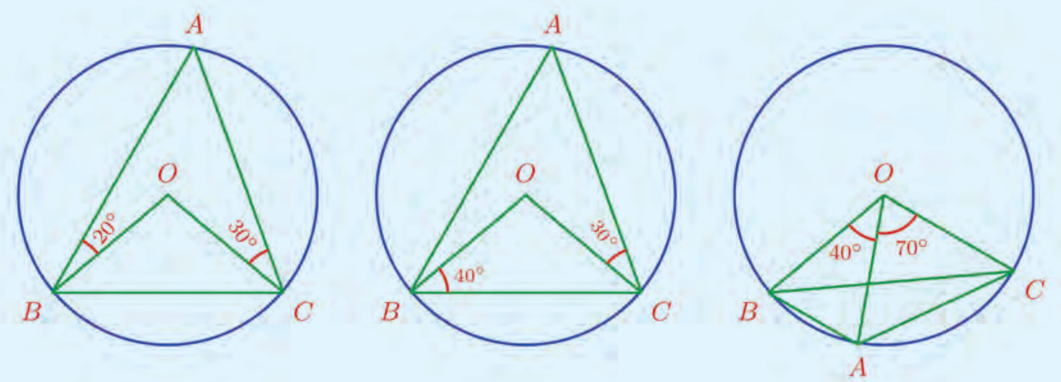


ഒരേ വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകൾ തുല്യമാണ്. ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെയും മറുഖണ്ഡത്തിലെയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണ്

വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ വൃത്തത്തെ ഭാഗിക്കുന്ന ചാപങ്ങളുടെ കേന്ദ്രകോണുകളും, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച ഞാൺ വൃത്തപ്പരപ്പിനെ ഭാഗിക്കുന്ന വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകളും തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ ഇങ്ങനെയാണ്:



(1) ചുവടെയുള്ള മൂന്നു ചിത്രങ്ങളിലും O വൃത്ത കേന്ദ്രവും A, B, C വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുമാണ്. ഓരോന്നിലും ABC, OBC എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിലെ കോണുകളെല്ലാം കണക്കാക്കുക.



(2) ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഓരോ കണക്കിലും ഒരു വൃത്തവും അതിലൊരു ഞാണും വരച്ച് വൃത്തത്തെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളാക്കണം. ഭാഗങ്ങൾ കണക്കിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന പോലെയാകണം:

(i) ഒരു ഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം $80°$

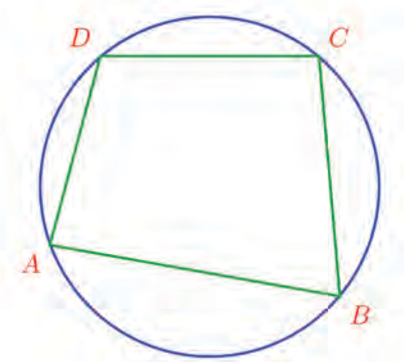
(ii) ഒരു ഭാഗത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം $110°$

(iii) ഒരു ഭാഗത്തെ കോണുകളെല്ലാം, മറുഭാഗത്തെ കോണുകളുടെ പകുതി

(iv) ഒരു ഭാഗത്തെ കോണുകളെല്ലാം, മറുഭാഗത്തെ കോണുകളുടെ ഒന്നര മടങ്ങ്

വൃത്തവും ചതുർഭുജവും

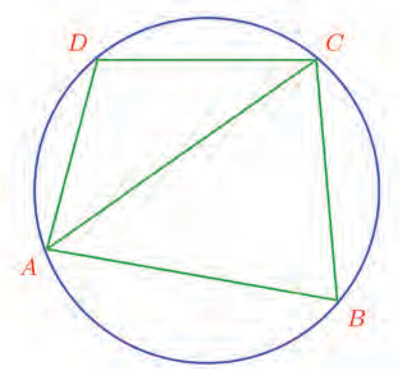
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

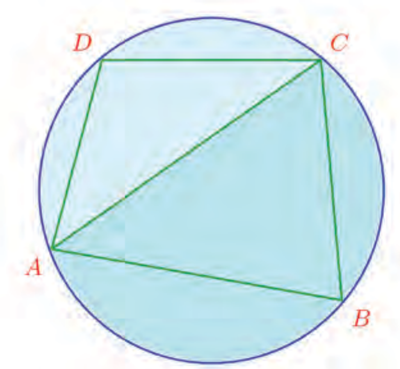


ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച്, മൂലകൾ വൃത്തത്തിൽ വരത്തക്കവിധം ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ കോണുകളെല്ലാം അടയാളപ്പെടുത്തുക (Angle ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ചതുർഭുജത്തിനുള്ളിൽ ക്ലിക്കുചെയ്താൽ മതി). എതിർകോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണെന്ന് പരിശോധിക്കൂ. ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റി നോക്കൂ.

വൃത്തത്തിലെ നാലു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ഒരു ചതുർഭുജം വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ചതുർഭുജത്തിലെ എതിർകോണുകൾ തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ?

കിട്ടിയില്ലെങ്കിൽ AC യോജിപ്പിച്ചുനോക്കൂ:





ഇപ്പോൾ B യിലെയും D യിലെയും കോണുകൾ, AC എന്ന ഞാൺ വൃത്തത്തെ മുറിച്ചുണ്ടാക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളിലെ കോണുകളാണ്. അതിനാൽ അവയുടെ തുക $180°$ ആണ്.

ഇതുപോലെ, BD വരച്ചുനോക്കിയാൽ A യിലെയും C യിലെയും കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണെന്നു കിട്ടും.

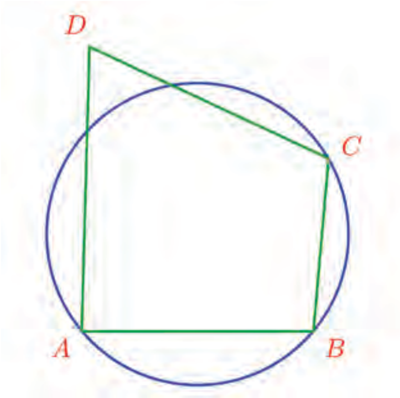
അപ്പോൾ പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

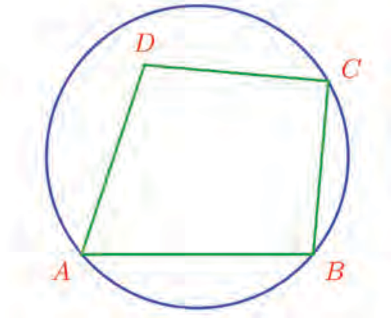
ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലാണെങ്കിൽ, അതിലെ എതിർകോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണ്

മറിച്ചു പറഞ്ഞാൽ ശരിയാകുമോ ? അതായത്, ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക $180°$ ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുമോ ?

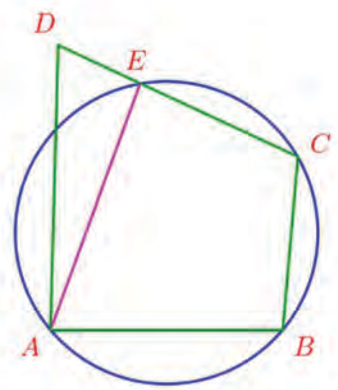
ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. ഏതു ചതുർഭുജത്തിന്റെയും മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമല്ലോ (എട്ടാം ക്ലാസിലെ **വൃത്തങ്ങൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **വരകളും വൃത്തങ്ങളും** എന്ന ഭാഗം).

ഇനി നാലാമത്തെ മൂല ചിലപ്പോൾ വൃത്തത്തിൽ തന്നെയാകാം, അല്ലെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന് അകത്തോ പുറത്തോ ആകാം. വൃത്തത്തിലായാൽ ആ മൂലയിലെയും എതിർമൂലയിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180° ആയിരിക്കുമെന്ന് കണ്ടല്ലോ.





ആദ്യത്തെ ചിത്രം നോക്കാം. വൃത്തം CD യെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുവും A യും യോജിപ്പിച്ചാൽ, നാലു മൂലയും വൃത്തത്തിലായ ചതുർഭുജമായി.



ഇപ്പോൾ A, B, C, E ഇവയെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ,

$$\angle B + \angle AEC = 180° \quad (1)$$

ഇതിലെ $\angle AEC$ എന്നത്, AED എന്ന ത്രികോണത്തിൽ, E യിലെ പുറംകോണാണ്. അപ്പോൾ

$$\angle AEC = \angle D + \angle EAD$$

ഇതിൽനിന്ന്

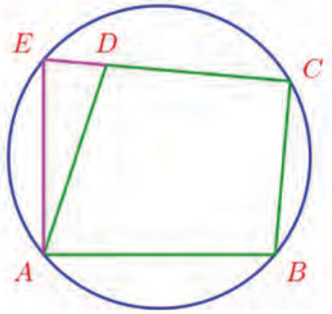
$$\angle D < \angle AEC \qquad (2)$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇവിടെ (1), (2) എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തിയ ബീജഗണിതവാക്യങ്ങളുടെ അർഥം ആലോചിച്ചാൽ,

$\angle B + \angle D < 180°$ എന്ന് കാണാൻ വിഷമമില്ല.

അപ്പോൾ നാലാം മൂല വൃത്തത്തിന് പുറത്തായാൽ ആ മൂലയിലേയും എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക 180° ൽ കുറവായിരിക്കും.

ഇനി രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, *CD* നീട്ടി, അതു വൃത്തത്തിൽ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുവും *A* യും യോജിപ്പിക്കാം:



ഇതിൽ

$$\angle B + \angle E = 180° \qquad (3)$$

എന്നു കാണാം. കൂടാതെ *AED* എന്ന ത്രികോണത്തിൽ നിന്ന്

$$\angle ADC = \angle E + \angle EAD$$

എന്നും കാണാം. അപ്പോൾ

$$\angle ADC > \angle E \qquad (4)$$

(3), (4) എന്നീ ബന്ധങ്ങളിൽ നിന്ന്

$$\angle B + \angle ADC > 180°$$

എന്നു കാണമല്ലോ.

അപ്പോൾ നാലാം മൂല വൃത്തത്തിന് അകത്തായാൽ ആ മൂലയിലെയും എതിർമൂലയിലെയും കോണുകളുടെ തുക 180° യിൽ കൂടുതൽ.

> Polygon ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച്, ഒരു ചതുർഭുജം *ABCD* വരയ്ക്കുക. Circle through 3 points ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് *A, B, C* എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ∠*D*, ∠*B* എന്നിവ നിരീക്ഷിക്കുക. *D* യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. *D* എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിന് പുറത്തായിരിക്കുമ്പോൾ ഈ കോണളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധമെന്താണ്? വൃത്തത്തിനകത്തായിരിക്കുമ്പോഴോ ? വൃത്തത്തിലായാലോ ?

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു മൂലകളിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തത്തിനു പുറത്താണ് നാലാമത്തെ മൂലയെങ്കിൽ, ആ മൂലയിലേയും, എതിർമൂലയിലേയും കോണുകളുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാണ്; അകത്താണെങ്കിൽ, തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലും.

ഇനി *ABCD* എന്ന ഒരു ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle B + \angle D = 180°$ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. *A, B, C* ഇവയിൽക്കൂടിയുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

D വൃത്തത്തിനു പുറത്താകുമോ ? പുറത്താണെങ്കിൽ, ∠*B*, ∠*D* ഇവയുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കുറവാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു പുറത്തല്ല.

D അകത്താണോ ? അകത്താണെങ്കിൽ ∠*B*, ∠*D* ഇവയുടെ തുക 180° യേക്കാൾ കൂടുതലാകണമല്ലോ. അപ്പോൾ വൃത്തത്തിനു അകത്തുമല്ല.

പുറത്തും അകത്തുമല്ലാത്തതുകൊണ്ട്, *D* വൃത്തത്തിൽത്തന്നെയാണ്.

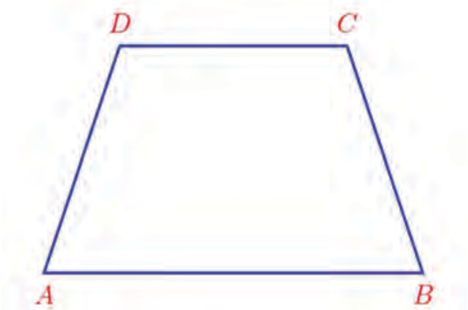
അതായത്,

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർകോണുകളുടെ തുക 180° ആണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാം

നാല് മൂലകളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ചതുർഭുജം എന്നതിനെ ചുരുക്കി **ചക്രീയചതുർഭുജം (Cyclic quadrilateral)** എന്നാണ് പറയുന്നത്. ഇപ്പോൾ കണ്ടതനുസരിച്ച്, എതിർകോണുകളുടെ തുക 180° ആയ ചതുർഭുജങ്ങളാണ് ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങൾ.

ചതുരങ്ങളെല്ലാം ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങളാണല്ലോ.

സമപാർശ്വലംബകങ്ങളും ചക്രീയചതുർഭുജങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കാം. ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:



$ABCD$ ഒരു സമപാർശ്വലംബകമാണ്. അപ്പോൾ

$$\angle A = \angle B$$

മാത്രമല്ല, AB യും CD യും സമാന്തരമായതിനാൽ

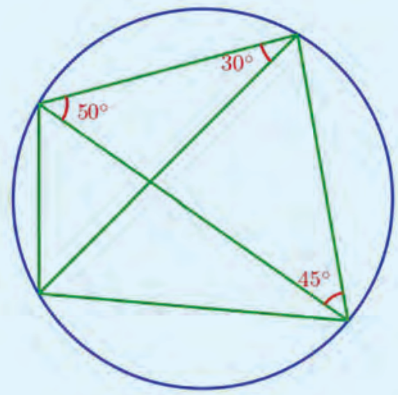
$$\angle A + \angle D = 180°$$

ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽനിന്ന്

$$\angle B + \angle D = 180°$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. അതായത്, $ABCD$ ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്.

(1) ചിത്രത്തിലെ ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളും, വികർണ്ണങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകളും കണക്കാക്കുക:

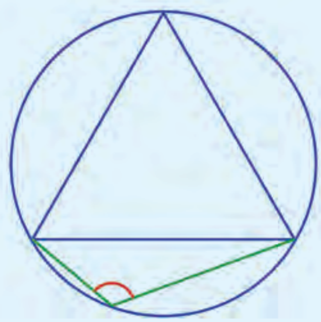


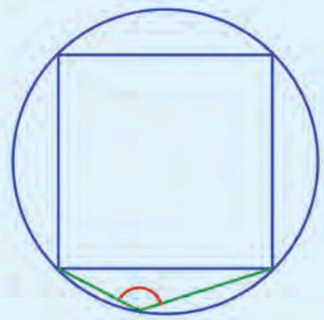
(2) ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിലെ ഏതു മൂലയിലെയും പുറംകോൺ, എതിർ മൂലയിലെ അകക്കോണിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ചതുരമല്ലാത്ത സാമാന്തരികങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) സമപാർശ്വമല്ലാത്ത ലംബകങ്ങളൊന്നും ചക്രീയമല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

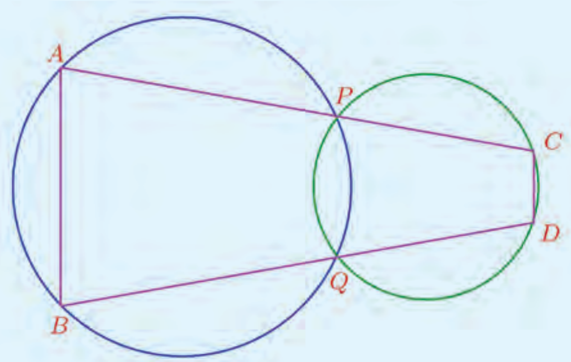
(5) ചുവടെയുള്ള ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ, മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായ സമഭുജത്രികോണം വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടു മൂലകൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ, മൂലകളെല്ലാം ഒരു വൃത്തത്തിലായ സമചതുരം വരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടു മൂലകൾ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.



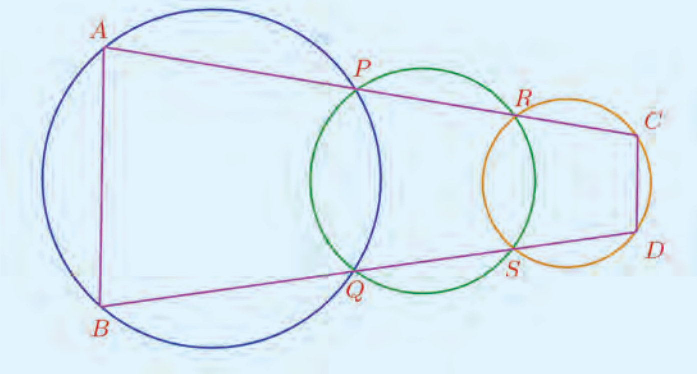


രണ്ടു ചിത്രത്തിലെയും അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന കോൺ കണക്കാക്കുക.

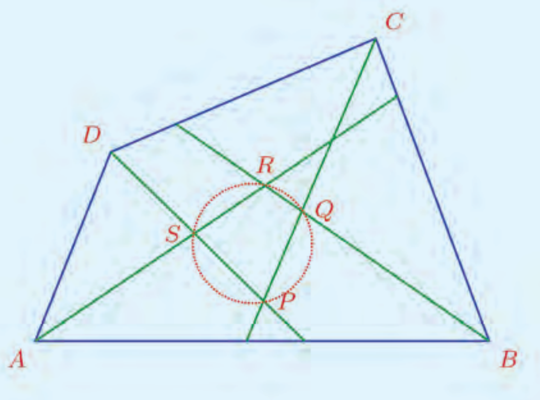
(6) (i) ചിത്രത്തിലെ വൃത്തങ്ങൾ *P, Q* എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ മുറിച്ചു കടക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിലൂടെയുള്ള രണ്ട് വരകൾ, വൃത്തങ്ങളുമായി *A, B, C, D* എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. *AC, BD* എന്നീ വരകൾ സമാന്തരമല്ല. ഈ വരകൾക്ക് ഒരേ നീളമാണെങ്കിൽ, *ABDC* ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



(ii) ചിത്രത്തിലെ ഇടതും വലതും വൃത്തങ്ങൾ നടുവിലെ വൃത്തത്തിനെ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് *P, Q, R, S;* ഇവ യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ ഇടതും വലതും വൃത്തങ്ങളുമായി *A, B, C, D* എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു. *ABDC* ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.



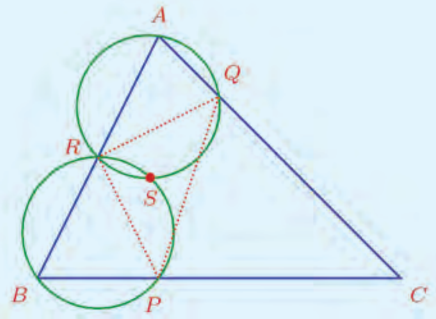
(7) ചിത്രത്തിൽ *ABCD* എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ പരസ്പരം മുറിച്ചു കടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാണ് *P, Q, R, S*

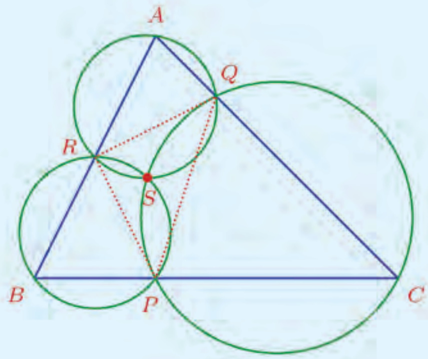


PQRS ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(സൂചന : *PCD* എന്ന ത്രികോണത്തിലെയും *RAB* എന്ന ത്രികോണത്തിലെയും കോണുകളുടെ തുക നോക്കുക).

(8) ചുവടെയുള്ള ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ *ABC* എന്ന ത്രികോണത്തിലെ *BC*, *CA*, *AB* എന്നീ വശങ്ങളിൽ *P*, *Q*, *R* എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി, *AQR*, *BRP* എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരിവൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു; അവ ത്രികോണത്തിനകത്തെ *S* എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ മുറിച്ചുകടക്കുന്നു.





രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലെപ്പോലെ, *CPQ* എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തവും *S* ൽക്കൂടി കടന്നുപോകും എന്നു തെളിയിക്കുക.

(സൂചന: ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിൽ *PS*, *QS*, *RS* യോജിപ്പിച്ച്, *S* ൽ ഉണ്ടാകുന്ന മൂന്നു കോണുകൾക്ക് $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ഇവയുമായുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക).