7

ന്യൂനസംഖ്യകൾ

അളവുകളും സംഖ്യകളും

പൂജ്യത്തിനേക്കാൾ താഴെയുള്ള താപനിലകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടില്ലേ ? വെള്ളമുറഞ്ഞ് മഞ്ഞായി കട്ടപിടിക്കുന്ന താപനിലയെ ആണ് 0°C, അഥവാ പൂജ്യം ഡിഗ്രി സെൽഷ്യസ്, എന്നെടുത്തിരിക്കുന്നത്. അതിലും തണുപ്പേറിയ അവസ്ഥയെ കുറിക്കാൻ −1°C, −20.5°C എന്നെല്ലാം ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരുന്നു.

ചില കളികളിൽ പോയിന്റ് സൂചിപ്പിക്കാനും, ചില പരീക്ഷകളിൽ മാർക്കിടാനുമെല്ലാം ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതും കണ്ടു. ഇവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ, ചില കണക്കുകൂട്ടലുകൾ നടത്തുന്നതിന്റെ പൊതുതത്വങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി.

ഉദാഹരണമായി,

3°C ആയിരുന്ന താപനിലയിൽ നിന്ന് വീണ്ടും 7°C കുറഞ്ഞാൽ താപനില എത്രയാകും ?

എന്ന ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരമായി

$$3 - 7 = -4$$

എന്ന ക്രിയയും, ഇതുപോലെയുള്ള മറ്റു സന്ദർഭങ്ങളിലൂടെ, ചെറിയ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് വലിയ സംഖ്യ കുറയ്ക്കുമ്പോൾ ന്യൂനസംഖ്യ കിട്ടുന്നതിന്റെ പൊതുതത്വവും കണ്ടു.

ഈ രീതിയിൽ പല സന്ദർഭങ്ങളിൽ ആവശ്യമായി വരുന്ന ക്രിയകളുടെ പൊതുരൂപങ്ങളായി മൂന്നു തത്വങ്ങളാണ് കണ്ടത്:

x, y എന്ന ഏതു രണ്ട് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും
(i) $x < y$ ആണെങ്കിൽ $x - y = -(y - x)$
(ii) $-x + y = y - x$
(iii) $-x - y = -(x + y)$

ഇവ ഉപയോഗിച്ച്, ചുവടെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന കണക്കുകൾ ചെയ്യാമല്ലോ ?

(i) $6 - 8$ (ii) $-6 + 8$ (iii) $-6 - 8$

(iv) $2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$ (v) $-2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$ (vi) $-2\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}$

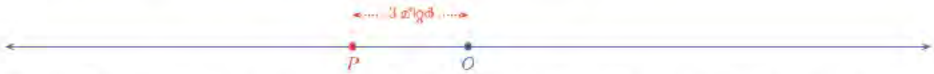
ഇനി ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന മറ്റൊരു സന്ദർഭം നോക്കാം:

സ്ഥാനവും സംഖ്യയും

ഒരു നേർവരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു സങ്കല്പിക്കുക. ഇതിന്റെ സ്ഥാനം സൂചിപ്പിക്കാൻ, ഈ ബിന്ദു ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് എത്ര അകലെയാണെന്ന് (ഏതെങ്കിലും ഏകകം ഉപയോഗിച്ച്) പറയാം.

നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ O എന്നും, ചലിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ P എന്നും എടുത്ത്, O യുടെ വലതുവശത്ത് 3 മീറ്റർ അകലെയായി P വരുന്നതാണ് ചിത്രത്തിൽ.

O യുടെ ഇടതുവശത്ത്, 3 മീറ്റർ അകലെയായും P വരാമല്ലോ:

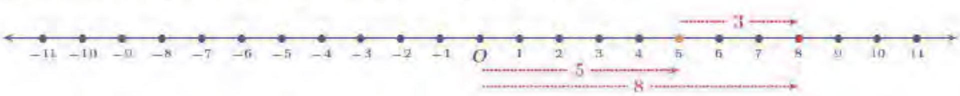


അപ്പോൾ P യുടെ സ്ഥാനം കൃത്യമാക്കാൻ, O യിൽനിന്നുള്ള അകലം മാത്രം പറഞ്ഞാൽപ്പോരാ, എതു വശത്താണ് എന്നും കൂടി പറയണം.

ഇതൊഴിവാക്കാൻ ഒരു മാർഗം, ഇടത്തോട്ടുള്ള സംഖ്യകളെ ന്യൂനസംഖ്യകളായി പറയുക എന്നതാണ്. അളക്കുന്ന ഏകകം (മീറ്ററോ, സെന്റിമീറ്ററോ എന്തായാലും) തീരുമാനിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, വരയിലെ O അല്ലാത്ത എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങളെയും അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും ഉപയോഗിച്ചു പറയാം:

O യുടെ സ്ഥാനം 0 കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കാം.

ഇനി ഈ വരയിൽ 5 എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് ഒരു ബിന്ദു 8 എന്ന സ്ഥാനത്തേയ്ക്ക് മാറി എന്നു കരുതുക. സ്ഥാനത്തിലുണ്ടായ മാറ്റം $8 - 5 = 3$ എന്നു പറയാം:

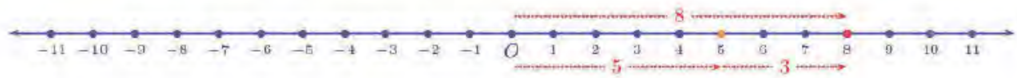


മറിച്ച്, 5 എന്ന സ്ഥാനത്തു നിന്ന് 3 സ്ഥാനം മാറി എന്നു പറഞ്ഞാൽ, ഇപ്പോഴത്തെ സ്ഥാനം 8 തന്നെയാണെന്ന് പറയാൻ പറ്റുമോ ?

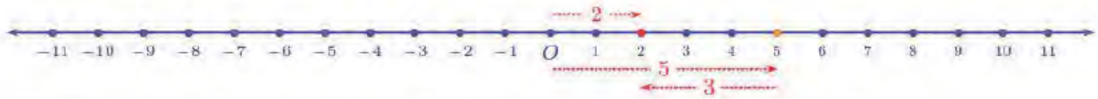
മാറ്റം വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ ശരി; ഇടത്തോട്ടായാലോ ?

അപ്പോൾ, സ്ഥാനമാറ്റം എത്രയാണെന്ന് അറിഞ്ഞതുകൊണ്ടു മാത്രം ഇപ്പോഴത്തെ സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാനാവില്ല; വലത്തോട്ടോ ഇടത്തോട്ടോ എന്നു കൂടി പറയണം.

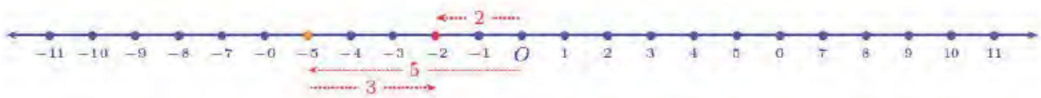
അതായത് 5 എന്ന ആദ്യ സ്ഥാനത്തുനിന്ന് വലത്തോട്ട് 3 സ്ഥാനം മാറി എന്നു പറഞ്ഞാൽ അവസാനമെത്തിയ സ്ഥാനം 8;



സ്ഥാനമാറ്റം ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ 2:



അപ്പോൾ −5 എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 3 സ്ഥാനം വലത്തോട്ട് മാറിയാലോ?



ആദ്യസ്ഥാനവും, ദിശയോടൊപ്പം സ്ഥാനമാറ്റവും അറിഞ്ഞാൽ അവസാനസ്ഥാനം കണക്കാക്കാനുള്ള പൊതുവായ ഒരു മാർഗം ഉണ്ടാക്കാനായി, വ്യത്യസ്ത സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഇവ എങ്ങനെയാണെന്ന് ഒരു പട്ടികയായി എഴുതാം:

ആദ്യം വലത്തോട്ടുള്ള സ്ഥാനമാറ്റം നോക്കാം:

ആദ്യസ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം	അവസാനസ്ഥാനം
5	3 വലത്തേയ്ക്ക്	8
3	5 വലത്തേയ്ക്ക്	8
−5	3 വലത്തേയ്ക്ക്	−2
−3	5 വലത്തേയ്ക്ക്	

ചിത്രം വരച്ച് (അല്ലെങ്കിൽ മനസ്സിൽ സങ്കല്പിച്ച്) പട്ടികയിലെ അവസാന സംഖ്യയും എഴുതാമല്ലോ.

പട്ടികയിലെ സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളിൽ സംഖ്യകൾ മാത്രമാക്കിയാലോ?

ആദ്യസ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം	അവസാനസ്ഥാനം
5	3	8
3	5	8
−5	3	−2
−3	5	2

ഇനി പട്ടികയിലെ സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധം എന്ന് അന്വേഷിക്കാം.

ആദ്യത്തെ രണ്ടു വരികളിൽ, ഒന്നാമത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയതാണ് അവസാനത്തെ സംഖ്യ എന്ന് ഒറ്റ നോട്ടത്തിൽ കാണാം.

അടുത്ത വരിയിലോ ?

$$-5 + 3 = 3 - 5 = -2$$

എന്നു നേരത്തെതന്നെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

അവസാനത്തെ വരിയിലോ ?

$$-3 + 5 = 5 - 3 = 2$$

എന്നും നേരത്തെതന്നെ കണ്ടിട്ടുണ്ട്.

അപ്പോൾ പട്ടികയിലെ ഓരോ വരിയിലും, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ് അവസാന സംഖ്യ.

ആദ്യസ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം	അവസാനസ്ഥാനം
5	3	$8 = 5 + 3$
3	5	$8 = 3 + 5$
-5	3	$-2 = -5 + 3$
-3	5	$2 = -3 + 5$

ഇനി ഇടത്തോട്ടുള്ള സ്ഥാനമാറ്റം നോക്കാം:

ആദ്യസ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം	അവസാനസ്ഥാനം
5	3 ഇടത്തേയ്ക്ക്	2
3	5 ഇടത്തേയ്ക്ക്	-2
-5	3 ഇടത്തേയ്ക്ക്	-8
-3	5 ഇടത്തേയ്ക്ക്	-8

സ്ഥാനങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ, ഇടത്തും വലത്തും തിരിച്ചറിയാൻ, ഇടത്തോട്ടുള്ള സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളെ ന്യൂനസംഖ്യയായി എഴുതാം:

ആദ്യസ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം	അവസാനസ്ഥാനം
5	-3	2
3	-5	-2
-5	-3	-8
-3	-5	-8

ആദ്യത്തെ പട്ടികയിലെപ്പോലെ ഇതിലും, ഓരോ വരിയിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയാണോ അവസാന സംഖ്യ ?

ആദ്യത്തെ വരിയിൽ ഇതു പരിശോധിക്കാൻ $5 + (-3)$ എന്ന തുക കണക്കാക്കണം. ഇത്തരമൊരു തുക ഇതുവരെ കണ്ടിട്ടില്ലല്ലോ.

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. അധിസംഖ്യകളിലെല്ലാം കൂട്ടുന്നതിന്റെ ക്രമം മാറ്റിയാലും തുക മാറില്ല ല്ലോ. ഉദാഹരണമായി

$$5 + 3 = 3 + 5 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

അപ്പോൾ, ഇവിടെയും

$$5 + (-3) = -3 + 5$$

എന്നെടുക്കാം. ഇതിൽ

$$-3 + 5 = 5 - 3 = 2$$

എന്നു നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ.

അങ്ങനെ,

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

എന്ന് നിർവചിക്കാം. അപ്പോൾ ഒന്നാമത്തെ വരിയിലും, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയായി അവസാനസംഖ്യ കിട്ടും.

ഇതുപോലെ,

$$3 + (-5) = -5 + 3 = 3 - 5 = -2$$

എന്നെടുത്താൽ, പട്ടികയിലെ അടുത്ത വരിയിലും ഈ ബന്ധം ശരിയാകും:

ആദ്യസ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം	അവസാനസ്ഥാനം
5	−3	$2 = 5 + (-3)$
3	−5	$-2 = 3 + (-5)$
−5	−3	−8
−3	−5	−8

മിച്ചമുള്ള രണ്ടു വരികളിലോ ?

അവയിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ അർഥം പറയണം. തൊട്ടുമുമ്പുള്ള വരികളിൽ, ന്യൂനസംഖ്യ കൂട്ടുന്നത്, വ്യത്യാസമായി എഴുതിയാണല്ലോ.

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$3 + (-5) = 3 - 5 = -2$$

അടുത്ത വരികളിലും

$$(-5) + (-3) = -5 - 3$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5$$

എന്നാക്കിയാലോ ?

ഇവയിലെ അവസാനമെഴുതിയ വ്യത്യാസങ്ങൾ നേരത്തെ ചെയ്തിട്ടുമുണ്ട്.

$$-5 - 3 = -(5 + 3) = -8$$

$$-3 - 5 = -(3 + 5) = -8$$

അങ്ങനെ

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

എന്നെടുത്താൽ, പട്ടികയിലെ അവസാനത്തെ രണ്ടു വരികളിലും മുമ്പുള്ള വരികളിലെ ബന്ധം ശരിയാവുകയും ചെയ്യും;

ആദ്യസ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം	അവസാനസ്ഥാനം
5	–3	2 = 5 + (–3)
3	–5	–2 = 3 + (–5)
–5	–3	–8 = –5 + (–3)
–3	–5	–8 = –3 + (–5)

ഇനി വലതു പട്ടികയും ഇടതു പട്ടികയും ചേർത്തെഴുതി നോക്കാം:

ആദ്യസ്ഥാനം x	സ്ഥാനമാറ്റം y	അവസാനസ്ഥാനം $x + y$
5	3	8 = 5 + 3
3	5	8 = 3 + 5
–5	3	–2 = (–5) + 3
–3	5	2 = (–3) + 5
5	–3	2 = 5 + (–3)
3	–5	–2 = 3 + (–5)
–5	–3	–8 = (–5) + (–3)
–3	–5	–8 = (–3) + (–5)

സ്ഥാനങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയ വരയിൽ, ആദ്യസ്ഥാനവും സ്ഥാനമാറ്റവും വേറെ സംഖ്യകളാക്കിയ ഒരു പട്ടികയാണ് ചുവടെ:

ആദ്യസ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം	അവസാനസ്ഥാനം
7	3 വലത്തേയ്ക്ക്	
3	7 വലത്തേയ്ക്ക്	
−7	3 വലത്തേയ്ക്ക്	
−3	7 വലത്തേയ്ക്ക്	
7	3 ഇടത്തേയ്ക്ക്	
3	7 ഇടത്തേയ്ക്ക്	
−7	3 ഇടത്തേയ്ക്ക്	
−3	7 ഇടത്തേയ്ക്ക്	

ചിത്രം വരച്ച് അവസാനസ്ഥാനങ്ങൾ കണക്കാക്കി പട്ടികയിൽ എഴുതുക. പിന്നീട് സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളെയും അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും മാത്രമായി മാറ്റി എഴുതുക. പട്ടികയിലെ എല്ലാ വരികളിലും ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക തന്നെയാണോ അവസാനസംഖ്യ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

പട്ടികയിലെ എല്ലാ വരികളിലും, അവസാനസംഖ്യ ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും സംഖ്യകളുടെ തുക ആകാനായി, പുതിയ ചില ക്രിയകൾക്ക് അർഥം കൊടുത്തല്ലോ ?

$$3 + (-5) = 3 - 5 = -2$$

$$5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

$$(-5) + (-3) = -5 - 3 = -8$$

$$(-3) + (-5) = -3 - 5 = -8$$

ഇതിലെല്ലാം ഇടതുവശത്ത് പൊതുവായി കാണുന്നത്, ഒരു ന്യൂനസംഖ്യ കൂട്ടുന്നു എന്നതാണ്. വലതുഭാഗത്ത് ഇവയുടെ നിർവചനമായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്നത് ഈ കൂട്ടലുകളെ മറ്റൊരു തരത്തിൽ കുറയ്ക്കലായി മാറ്റിയതാണ്.

കുറേക്കൂടി കൃത്യമായി പറയാൻ ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം:

x ഏതു സംഖ്യയായാലും, y ഏതു അധിസംഖ്യയായാലും

$$x + (-y) = x - y$$

ഇതനുസരിച്ച് സ്ഥാനക്കണക്കിൽ, സ്ഥാനങ്ങളും സ്ഥാനമാറ്റവും ഏതു സംഖ്യകളായാലും, ആദ്യസ്ഥാനത്തോട് സ്ഥാനമാറ്റം കൂട്ടിയാൽ അവസാനസ്ഥാനം കിട്ടും.

അതായത് ആദ്യസ്ഥാനം x, സ്ഥാനമാറ്റം y അവസാന സ്ഥാനം z എന്നെടുത്താൽ, ഇവ ഏതു സംഖ്യകളായാലും അവസാന സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കാൻ

$$z = x + y$$

എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യം മതിയാകും.

ഒരു കാര്യം പല വാക്യം

ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാതെ സ്ഥാനങ്ങളുടെയും സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെയും കണക്ക് ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതാൻ ശ്രമിച്ചാലോ ? ആദ്യത്തെയും അവസാനത്തെയും സ്ഥാനങ്ങൾക്ക് O യിൽനിന്നുള്ള അകലങ്ങൾ x, z അവ തമ്മിലുള്ള അകലം y, എന്നെല്ലാമെടുക്കാം. ഇവയെല്ലാം അധിസംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറയുന്നതിനാൽ, അവയുടെ കൂടെ ഇടതോ വലതോ എന്നുകൂടി പറയേണ്ടി വരും.

x, y ഒരേ ദിശയിലായാൽ
$z = x + y$, അതേ ദിശയിൽ

x, y വിപരീത ദിശകളിലായൽ,

$x > y$ ആണെങ്കിൽ

$z = x - y$, x ന്റെ ദിശയിൽ

$x < y$ ആണെങ്കിൽ

$z = y - x$, y യുടെ ദിശയിൽ എന്നെല്ലാം പറയണം

ഇവിടെ x, y, z ഇവ അധിസംഖ്യകളോ, ന്യൂനസംഖ്യകളോ ആകാം എന്നതുകൊണ്ടാണ്, അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഒറ്റ സമവാക്യത്തിൽ ഒതുക്കാൻ കഴിഞ്ഞത്.

ന്യൂനസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിക്കാതെ, അധിസംഖ്യകളും ഇടതു വലതു വിശേഷണങ്ങളുമാണ് ഉപയോഗിക്കുന്നതെങ്കിൽ, അവസാനസ്ഥാനം പൊതുവായി ബീജഗണിതത്തിൽ എങ്ങനെ പറയാമെന്ന് ആലോചിച്ചു നോക്കൂ.

(1) ചുവടെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക:

x	y	$x + y$
6	−10	
−6	10	
−6	−10	
−6	6	
6	−6	

(2) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ കണക്കിലും, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന തരത്തിലുള്ള രണ്ടു ജോടി x, y കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) x അധിസംഖ്യ, y ന്യൂനസംഖ്യ, $x + y = 1$

(ii) x ന്യൂനസംഖ്യ, y അധിസംഖ്യ, $x + y = 1$

(iii) x അധിസംഖ്യ, y ന്യൂനസംഖ്യ, $x + y = -1$

(iv) x ന്യൂനസംഖ്യ, y അധിസംഖ്യ, $x + y = -1$

(3) ചുവടെയുള്ള പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

x	y	z	$(x + y) + z$	$x + (y + z)$
2	4	−5		
2	−4	5		
−2	4	−5		
2	−4	−5		
−2	4	5		
−2	−4	5		
−2	−4	−5		

സ്ഥാനമാറ്റം

സ്ഥാനക്കണക്കുതന്നെ മറ്റൊരു തരത്തിലാകാം: 4 എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്ന് 7 എന്ന സ്ഥാനത്തെത്താൻ, എത്ര സ്ഥാനം മാറണം ?

3 സ്ഥാനം എന്നു മാത്രം പറഞ്ഞാൽപ്പോരല്ലോ; മാറുന്നത് ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ 1 ൽ അല്ലേ എത്തുക ? അപ്പോൾ 4 ൽ നിന്ന് 7 ൽ എത്താൻ 3 സ്ഥാനം വലത്തോട്ട് എന്നു തന്നെ പറയണം.

7 ൽ നിന്ന് 4 ൽ എത്താനോ ?

അതിനും 3 സ്ഥാനംതന്നെ മാറണം, പക്ഷേ ഇടത്തോട്ട്.

4 ൽ നിന്ന് −7 ൽ എത്താനോ ?

ചിത്രം വരച്ചു നോക്കാം:

വ്യത്യസ്ത വ്യത്യാസം

17 ൽ നിന്ന് 9 കുറയ്ക്കാനുള്ള ഒരു എളുപ്പവഴി, 10 ൽ നിന്ന് 9 കുറച്ച് 7 കൂട്ടുന്നതാണ്.

$$\begin{aligned} 17 - 9 &= (10 + 7) - 9 \\ &= (10 - 9) + 7 \\ &= 1 + 7 = 8 \end{aligned}$$

ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ക്രിയ ഉപയോഗിച്ച്, ഇങ്ങനെയും ചെയ്യാം:

$$\begin{aligned} 17 - 9 &= (10 + 7) - 9 \\ &= 10 + (7 - 9) \\ &= 10 + (-2) \\ &= 10 - 2 = 8 \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ,

$$\begin{aligned} 57 - 29 &= (50 - 20) + (7 - 9) \\ &= 30 + (-2) \\ &= 30 - 2 = 28 \end{aligned}$$

എന്നും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ പല സ്ഥാനങ്ങളും ഇടതും വലതുമായി എടുത്ത്, സ്ഥാനമാറ്റങ്ങൾ കണക്കാക്കി ഒരു പട്ടികയുണ്ടാക്കാം. ആദ്യം സൗകര്യത്തിനായി സ്ഥാനമാറ്റങ്ങൾ ഇടതു-വലത് വിശേഷണങ്ങൾ ചേർത്ത് എഴുതാം:

ആദ്യസ്ഥാനം	എത്തേണ്ട സ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം
4	7	3 വലത്തേയ്ക്ക്
7	4	3 ഇടത്തേയ്ക്ക്
4	−7	11 ഇടത്തേയ്ക്ക്
−7	4	
−4	7	
7	−4	
−4	−7	
−7	−4	

ഇനി സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളേയും സംഖ്യകൾ മാത്രമായെഴുതാം; ഇടത്തേയ്ക്കുള്ളവ ന്യൂനസംഖ്യകൾ

ആദ്യസ്ഥാനം	എത്തേണ്ട സ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം
4	7	3
7	4	−3
4	−7	−11
−7	4	11
−4	7	11
7	−4	−11
−4	−7	−3
−7	−4	3

ഇനി ഈ പട്ടികയിലും ഓരോ വരിയിലെയും മൂന്നു സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ എന്താണ് ബന്ധമെന്ന് ആലോചിക്കാം.

ആദ്യത്തെ വരിയിൽ, സ്ഥാനമാറ്റം കണക്കാക്കിയതുതന്നെ $7 - 4 = 3$ എന്നാണല്ലോ.

രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാൻ പറ്റുമോ ?

$$4 - 7 = -3$$

അപ്പോൾ ഇവിടെയും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്നു ആദ്യത്തെ സംഖ്യ കുറച്ചാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ കിട്ടുന്നുണ്ട്.

അടുത്ത വരിയിലോ?

$$-7 - 4 = -(7 + 4) = -11$$

എന്നു നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ ഇതിലും ഈ കണക്കുകൂട്ടൽ ശരിയാകും.

നാലാമത്തെ വരിയിൽ ഇതു ശരിയാകുമോ എന്നു നോക്കണമെങ്കിൽ, ആദ്യം $4-(-7)$ എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് അർഥം കൊടുക്കണം.

അത് ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. അധിസംഖ്യകൾ കുറയ്ക്കുന്നതിനെ പല രീതിയിൽ വ്യാഖ്യാനിക്കാം. $10-6$ കണക്കാക്കുക എന്ന ചോദ്യത്തെ, 6 നെ 10 ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണം എന്ന പ്രശ്നമായി കാണാം. അങ്ങനെ $6+4=10$ എന്നതിൽ നിന്ന് $10-6=4$ എന്നു കിട്ടും.

ഇതുപോലെ $4-(-7)$ എന്നതിനെ -7 നെ 4 ആക്കാൻ എത്ര കൂട്ടണം എന്ന പ്രശ്നമായി കാണാം. അത് രണ്ടു ഘട്ടമായി കണക്കാക്കാം. -7 നോട് 7 കൂട്ടിയാൽ 0 ആകും. 4 ആകാൻ ഇനിയും 4 കൂട്ടണം. ആകെ കൂട്ടേണ്ടത് $7+4=11$ ഈ വ്യാഖ്യാനമനുസരിച്ച്

$$4-(-7)=7+4=11$$

എന്നെടുക്കാം. ഇത്

$$4-(-7)=4+7=11$$

എന്നെഴുതുന്നതാണ് ഓർക്കാനെളുപ്പം.

അപ്പോൾ നാലാമത്തെ വരിയിലും, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽ നിന്നു ആദ്യത്തെ സംഖ്യ കുറച്ചാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ കിട്ടും.

ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ ആലോചിച്ചാൽ

$$7-(-4)=7+4=11$$

എന്നു കാണാം.

അങ്ങനെ പട്ടികയിലെ അഞ്ചാമത്തെ വരിയും ശരിയായി.

$$-4-7=-(4+7)=-11$$

എന്നു നേരത്തേ കണ്ടതനുസരിച്ച്, ആറാമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകൾ തമ്മിലും ഇതേ ബന്ധമാണ്.

ഇതുവരെ കണ്ടത് പട്ടികയിൽ എഴുതി വയ്ക്കാം;

ആദ്യസ്ഥാനം	എത്തേണ്ട സ്ഥാനം	സ്ഥാനമാറ്റം
4	7	$3=7-4$
7	4	$-3=4-7$
4	-7	$-11=-7-4$
-7	4	$11=4-(-7)$
-4	7	$11=7-(-4)$
7	-4	$-11=-4-7$
-4	-7	-3
-7	-4	3

അടുത്ത വരിയിലും ഇതു തുടരാൻ $(-7)-(-4)$ എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് അർഥം കൊടുക്കണം. അതിന് ഈ കണക്കിൽത്തന്നെ

$$7-(-4)=7+4$$

എന്ന അർഥം കൊടുത്തത് ഓർക്കുക. അതുപോലെ

$$(-7)-(-4)=-7+4$$

എന്നെടുക്കാം

ഇതിലെ $-7+4$ എന്നത് നേരത്തെ ചെയ്തതാണല്ലോ

$$-7+4=4-7=-3$$

അങ്ങനെ

$$(-7)-(-4)=-7+4=-3$$

എന്നു കിട്ടുകയും, പട്ടികയിലെ ഏഴാം വരിയും ശരിയാവുകയും ചെയ്യും.

അവസാന വരിയിൽ ഇതുപോലെ തന്നെ

$$(-4)-(-7)=-4+7=3$$

എന്ന് എടുക്കുന്നതോടെ എല്ലാം ശരിയാകും.

ആദ്യസ്ഥാനം x	എത്തേണ്ട സ്ഥാനം y	സ്ഥാനമാറ്റം $y-x$
4	7	$3=7-4$
7	4	$-3=4-7$
4	−7	$-11=-7-4$
−7	4	$11=4-(-7)$
−4	7	$11=7-(-4)$
7	−4	$-11=-4-7$
−4	−7	$-3=(-7)-(-4)$
−7	−4	$3=-4-(-7)$

ഇതു ശരിയാകാനായി, ചില പുതിയ കുറയ്ക്കലുകൾ നിർവചിച്ചല്ലോ.

$$4-(-7)=4+7=11$$

$$7-(-4)=7+4=11$$

എന്നും

$$(-7)-(-4)=-7+4=-3$$

$$(-4)-(-7)=-4+7=3$$

എന്നും അർഥം കൊടുത്തു.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ ന്യൂനം കുറയ്ക്കുന്നതിനെ, ന്യൂനമില്ലാതെ കൂട്ടലാക്കി. ബീജഗണിതത്തിൽ ഇത് ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

x ഏതു സംഖ്യയും, y ഏത് അധിസംഖ്യയും ആയാലും

$$x-(-y)=x+y$$

ഈ നിർവചനത്തിൽ $x=0, y=3$ എന്നെടുത്താലോ ?

$$0-(-3)=0+3=3$$

$0-3=-3$ ആണല്ലോ. ഇതുപോലെ, $0-(-3)$ നെയും $-(-3)$ എന്നു മാത്രം എഴുതിയാലോ?

അപ്പോൾ

$$-(-3)=0-(-3)=0+3=3$$

ഒരു അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം എന്നതിന്റെ അർഥം, അതേ സംഖ്യ തന്നെ എന്നൊരു പുതിയ നിർവചനമാണിത്.

x ഏതു അധിസംഖ്യയായാലും

$$-(-x)=0-(-x)=0+x=x$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, പാഠത്തിന്റെ തുടക്കത്തിലുള്ള സമവാക്യങ്ങളിൽ ആദ്യത്തേത് അല്പം കൂടി വിപുലമാക്കാം. ഇതാണ് ആ സമവാക്യം:

x, y എന്ന ഏതു അധിസംഖ്യകളിലും $x<y$ ആണെങ്കിൽ $x-y=-(y-x)$

ഇതിൽ $x>y$ ആയാലോ ?

ഉദാഹരണമായി, $x=10, y=3$ എന്നെടുത്തുനോക്കാം.

$$x-y=10-3=7$$

$$y-x=3-10=-7$$

$$-(y-x)=-(-7)=7$$

ഇതിലും $x-y=-(y-x)$ തന്നെയാണല്ലോ.

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, ഈ സമവാക്യത്തിൽ $x<y$ ആണെങ്കിൽ, $y-x$ അധിസംഖ്യയും $x-y$ അതിന്റെ ന്യൂനവുമാകും.

$x>y$ ആണെങ്കിൽ, $y-x$ ന്യൂനസംഖ്യയും, $x-y$ അതിന്റെ ന്യൂനവുമാകും.

ന്യൂനം എന്നാൽ

പൂജ്യത്തിനേക്കാൾ കുറവായ സംഖ്യകൾ ആവശ്യമായി വരുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിലൂടെയാണ് ന്യൂനസംഖ്യകൾ എന്ന ആശയം അവതരിപ്പിച്ചത്. പിന്നീട്, വിപരീത ദിശകളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഇവ ഉപയോഗിക്കാം എന്നു കണ്ടു. അതിനു സഹായകമായി, കൂട്ടലിനും കുറയ്ക്കലിനും ചില പുതിയ നിർവചനങ്ങളും ഉണ്ടാക്കി.

ഇതിന്റെ തുടർച്ചയായി ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം എന്ന നിർവചനത്തിൽ ന്യൂനമെടുക്കുക എന്നത് ഒരു പുതിയ ക്രിയയും കൂടി ആകുന്നു.

അധിസംഖ്യയുടെ ന്യൂനത്തിന്റെ ന്യൂനം ആ സംഖ്യതന്നെ എന്നു നിർവചിച്ചതുകൊണ്ട്, രണ്ടാമത്തെ സന്ദർഭത്തിലും സമവാക്യം ശരിയാകും.

അപ്പോൾ ഈ സമവാക്യത്തിലെ നിബന്ധന ഒഴിവാക്കി, ഇങ്ങനെ പരിഷ്കരിക്കാം:

> x, y ഏതു സംഖ്യകളായാലും
>
> $x - y = -(y - x)$

(1) x, y, z ഇവ പല അധിസംഖ്യകളായും ന്യൂനസംഖ്യകളായും എടുത്ത്, $x - (y - z)$ ഉം $(x - y) + z$ ഉം കണക്കാക്കുക. രണ്ടും ഒരേ സംഖ്യയാണോ ?

(2) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ കണക്കിലും, പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന തരത്തിലുള്ള രണ്ടു ജോടി x, y കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) x അധിസംഖ്യ, y ന്യൂനസംഖ്യ, $x - y = 1$

(ii) x ന്യൂനസംഖ്യ, y അധിസംഖ്യ, $x - y = -1$

(3)(i) a, b, c, d ഇവ അടുത്തടുത്തുള്ള നാലു എണ്ണൽ സംഖ്യകളോ, അല്ലെങ്കിൽ അവയുടെ ന്യൂനങ്ങളോ ആയി എടുത്ത്, $a - b - c + d$ കണക്കാക്കുക.

(ii) സംഖ്യകൾ ഏതായാലും ഇതു പൂജ്യമാകുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(iii) $a - b - c + d$ എന്നതിനു പകരം $a + b - c - d$ ആയാലോ ?

(iv) $a - b + c - d$ ആയാലോ ?

സമയവും വേഗവും

ഒരു വരയിലെ സ്ഥാനങ്ങളും സ്ഥാനമാറ്റവും വ്യത്യസ്ത ദിശകളിലായാലും അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധങ്ങൾ, ന്യൂനസംഖ്യകളും കൂടി ഉപയോഗിച്ച്, പൊതുവായ ബീജഗണിത സമവാക്യങ്ങളാക്കുന്നത് കണ്ടല്ലോ.

സ്ഥാനമാറ്റം ഉണ്ടാകണമെങ്കിൽ, ചലിക്കണം; ചലനത്തെ സംഖ്യകളിലൂടെ വിശദമാക്കണമെങ്കിൽ, സഞ്ചരിച്ച ദൂരം മാത്രമല്ല, സമയവും കണക്കിലെടുക്കണം.

5 സെക്കന്റുകൊണ്ട് 50 മീറ്റർ സഞ്ചരിച്ചു എന്നു പറഞ്ഞാൽ, വേഗത്തെക്കുറിച്ചും ഒരു ധാരണ ഉണ്ടാകും. ഇടയ്ക്ക് വേഗം കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യാതെ ഒരേ വേഗത്തിലാണ് സഞ്ചാരമെങ്കിൽ വേഗം ഒരു സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്റർ എന്നു പറയാം. ഇതേ വേഗത്തിൽ തുടർന്നാൽ 10 സെക്കന്റു കൊണ്ട് 100 മീറ്റർ സഞ്ചരിക്കാം എന്നും കണക്കുകൂട്ടാം (100 മീറ്റർ ഓട്ടത്തിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ സമയം, 9.58 സെക്കന്റ് ആണെന്നതും ഓർക്കാം).

ഒരു വരയിലൂടെ എങ്ങോട്ടും ഒരേ വേഗത്തിൽ ചലിക്കാവുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ വേഗവും സഞ്ചരിച്ച

സമയവും അറിഞ്ഞാൽ എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഒരു സെക്കന്റിൽ 10 മീറ്റർ (എഴുതുന്നത് 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്) എന്ന വേഗത്തിൽ ചലിക്കുന്ന ബിന്ദു, 4 സെക്കൻറ്റു കൊണ്ട്, $10 \times 4 = 40$ മീറ്റർ സഞ്ചരിച്ചു എന്നു കണക്കാക്കാം. പക്ഷേ ഏതു ദിശയിൽ എന്നറിയാതെ അവസാന സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കാൻ പറ്റില്ലല്ലോ.

നേരത്തെ ചെയ്തപോലെ, O എന്ന നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വലത്തോട്ടോ ഇടത്തോട്ടോ ഒരു വരയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദു സങ്കല്പിക്കാം. പതിവുപോലെ വലത്തോട്ടുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ അധിസംഖ്യകളായും, ഇടത്തോട്ടുള്ളവ ന്യൂനസംഖ്യകളായും, O യിൽ നിന്നുള്ള ദൂരമനുസരിച്ച് അടയാളപ്പെടുത്താം. സഞ്ചാരം തുടങ്ങുന്നത് O യിൽ നിന്നാണെന്നും സങ്കല്പിക്കാം. ദൂരമളക്കാൻ മീറ്ററും, വേഗമളക്കാൻ, ഒരു സെക്കന്റിൽ എത്ര സഞ്ചരിച്ചു എന്ന നിരക്കും (മീറ്റർ/സെക്കന്റ്), സമയമളക്കാൻ സെക്കന്റും എന്നു നിശ്ചയിക്കാം.

അപ്പോൾ O യിൽ നിന്ന് പുറപ്പെട്ട് 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ, വലത്തോട്ട് 3സെക്കന്റ് സഞ്ചരിച്ചാൽ $10 \times 3 = 30$ എന്ന സ്ഥാനത്ത് എത്തും. സഞ്ചാരം ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിലോ ?

$-(10 \times 3) = -30$ എന്ന സ്ഥാനത്തും.

അപ്പോൾ സ്ഥാനം കണക്കാക്കാൻ, സഞ്ചാരം വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ, വേഗത്തെ സമയം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി; ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ, ഗുണനഫലത്തെ ന്യൂനമാക്കുകയും വേണം. ബീജഗണിതത്തിൽ പറയാൻ, വേഗം v, സമയം t, സ്ഥാനം s എന്നെടുത്താൽ

സഞ്ചാരം വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ $s = vt$

സഞ്ചാരം ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ $s = -(vt)$

എന്നു പറയണം

വേഗക്കണക്ക്

ജമൈക്കയിലെ ഉസൈൻ ബോൾട്ട്, 2009 ൽ ബെർളിൻ നഗരത്തിൽ നടന്ന കായിക മേളയിൽ 9.58 സെക്കന്റ് കൊണ്ട് 100 മീറ്റർ ഓടിയതാണ്, ഇതുവരെ രേഖപ്പെടുത്തിയതിലെ ഏറ്റവും കൂടിയ വേഗം.

ഇതിൽ എപ്പോഴും ഒരേ വേഗത്തിലല്ല അദ്ദേഹം ഓടിയത്. ഓരോ 20 മീറ്ററും ഓടാനെടുത്ത സമയം രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്.

ദൂരം മീറ്റർ	സമയം സെക്കന്റ്
0 – 20	2.89
20 – 40	1.75
40 – 60	1.67
60 – 80	1.61
80 – 100	1.66

ഇവ ചേർത്ത് ഒറ്റ സമവാക്യമാകാൻ ഇടത്തോട്ടുള്ള സഞ്ചാരങ്ങളുടെ അളവ് ന്യൂനസംഖ്യകളാക്കിയാലോ ?

ഉദാഹരണമായി, സഞ്ചാരം 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ $v = 10$ എന്നും, ഇടത്തോട്ടാണെങ്കിൽ $v = -10$ എന്നും പറയാം.

അപ്പോൾ മറ്റൊരു പ്രശ്നം വരും: O യിൽനിന്നു തുടങ്ങി, 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിൽ ഇട ത്തോട്ട് 3 സെക്കന്റ് സഞ്ചരിച്ചാൽ എത്തുന്ന സ്ഥാനം ഗുണനഫലമായി പറയാൻ, $(-10) \times 3$ എന്ന തിന്റെ അർഥം പറയേണ്ടി വരും.

ഈ പ്രശ്നം ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം.

അധിസംഖ്യകളിൽ ഗുണനമെന്നത് മടങ്ങ് കണക്കാക്കലാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി

$$10 \times 3 = 10 \text{ ന്റെ } 3 \text{ മടങ്ങ്} = 10 + 10 + 10 = 30$$

ഇതുപോലെ $(-10) \times 3$ നെയും മടങ്ങായി എടുത്താലോ ?

$$(-10) \times 3 = -10 \text{ ന്റെ } 3 \text{ മടങ്ങ്} = (-10) + (-10) + (-10) = -30$$

ന്യൂനസംഖ്യയെ അധിസംഖ്യകൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്ന ഈ രീതി, എണ്ണൽസംഖ്യകൾക്കു മാത്രമല്ല, എല്ലാ സംഖ്യകൾക്കും ബാധകമായ നിർവചനമാക്കാം.

അപ്പോൾ സഞ്ചാരം ഏതു ദിശയിലായാലും, വേഗം v, സമയം t, എത്തുന്ന സ്ഥാനം s എന്നെടുത്ത്, ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $s = vt$ എന്നു പറയാം.

ഇനി ഈ കണക്കിന്റെ സന്ദർഭം അല്പം മാറ്റാം. വരയിലൂടെ 10 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന ഒരേ വേഗ ത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിനെ O യിൽ എത്തുന്നതു മുതലാണ് നോക്കിത്തുടങ്ങുന്നതെന്നു കരുതുക.

സഞ്ചാരം ഇടത്തുനിന്ന് വലത്തോട്ടാണെങ്കിൽ, നോക്കിത്തുടങ്ങി 2 സെക്കന്റ് കഴിയുമ്പോൾ സ്ഥാനം 20 ലാണ്.

2 സെക്കന്റ് മുമ്പോ ?

O യിൽ എത്താൻ ഇനിയും 2 സെക്കന്റ് വേണമല്ലോ. അപ്പോൾ O യുടെ ഇടത്ത് 20 മീറ്റർ അകലെ. അതായത് -20 എന്ന സ്ഥാനത്ത്.

വലത്തുനിന്ന് ഇടത്തേക്കാണ് സഞ്ചാരമെങ്കിലോ ?

സഞ്ചാരത്തിന്റെ ദിശയും, സമയം മുമ്പോ പിമ്പോ എന്നതും മാറ്റി സ്ഥാനങ്ങൾ കണക്കാക്കി പട്ടിക യാക്കാം. ചിത്രം വരച്ചോ, സങ്കല്പിച്ചോ സ്ഥാനം എഴുതാനുള്ള സൗകര്യത്തിനായി, വേഗങ്ങളെയും സ്ഥാനങ്ങളെയും, വലത് ഇടത് എന്നുതന്നെ ആദ്യം എഴുതാം.

വേഗം	സമയം	എത്തുന്ന സ്ഥാനം
10 വലത്തോട്ട്	2 സെക്കന്റിനു ശേഷം	20 വലത്ത്
10 ഇടത്തോട്ട്	2 സെക്കന്റിനു ശേഷം	20 ഇടത്ത്
10 വലത്തോട്ട്	2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ്	20 ഇടത്ത്
10 ഇടത്തോട്ട്	2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ്	20 വലത്ത്

ഇനി സ്ഥാനവും വേഗവും, അധിസംഖ്യയായും ന്യൂനസംഖ്യയായും എഴുതാം:

വേഗം	സമയം	എത്തുന്ന സ്ഥാനം
10	2 സെക്കന്റിനു ശേഷം	20
−10	2 സെക്കന്റിനു ശേഷം	−20
10	2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ്	−20
−10	2 സെക്കന്റിനു മുമ്പ്	20

സമയത്തിന്റെ കാര്യത്തിലും ശേഷം, മുമ്പ് എന്നീ വിശേഷണങ്ങൾ ഒഴിവാക്കാൻ, നോക്കിയതിനു ശേഷമുള്ള സമയത്തെ അധിസംഖ്യയായും, മുമ്പുള്ള സമയത്തെ ന്യൂനസംഖ്യയായും എഴുതിയാലോ ?

വേഗം	സമയം	എത്തുന്ന സ്ഥാനം
10	2	20
−10	2	−20
10	−2	−20
−10	−2	20

ഇതിലെ ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമാണ് അവസാനത്തെ സംഖ്യ.

രണ്ടാമത്തെ വരിയിലും, ഇപ്പോൾ നിർവചിച്ചതനുസരിച്ച്, $(-10) \times 2 = -20$ തന്നെ.

മൂന്നാമത്തെ വരിയിലോ ?

$10 \times (-2)$ എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് എന്താണ് അർഥം ?

ഇങ്ങനെ ആലോചിക്കാം. അധിസംഖ്യകളിലെല്ലാം ഗുണിക്കുന്നതിന്റെ ക്രമം മാറ്റിയാലും ഗുണനഫലം മാറില്ലല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$5 \times 3 = 3 \times 5 \qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \qquad \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{2}$$

അപ്പോൾ, ഇവിടെയും

$10 \times (-2) = (-2) \times 10$ എന്നെടുക്കാം.

ഇതിൽ

$$(-2) \times 10 = -20$$

എന്നു കണ്ടു കഴിഞ്ഞല്ലോ. അങ്ങനെ,

$$10 \times (-2) = (-2) \times 10 = -20$$

എന്നു നിർവചിച്ചാൽ. പട്ടികയിലെ മൂന്നാം വരിയിലും, സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ആദ്യത്തെ രണ്ടു വരികളിലേതുതന്നെ ആകും.

അവസാന വരിയിലോ ?

$(-10) \times (-2)$ എന്നതിന് എന്ത് അർഥം കൊടുക്കും ?

ഇത് 20 എന്നെടുത്താലേ, പട്ടികയിലെ എല്ലാ വരികളിലും ഒരേ ബന്ധം ആവുകയുള്ളൂ.

ഇങ്ങനെയെടുക്കാനുള്ള കാരണം, കണക്കിന്റെ മാത്രം രീതിയിൽ പറയാം.

രണ്ടു അധിസംഖ്യകളുടെ തുകയെ ഒരു അധിസംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ, ഓരോന്നിനെയും ഗുണിച്ചു കൂട്ടിയാൽ മതിയല്ലോ. ഉദാഹരണമായി,

$$(15 + 10) \times 2 = (15 \times 2) + (10 \times 2)$$

ബീജഗണിതത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ x, y, z ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$(x + y)z = xz + yz$$

ഈ തത്വം ന്യൂനസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാകാൻ എന്തു ചെയ്യണമെന്നു നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $x = 15, y = -10, z = -2$ എന്നെടുത്ത്, $(x + y)z$ ഉം $xz + yz$ ഉം വെവ്വേറെ ചെയ്തുനോക്കാം.

$$(x + y)z = (15 + (-10)) \times (-2) = 5 \times (-2) = -10$$

$$xz + yz = (15 \times (-2)) + ((-10) \times (-2)) = -30 + ((-10) \times (-2))$$

രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലവും, ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലവും തുല്യമാകാൻ, $(-10) \times (-2)$ എന്തു സംഖ്യ ആകണം ?

ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലം -10; രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലം, -30 നോട് ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടിയത്. -30 നെ -10 ആക്കാൻ എന്തു കൂട്ടണം ?

അപ്പോൾ $(x + y)z = xz + yz$ എന്ന സമവാക്യം $x = 15, y = -10, z = -2$ എന്നീ സംഖ്യകൾക്ക് ശരിയാകണമെങ്കിൽ, $(-10) \times (-2) = 20$ എന്നെടുക്കണം.

ഇങ്ങനെയെടുത്താൽ പട്ടികയിലെ എല്ലാ വരിയിലും, ആദ്യത്തെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലമായി അവസാനസംഖ്യ കിട്ടുകയും ചെയ്യും.

വേഗം v	സമയം t	എത്തുന്ന സ്ഥാനം vt
10	2	$20 = 10 \times 2$
−10	2	$-20 = (-10) \times 2$
10	−2	$-20 = 10 \times (-2)$
−10	−2	$20 = (-10) \times (-2)$

അതായത്, വേഗം v, സമയം t സ്ഥാനം s ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം എല്ലാ സന്ദർഭങ്ങളിലും

$$s = vt$$

എന്ന ഒറ്റ സമവാക്യത്തിൽ പറയാം.

ഇതിനായി ഉപയോഗിച്ച പുതിയ നിർവചനങ്ങൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

> x, y ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും
>
> $$(-x)y = x(-y) = -(xy)$$
>
> $$(-x)(-y) = xy$$

(1) x, y, z ആയി പല അധിസംഖ്യകളും ന്യൂനസംഖ്യകളും എടുത്ത്, $(x+y)z$ ഉം $xz + yz$ ഉം കണക്കാക്കുക. എല്ലാറ്റിലും $(x + y)z = xz + yz$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്നുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(2) $(x+y)(u+v) = xu + xv + yu + yv$ എന്ന സമവാക്യം, x, y, u, v ഇവയ്ക്കു പകരം $-x$, $-y$, $-u$, $-v$ എടുത്താലും ശരിയാകുമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ആന്ദോളനം

$(-1) \times (-1)$ എന്താണ് ? ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനനിയമമനുസരിച്ച് ഇത് 1 ആണല്ലോ. $(-1) \times (-1) \times (-1)$ ആയാലോ ?

ആദ്യത്തെ രണ്ട് -1 ഗുണിക്കുമ്പോൾ 1; വീണ്ടും ഒരു -1 കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ -1. ഇക്കാര്യങ്ങൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$(-1)^2 = 1$$

$$(-1)^3 = -1$$

ഇങ്ങനെ കുറേക്കൂടി കൃതികൾ കണക്കാക്കി നോക്കൂ. പൊതുവേ എന്തു പറയാം ?

കൃത്യങ്കം ഒറ്റസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ, കൃതി, -1; ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ 1.

ഇതിന്റെ പൊതുവായ ബിജഗണിതരൂപം

n ഏതു എണ്ണൽസംഖ്യ ആയാലും

$$(-1)^{2n-1} = -1$$

$$(-1)^{2n} = 1$$

n ആയി പല എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്ത്, $1 + (-1)^n$ കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

$\frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$ ആയാലോ ?

(3) ചുവടെയുള്ള സമവാക്യങ്ങളിലെല്ലാം x ആയി പറഞ്ഞിട്ടുള്ള സംഖ്യകൾ എടുക്കുമ്പോൾ, y ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $y = x^2$, $x = -1$ (ii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -1$ (iii) $y = x^2 + 3x + 2, x = -2$

(iv) $y = (x + 1)(x + 2), x = -1$ (v) $y = (x + 1)(x + 2), x = -2$

(4) $y = x^2 + 4x + 4$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ x ആയി പല അധിസംഖ്യകളും, ന്യൂനസംഖ്യകളും എടുത്ത് y കണക്കാക്കുക. എന്തുകൊണ്ടാണ് x എന്തായാലും y അധിസംഖ്യയോ പൂജ്യമോ തന്നെ ആകുന്നത് ?

(5) എണ്ണൽസംഖ്യകൾ, അവയുടെ ന്യൂനങ്ങൾ, പൂജ്യം ഇവയെ എല്ലാം പൊതുവായി പൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ എന്നു പറയാം.

(i) $x^2 + y^2 = 25$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന എത്ര ജോടി പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം ?

(ii) $x^2 - y^2 = 25$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയാകുന്ന എത്ര ജോടി പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കാം ?

(6) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ ആണല്ലോ.

$(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)$ എത്രയാണ് ?

(7) $(1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5) + [(-1) \times (-2) \times (-3) \times (-4) \times (-5)]$ എത്രയാണ് ?

ന്യൂനഹരണം

അധിസംഖ്യകളിലെല്ലാം ഹരണത്തിന് അർഥം കൊടുക്കുന്നത്, ഗുണനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, $6 \div 2$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥം, 2 നെ ഗുണിച്ച് 6 ആക്കുന്ന സംഖ്യ.

$2 \times 3 = 6$ ആയതിനാൽ

$$6 \div 2 = 3$$

എന്നെഴുതുന്നു.

3×2 ഉം 6 തന്നെ ആയതിനാൽ

$$6 \div 3 = 2$$

എന്നും കാണാം.

ഇതനുസരിച്ച് $(-6) \div 2$ എന്താണ്?

$2 \times (-3) = -6$ ആയതിനാൽ

$$-6 \div 2 = (-3)$$

എന്നെഴുതാം.

മാത്രമല്ല, $(-3) \times 2 = -6$ ആയതിനാൽ

$$-6 \div (-3) = 2$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതുപോലെ $(-3) \times (-4) = 12$ ആയതിനാൽ

$$12 \div (-3) = -4$$

എന്നും

$$12 \div (-4) = -3$$

എന്നും എഴുതാം.

ഇതേ രീതിയിൽ മറ്റു ഹരണഫലങ്ങളും കണക്കാക്കാം

ബീജഗണിതത്തിൽ പൊതുവേ $x \div y$ എന്നതിനെ $\frac{x}{y}$ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്. അപ്പോൾ ന്യൂനസംഖ്യകളുടെ ഹരണം പൊതുവേ ഇങ്ങനെ പറയാം.

x, y ഏത് അധിസംഖ്യകളായാലും

$$\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

സമവാക്യസമന്വയം

നിലത്തുനിന്ന് മുകളിലേക്കെറിയുന്ന ഒരു വസ്തു, കുറേ മുകളിലേക്കുയർന്നതിനുശേഷം താഴോട്ട് വീഴും. ഇതിനൊരു കണക്കുണ്ട്.

നേരെ മുകളിലേക്ക് എറിയുകയാണെങ്കിൽ, ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കുറയും; അങ്ങനെ കുറഞ്ഞു കുറഞ്ഞ്, വേഗമേ ഇല്ലാതാകുമ്പോൾ താഴോട്ടു വീഴാൻ തുടങ്ങും. ഈ വീഴ്ചയിൽ ഓരോ സെക്കന്റിലും 9.8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വേഗം കൂടിക്കൊണ്ടിരിക്കും. 49 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് എന്ന വേഗത്തിലാണ് മേലോട്ടെറിഞ്ഞതെന്നു കരുതുക. എറിഞ്ഞ് 5 സെക്കന്റാകുമ്പോൾ വേഗം $49 - (5 \times 9.8) = 0$. അപ്പോൾ 5 സെക്കന്റ് കഴിഞ്ഞാൽ യാത്ര കൂടുന്ന വേഗത്തോടെ താഴോട്ടാണ്. നേരത്തെ പറഞ്ഞതുപോലെ, 7 സെക്കന്റ് ആകുമ്പോൾ, വേഗം $0 + (2 \times 9.8) = 19.6$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്

അപ്പോൾ ഈ യാത്രയുടെ ബീജഗണിതം പറയാൻ രണ്ടു സമവാക്യം വേണ്ടി വരും:

$$v = 49 - 9.8t, \quad t < 5 \text{ ആണെങ്കിൽ}$$

$$v = 9.8t - 49, \quad t > 5 \text{ ആണെങ്കിൽ}$$

മേലോട്ടുള്ള വേഗം അധിസംഖ്യയായും, താഴോട്ടുള്ള വേഗം ന്യൂനസംഖ്യയായും എടുത്താൽ ഒരു സമവാക്യം മതിയാകും

$$v = 49 - 9.8t$$

(1) $y = \frac{1}{x}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, x ആയി 2, -2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ എന്നീ സംഖ്യകളെടുത്താൽ y ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(2) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, $x = -2$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും, $x = -\frac{1}{2}$ എന്നെടുക്കുമ്പോഴും y ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(3) $z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, x, y ആയി ചുവടെപ്പറയുന്ന സംഖ്യകളെടുക്കുമ്പോൾ z ആയി കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ കണക്കാക്കുക.

(i) $x = 10, y = -5$ (ii) $x = -10, y = 5$ (iii) $x = -10, y = -5$