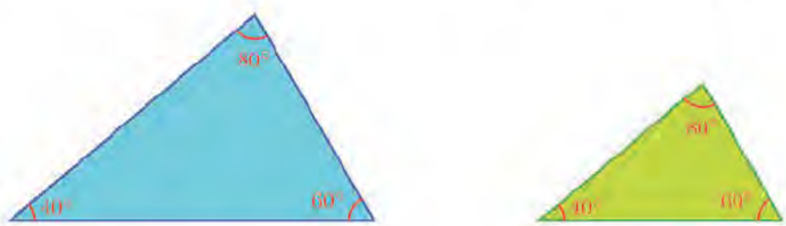
6 സദൃശത്രികോണങ്ങൾ

കോണുകളും വശങ്ങളും

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ, അവയുടെ കോണുകളും തുല്യമാണെന്ന് അറിയാമല്ലോ; മറിച്ച്, കോണുകൾ തുല്യമായാൽ വശങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല എന്നും അറിയാം (എട്ടാംക്ലാസിലെ തുല്യത്രികോണങ്ങൾ എന്ന പാഠം). അപ്പോൾ ഒരു ചോദ്യമുണ്ട്. ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും ബന്ധമുണ്ടോ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത വലുപ്പത്തിൽ കട്ടിക്കടലാസിൽ വരച്ച്, വെട്ടിയെടുക്കുക. ഉദാഹരണമായി ഇങ്ങനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളാകാം:

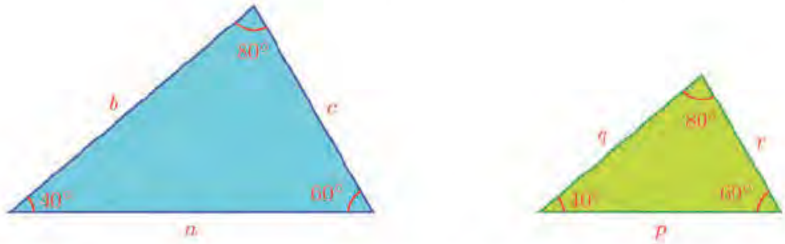


വശങ്ങളുടെ നീളം ഒത്തുനോക്കാൻ, ചെറിയ ത്രികോണമെടുത്ത് വലുതിന്റെ ഉള്ളിൽ വയ്ക്കുക. മേൽ മൂലകൾ ചേർന്നിരിക്കട്ടെ. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ മൂലയിലെ വശങ്ങളും ചേർന്നിരിക്കും.

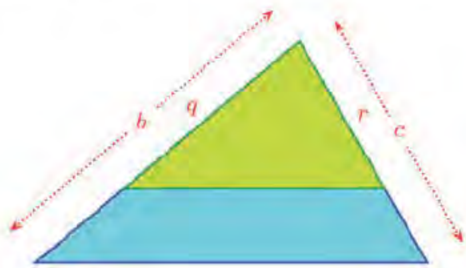
ഇതിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും താഴത്തെ വശങ്ങൾ, ഇടത്തെ വരയുമായി ഒരേ ചരിവിലാണല്ലോ. അപ്പോൾ ഈ വശങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്.

അതിനാൽ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളെ ഒരേ ഭാഗങ്ങളായിട്ടാണ് മുറിക്കുന്നത് (സമാന്തരവരകൾ എന്ന പാഠം).

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിപ്പറയാൻ, ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം:



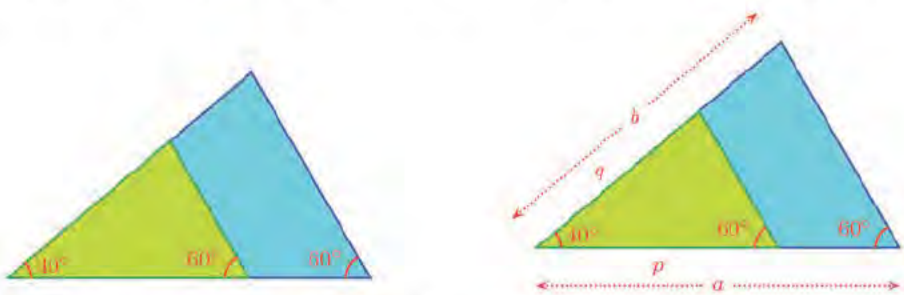
ചേർത്തുവയ്ക്കുമ്പോൾ അളവുകൾ ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം:



അപ്പോൾ നേരത്തെ പറഞ്ഞ (ഒരേ ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത് എന്ന) കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$\frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

ത്രികോണങ്ങളുടെ മേൽമൂലകൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുന്നതിനു പകരം, ഇടതു മൂലകൾ ചേർത്തുവച്ചാലോ?



ആദ്യം ചെയ്ത രീതിയിൽത്തന്നെ, ഇപ്പോൾ ത്രികോണങ്ങളുടെ വലതുവശങ്ങൾ സമാന്തരമാണെന്നും, അതിനാൽ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കീഴ്-ഇടതുവശങ്ങളെ ഒരേ ഭാഗങ്ങളായാണ് മുറിക്കുന്നത് എന്നും കാണാമല്ലോ. അതായത്

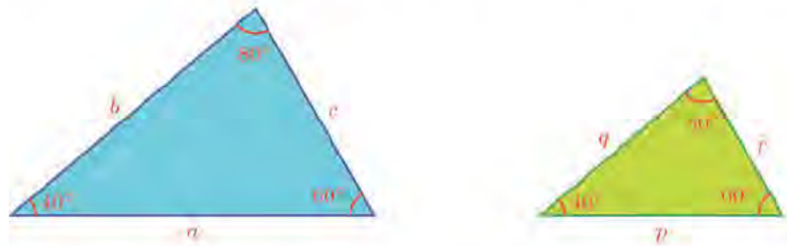
$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b}$$

ഇതും, നേരത്തെ കണ്ട സമവാക്യവും ചേർത്തു വായിച്ചാൽ

$$\frac{p}{a} = \frac{q}{b} = \frac{r}{c}$$

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ അർഥം എന്താണ്?

ആദ്യം, ഇതിലെ അക്ഷരങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് എന്തിനെയാണ് എന്നു നോക്കാം:



- 80° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ a, p
- 60° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ b, q
- 40° കോണുകളുടെ എതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ c, r

ഇനി സമവാക്യത്തിലെ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ അർഥം നോക്കാം:

- $\frac{p}{a}$ എന്ന സംഖ്യ, p എന്ന നീളം a എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്നു.
- $\frac{q}{b}$ എന്ന സംഖ്യ, q എന്ന നീളം b എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്നു.
- $\frac{r}{c}$ എന്ന സംഖ്യ, r എന്ന നീളം c എന്ന നീളത്തിന്റെ എത്ര ഭാഗമാണെന്നു കാണിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ

$$\frac{p}{a}=\frac{q}{b}=\frac{r}{c}$$

എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ അർഥം എന്താണ്?

ഈ ഭാഗങ്ങളെല്ലാം ഒന്നുതന്നെയാണ്.

അതായത്, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ $(p, a), (q, b), (r, c)$ എന്നിങ്ങനെ ജോടികളാക്കിയാൽ, ചെറിയ നീളങ്ങളായ p, q, r എന്നിവ, വലിയ നീളങ്ങളായ a, b, c ഇവയുടെ ഒരേ ഭാഗമാണ്.

വലിയ നീളങ്ങളെല്ലാം ചെറിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ് എന്നും പറയാം.

കോണുകൾ 80°, 60°, 40° എന്നതിനു പകരം, വേറെ എന്തായാലും ഇപ്പറഞ്ഞതെല്ലാം ശരിയാകുമല്ലോ.

അപ്പോൾ പൊതുവായി ഇങ്ങനെ പറയാം:

ഒരേ കോണുകളുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങൾ ജോടികളായെടുത്താൽ, ചെറിയ നീളങ്ങളെല്ലാം വലിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ ഭാഗമാണ് (അഥവാ, വലിയ നീളങ്ങളെല്ലാം ചെറിയ നീളങ്ങളുടെ ഒരേ മടങ്ങാണ്).

ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഏറ്റവും ചെറിയ കോണിന്റെ എതിർവശം, ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ വശവും, ഏറ്റവും വലിയ കോണിന്റെ എതിർവശം, ഏറ്റവും നീളം കൂടിയ വശവും ആണല്ലോ. അതായത്, കോണുകളുടെ വലുപ്പക്രമത്തിലാണ് അവയുടെ എതിർവശങ്ങളുടെ നീളവും.

ജിയോജിബ്രയിൽ ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും അടയാളപ്പെടുത്തുക. Min = 0 ആയി ഒരു സ്ലൈഡർ d ഉണ്ടാക്കുക. Segment with Given Length ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് നീളം AB യുടെ d മടങ്ങോ ഭാഗമോ വരത്തക്കവിധം ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇതിനായി വരയുടെ നീളം d*AB എന്ന് കൊടുത്താൽ മതി. ഇനി $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$ ആകത്തക്കവിധം ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കണം. ഇതിനായി Angle with Given Size ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് E, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ കോണളവായി α ($\angle A$ യുടെ അളവ്) എന്ന് നൽകുക. അതേപോലെ D, E എന്നിവയിൽ ക്രമമായി ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ β എന്ന് clockwise ആയി നൽകുക. DE', ED' എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടേയും വശങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണോ ? ത്രികോണം ABC യുടെ അളവുകളും സ്ലൈഡറും മാറ്റി നോക്കൂ.

ഇതനുസരിച്ച് ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കി പ്പറയാം:

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ വലുപ്പക്രമത്തിൽ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

ഇത് മറ്റൊരു രീതിയിലും പറയാം. രണ്ട് അളവുകളിൽ ഒന്നു മറ്റൊന്നിന്റെ എത്ര മടങ്ങ് (അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗം) എന്നതിനെ മാറ്റത്തിന്റെ തോത് (scale factor) എന്നു പറയാറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും 4 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയും എടുത്താൽ, വലിയ നീളം ചെറിയ നീളത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങാണ്; മറിച്ച്, ചെറിയ നീളം വലിയ നീളത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്. ഇവിടെ, ചെറിയ നീളത്തിൽ നിന്ന് വലിയ നീളത്തിലേക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $1\frac{1}{2}$ എന്നും, വലുതിൽ നിന്ന് ചെറുതിലേയ്ക്കുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ തോത് $\frac{2}{3}$ എന്നും പറയാം.

വശങ്ങളുടെ നീളം a, b, c ആയ ത്രികോണത്തിനും, വശങ്ങളുടെ നീളം p, q, r ആയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ p, q, r ഇവ a, b, c ഇവയുടെ ഒരേ മടങ്ങോ, ഭാഗമോ ആണെന്നുകണ്ടല്ലോ. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ അളവുകൾ രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ അളവുകളാകുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്. ഈ മാറ്റത്തിന്റെ തോത് k എന്നെടുത്താൽ, ഈ ബന്ധം ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

$$a = kp, b = kq, c = kr$$

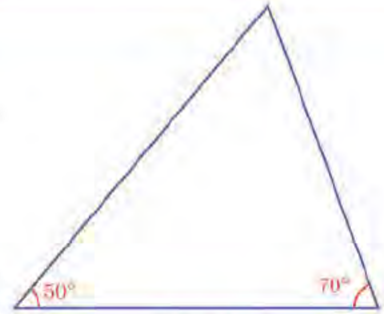
അപ്പോൾ ത്രികോണത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുതത്വം ഇങ്ങനെയും പറയാം:

ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളിൽ, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ നീളം മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാണ്.

ഇനി ഈ കണക്ക് നോക്കൂ:

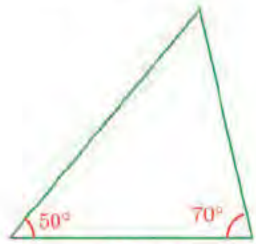
ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കി ചെറിയ ത്രികോണം വരയ്ക്കണം.

താഴത്തെ വശം 4.5 സെന്റിമീറ്ററാക്കിയാൽ മതി. മറ്റു വശങ്ങളോ?



വലിയ ത്രികോണം വരച്ച്, മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങൾ അളന്ന് $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കി വരയ്ക്കണോ ?

4.5 സെന്റിമീറ്റർ വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഇതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽപ്പോരേ ?



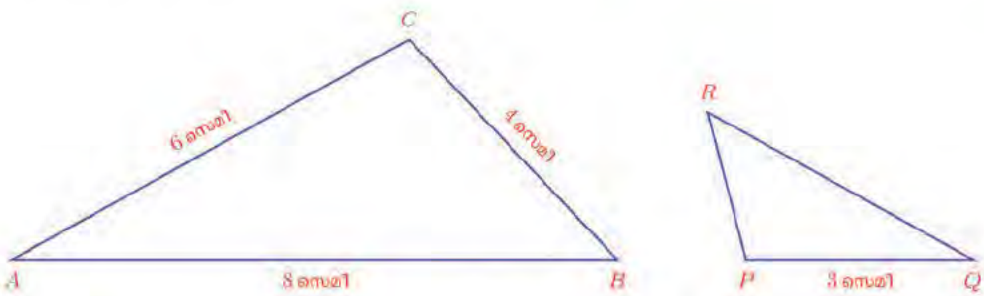
കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച് മറ്റു വശങ്ങളും $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാകുമല്ലോ:

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം:

ത്രികോണവിശേഷം

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വശങ്ങൾ ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്. ഇത് മറ്റു ബഹുഭുജങ്ങൾക്കൊന്നും ഇല്ലാത്ത പ്രത്യേകതയാണ്. ഉദാഹരണമായി, ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:

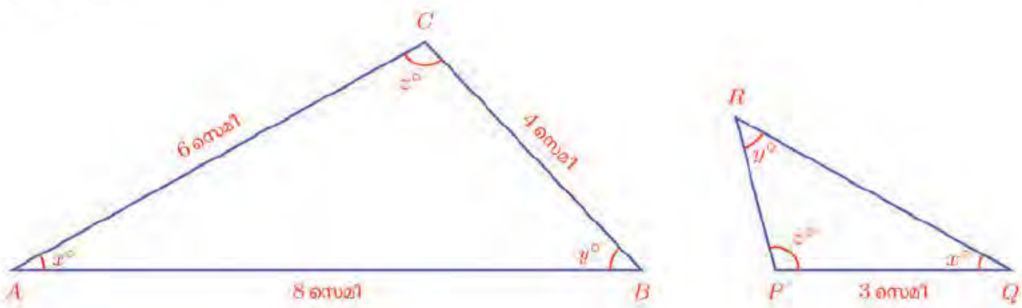
ചതുരത്തിലും സമചതുരത്തിലും കോണുകളെല്ലാം മട്ടമാണ്. രണ്ടിന്റെയും ഇടതു വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ് (അംശബന്ധം 1 : 1). വലതുവശങ്ങളും ഇതുപോലെ തന്നെ. പക്ഷെ ചതുരത്തിന്റെ മേൽവശത്തിനും സമചതുരത്തിന്റെ മേൽവശത്തിനും ഒരേ നീളമല്ലല്ലോ. കീഴ്‌വശങ്ങളുടെ നീളവും ഒന്നല്ല.



$$\angle P = \angle C \qquad \angle Q = \angle A \qquad \angle R = \angle B$$

PQR എന്ന ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

ആദ്യം കോണുകളുടെ അളവുകൾ $x°$, $y°$, $z°$ എന്നെടുത്ത്, ചിത്രത്തിൽ തുല്യമായ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്താം:



ഇനി, തുല്യമായ കോണുകൾക്കെതിരെയുള്ള വശങ്ങളുടെ ജോടികൾ എഴുതാം:

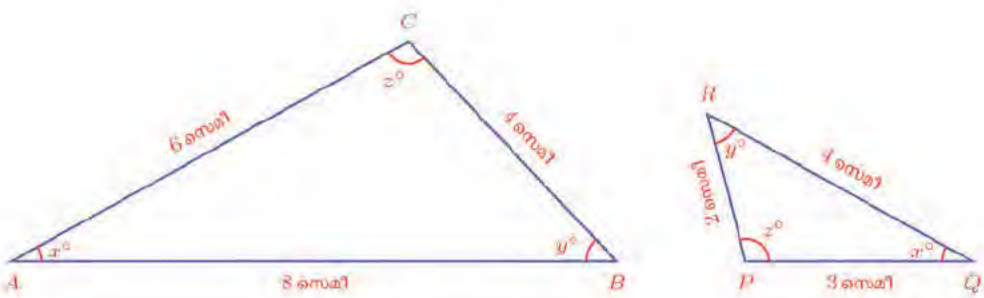
x	BC	PR
y	AC	PQ
z	AB	QR

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടെയും, ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെയും നീളം അറിയാമല്ലോ:

x	$BC = 4$	PR
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	QR

ഇതിൽ y° കോണിന്റെ എതിർവശങ്ങളിൽ, വലുതിന്റെ പകുതിയാണ് ചെറുത്. അപ്പോൾ മറ്റു കോണുകളുടെയും എതിർവശങ്ങളും ഇങ്ങനെതന്നെ ആകണം:

x	$BC = 4$	$PR = 2$
y	$AC = 6$	$PQ = 3$
z	$AB = 8$	$QR = 4$



ചിത്രത്തിൽനിന്ന് ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ വലുപ്പച്ചെറുപ്പം തിരിച്ചറിയാൻ കഴിഞ്ഞാൽ, കോണുകളെഴുതാതെയും വശങ്ങൾ കണക്കാക്കാം:

	ചെറുത്	ഇടത്തരം	വലുത്
ΔABC	$BC = 4$	$AC = 6$	$AB = 8$
ΔPQR	PR	$PQ = 3$	QR

ഇതിൽനിന്ന് ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ പകുതിയാണെന്നു കാണാം; തുടർന്ന് മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളവും കണക്കാക്കാം.

(1) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശം 8 സെ.മീ. ഉം അതിലെ രണ്ട് കോണുകൾ $60°$ യും $70°$ യും ആണ്. കോണുകൾ മാറാതെ വശങ്ങൾ ഇതിന്റെ ഒന്നരമടങ്ങായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(2) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽനിന്ന് കർണ്ണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം, കർണ്ണത്തിനെ 2 സെന്റിമീറ്ററും, 3 സെന്റിമീറ്ററും നീളമുള്ള ഭാഗങ്ങളാക്കുന്നു.

(i) ലംബം മുറിച്ചുണ്ടാകുന്ന രണ്ടു ചെറിയ മട്ടത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(ii) ലംബത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നെടുത്താൽ $\frac{h}{2} = \frac{3}{h}$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

(iii) വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ ലംബവശങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(iv) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മട്ടമൂലയിൽ നിന്നു കർണ്ണത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബത്തിന്റെ നീളം h എന്നും, അത് കർണ്ണത്തെ മുറിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളുടെ നീളം a, b എന്നുമെടുത്താൽ $h^2 = ab$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

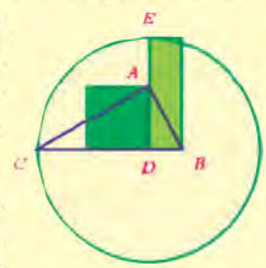
(3) വിലങ്ങനെയുള്ള ഒരു വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തും ഒരേ വലുപ്പമുള്ള കോണുകൾ മുകളിലും താഴെയുമായി വരച്ച്, ചരിഞ്ഞ വരകളിലെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുന്നു.

(i) വിലങ്ങനെയുള്ള (നീല) വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും, ചരിഞ്ഞ (ചുവന്ന) വരയുടെ ഭാഗങ്ങളും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

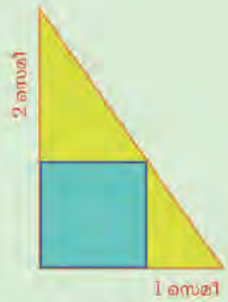
(ii) വിലങ്ങനെയുള്ള വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുമുള്ള ചരിഞ്ഞ (പച്ച) വരകൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും ഇതുതന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(iii) ഇതുപയോഗിച്ച്, 6 സെന്റിമീറ്റർ നീളമുള്ള വരയെ 3 : 4 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ എങ്ങനെ ഭാഗിക്കും ?

ചിത്രത്തിലേതുപോലെ ABC എന്ന മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക. മട്ടമൂലയിൽ നിന്നും കർണ്ണത്തിലേക്ക് ഒരു ലംബം വരച്ച്, കർണ്ണവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. D കേന്ദ്രമായി, C യിൽ ക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ച്, വൃത്തവും ലംബവും കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. AD ഒരു വശമായിവരുന്ന സമചതുരവും, BD, DE ഇവ വശങ്ങളായി വരുന്ന ചതുരവും നിർമ്മിക്കുക. സമചതുരത്തിന്റെയും ചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഇവ തുല്യമല്ലേ ? മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ മാറ്റിനോക്കൂ.



(4) ചുവടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിലെ മട്ടമൂലയും, മൂന്നു വശങ്ങളിലെയും ഓരോ ബിന്ദുക്കളും മൂലകളായി ഒരു സമചതുരം വരച്ചിരിക്കുന്നു.



(i) സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

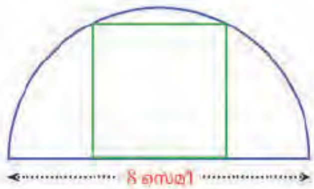
(ii) വശങ്ങളുടെ നീളം 3, 4, 5 സെന്റിമീറ്ററായ മട്ടത്രികോണത്തിൽ ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്ര സെന്റിമീറ്ററാണ് ?

(5) ചിത്രത്തിലെ വലിയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(6) 3 മീറ്ററും 2 മീറ്ററും ഉയരമുള്ള രണ്ടു കമ്പുകൾ കുത്തനെ നിലത്തു നാട്ടി, ഒരോ കമ്പിന്റെയും മുകളറ്റത്തുനിന്ന് മറ്റെ കമ്പിന്റെ ചുവട്ടിലേക്ക് കയർ വലിച്ചു കെട്ടിയിരിക്കുന്നു:

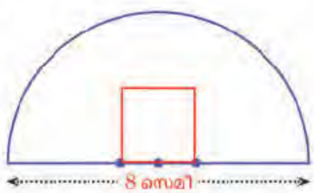
അർധവൃത്തവും സമചതുരവും

ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

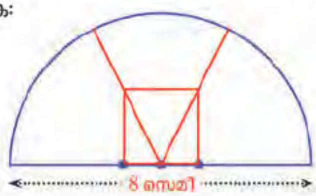


അർധവൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ഇങ്ങനെ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ ?

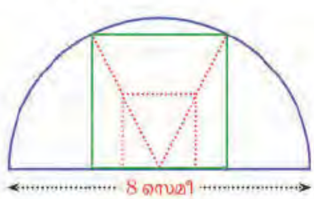
ആദ്യം അർധവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തിൽ, കേന്ദ്രത്തിനു ഇരുവശത്തും ഒരേ അകലത്തിൽ രണ്ടു കുത്തുകളിടുക, വ്യാസത്തിന്റെ ഈ ഭാഗത്തിൽ ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക:



ഈ സമചതുരത്തിന്റെ മൂലകൾ, കേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ നീട്ടി അർധവൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക:



വരകൾ വൃത്തത്തെ മുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുക; ഈ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്ന് വ്യാസത്തിലേക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.



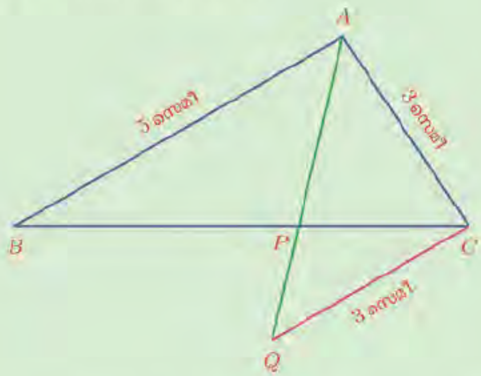
ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്നത് സമചതുരം തന്നെയാണെന്ന് തെളിയിക്കാമോ ?

(i) കയറുകൾ പരസ്പരം മുറിച്ചുകടക്കുന്നത്, നിലത്തുനിന്ന് എത്ര ഉയരത്തിലാണ്?

(ii) കമ്പുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്രയായാലും ഈ ഉയരം മാറുന്നില്ല എന്നു തെളിയിക്കുക.

(iii) കമ്പുകളുടെ നീളം a, b എന്നും, കയറുകൾ മുറിച്ചുകടക്കുന്ന സ്ഥാനത്തിന്റെ ഉയരം h എന്നുമെടുത്ത്, a, b, h ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

(7) ചിത്രത്തിൽ ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ $\angle A$ യുടെ സമഭാജിയാണ് AP:



വിലങ്ങനെ ഒരു വര വരച്ച് അതിൽ C, D എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി ആദ്യത്തെ വരയ്ക്ക് ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. C യിലൂടെയുള്ള ലംബത്തിൽ E എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും D യിലൂടെയുള്ള ലംബത്തിൽ F എന്ന ബിന്ദുവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ED, FC എന്നീ വരകൾ വരച്ച് അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു G അടയാളപ്പെടുത്തുക. C, D ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം മാറ്റിനോക്കൂ. G ൽ Right Click ചെയ്ത് Trace on നൽകുക. C, D ഇവ തമ്മിലുള്ള അകലം മാറുന്നതിനനുസരിച്ച് G സഞ്ചരിക്കുന്ന പാത ഏതാണ്?

ത്രികോണം ABC വരച്ച് ∠C യുടെ സമഭാജി വരയ്ക്കുക. ഈ വര AB യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. AC, BC എന്നീ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും AD, BD എന്നീ നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധവും താരതമ്യം ചെയ്യുക. Input Box ൽ AC/BC എന്ന് നൽകിയാൽ $\frac{AC}{BC}$ ലഭിക്കും. ഇതുപോലെ $\frac{AD}{BD}$ കണ്ടുപിടിക്കാം.

(i) ABP എന്ന ത്രികോണത്തിനും, CPQ എന്ന ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) $\frac{BP}{PC}$ കണക്കാക്കുക.

(iii) ഏതു ത്രികോണത്തിലും ഒരു കോണിന്റെ സമഭാജി എതിർവശത്തെ മുറിക്കുന്നത്, കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധത്തിലാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക.

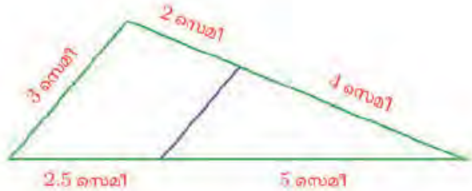
വശങ്ങളും കോണുകളും

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്ക് ഒരേ കോണുകളാണെങ്കിൽ, അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെന്നു കണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ മറിച്ചൊരു ചോദ്യമുണ്ട്. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതാക്കുകയോ വലുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ കോണുകൾ മാറാതിരിക്കുമോ?

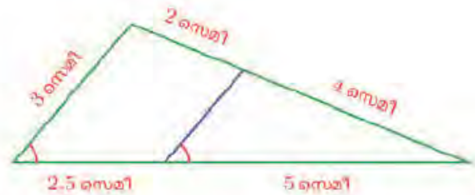
ഈ ചിത്രം നോക്കൂ:

ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങാണ് വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ. രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണോ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ഈ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കാം:



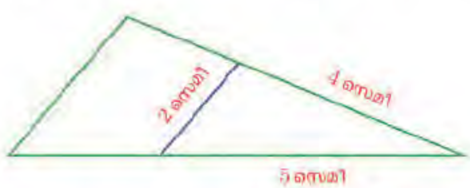
ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും വലതുവശത്തെയും (1 : 2 എന്ന) ഒരേ അംശബന്ധത്തിൽത്തന്നെയാണല്ലോ ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഈ വര ഇടതുവശത്തിനു സമാന്തരമാണ് (**സമാന്തര വരകൾ** എന്ന പാഠത്തിലെ **ത്രികോണഭാഗം**); അതുകൊണ്ട് ഇവ രണ്ടും താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്.



അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണവും അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണവും മാത്രം നോക്കിയാൽ (പുറത്തുള്ള ചെറിയ ത്രികോണം തൽക്കാലം നോക്കണ്ട) അവ രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം.

നേരത്തെ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്, ഈ രണ്ടു ത്രികോണത്തിലേയും വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ തോതിലാണ് മാറുന്നത്. ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശം, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗമാണ്; രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതുവശങ്ങളും അങ്ങനെതന്നെ. മൂന്നു വശങ്ങളും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലായതിനാൽ, ഇടതു വശങ്ങളും ഇതുപോലെ ആയിരിക്കണം. അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കാമല്ലോ:

ഇനി വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ പുറത്ത് മാറ്റി നിർത്തിയിരുന്ന ചെറുത്രികോണത്തെ വീണ്ടും നോക്കാം:



അകത്തും പുറത്തുമുള്ള ചെറിയ ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങൾക്ക് ഒരേ നീളമാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ് (എട്ടാം ക്ലാസിലെ തുല്യത്രികോണങ്ങൾ എന്ന പാഠം).

വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തന്നെയാണെന്ന് നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ.

അപ്പോൾ എന്തു കിട്ടി ?

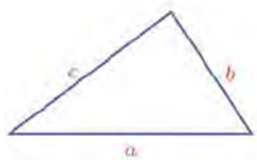
ആദ്യം വരച്ച ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും വലിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്.

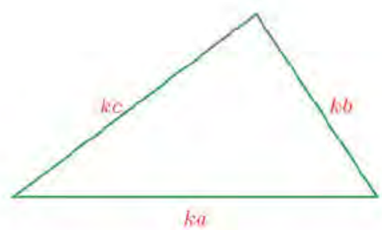
ഈ ഉദാഹരണത്തിലെ വശങ്ങളുടെ നീളവും മാറ്റത്തിന്റെ തോതുമെല്ലാം മാറ്റിയാലും ഇതേ വാദങ്ങൾകൊണ്ടുതന്നെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു സമർഥിക്കാമല്ലോ.

കൂടുതൽ കൃത്യത വേണമെന്നു തോന്നുന്നവർക്ക്, ഇതുതന്നെ പൊതുവായി അല്പം ബീജഗണിതമുപയോഗിച്ചു ചെയ്യാം.

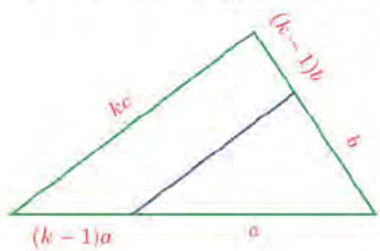
ഒരു ത്രികോണവും, അതിന്റെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയ മറ്റൊരു ത്രികോണവുമെടുക്കുക. അതായത്, ഒരു ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളങ്ങളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതാണ് മറ്റേ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ.

അപ്പോൾ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ a, b, c വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളങ്ങൾ ka, kb, kc എന്നുമെടുക്കാം.

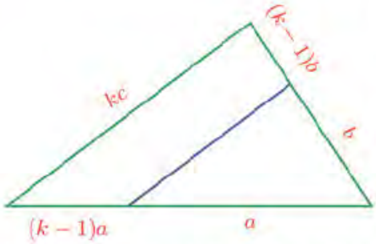




ഉദാഹരണത്തിൽ ചെയ്തപോലെ, ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം, വലിയ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി, ആ ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കാം:



ഈ വര വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തെയും വലതുവശത്തെയും $(k-1):1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്; അതിനാൽ ഈ വര, ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതു വശത്തിനു സമാന്തരമാണ്. അപ്പോൾ വലിയ ത്രികോണത്തിനും, അതിനുള്ളിലെ കൊച്ചു ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു കാണാം. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഇവ



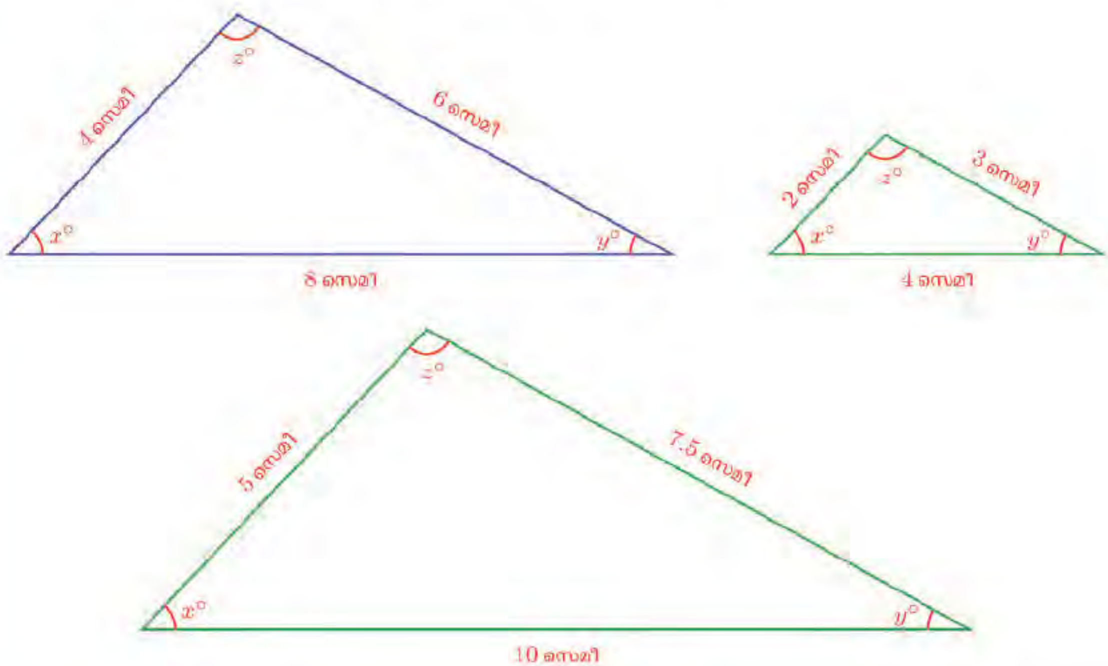
രണ്ടിന്റെയും വശങ്ങളുടെ മാറ്റവും ഒരേ തോതിലാണ്. വലിയ ത്രികോണത്തിലെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ $\frac{1}{k}$ ഭാഗമാണ് അതിനുള്ളിലെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം. വലതുവശങ്ങളും ഇതുപോലെതന്നെ. അപ്പോൾ ഇടതുവശങ്ങളും ഇങ്ങനെ തന്നെയാകണം.

ഇനി ഉദാഹരണത്തിലെപ്പോലെ, പുറത്തും അകത്തുമുള്ള ചെറുത്രികോണങ്ങൾ നോക്കാം:

ഈ രണ്ടു ചെറുത്രികോണങ്ങളുടെയും വശങ്ങളുടെ നീളം തുല്യമായതിനാൽ, കോണുകളും തുല്യമാണ്. അകത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളും തുല്യമാണെന്നു നേരത്തെ കണ്ടു. അപ്പോൾ പുറത്തെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിനും, വലിയ ത്രികോണത്തിനും ഒരേ കോണുകളാണ്.

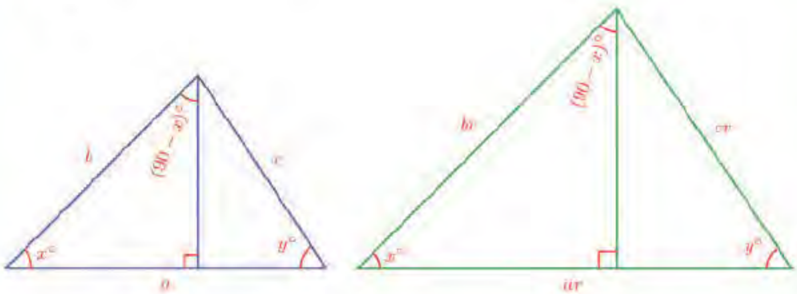
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെ വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളത്തിന്റെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെങ്കിൽ, അവയ്ക്ക് ഒരേ കോണുകളാണ്.

അപ്പോൾ കോണുകൾ മാറാതെ ഒരു ത്രികോണം ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി മാറ്റാൻ, കോണുകൾ അളക്കണമെന്നില്ല; വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ മാറ്റിയാൽ മതി.

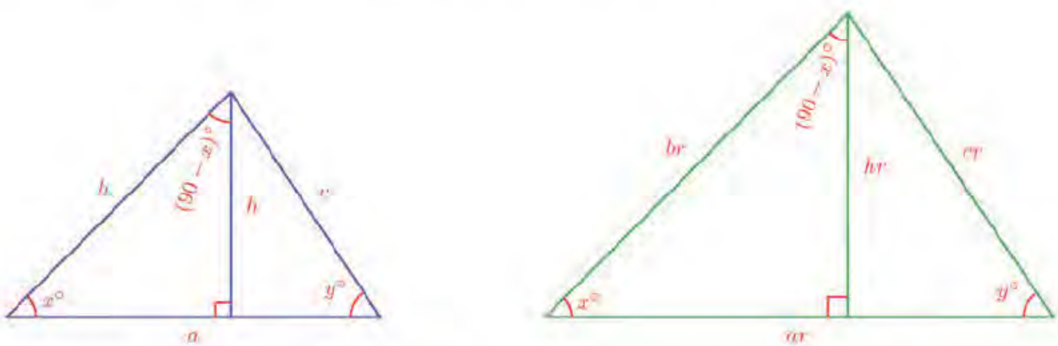


ഇതുപയോഗിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കാം. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കുകയോ ചെറുതാക്കുകയോ ചെയ്താൽ, ചുറ്റളവുകളും അതേ തോതിലാണ് മാറുന്നതെന്നു കാണാൻ വിഷമമില്ല (ചെയ്തുനോക്കൂ!).

പരപ്പളവുകൾ മാറുന്നത് എങ്ങനെയാണ് ? അതറിയാൻ, ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചു നോക്കാം. ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞതനുസരിച്ച്, രണ്ടിനും ഒരേ കോണുകളാണ്. പരപ്പളവ് ഒത്തുനോക്കാൻ, ഒരേ കോണുള്ള ഒരു മൂലയിൽനിന്നുള്ള ലംബങ്ങളും വരയ്ക്കാം:



രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിലെയും ഇടതു ഭാഗത്തുള്ള മട്ടത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കുക: രണ്ടിലും കോണുകൾ $x°$, $90°$, $(90-x)°$ തന്നെയാണ്; ഒരേ കോണുകളായതിനാൽ, വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണ്. നീലമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം b യും, പച്ചമട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം br ഉം ആണ്. അപ്പോൾ നീലത്രികോണത്തിലെ ലംബം h എന്നെടുത്താൽ പച്ചത്രികോണത്തിലെ ലംബം hr ആണ്.



ഇനി മുഴുവൻ ത്രികോണങ്ങൾ രണ്ടിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ: നീലത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $\frac{1}{2}ah$; പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $\frac{1}{2}ahr^2$

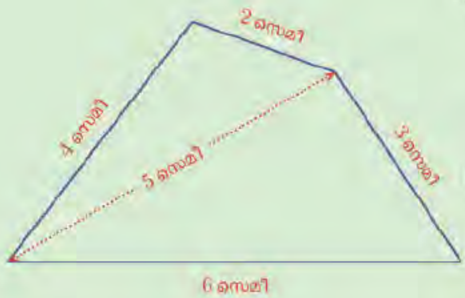
അപ്പോൾ പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോത്, വശങ്ങൾ മാറുന്ന തോതിന്റെ വർഗമാണ്.

ത്രികോണം ABC വരയ്ക്കുക. (വശങ്ങൾ a, b, c എന്ന പേരിലാവാം). Min = 0 ആകത്തക്കവിധം ഒരു സ്ലൈഡർ k നിർമ്മിക്കുക. ka നീളത്തിൽ ഒരു വര DE വരച്ച് അഗ്രബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കിക്കൊണ്ട് ആരം kb, kc ആകത്തക്കവിധം വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം DEF വരയ്ക്കുക. രണ്ട് ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ തുല്യമല്ലേ ? സ്ലൈഡറിന്റെ വിലയും ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളും മാറ്റി നോക്കൂ.

രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും ചുറ്റളവും പരപ്പളവും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ചുറ്റളവ് മാറുന്ന തോത് എന്താണ് ? പരപ്പളവ് മാറുന്ന തോതോ ?

(1) ചുവടെ വരച്ചിരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ അതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളം $1\frac{1}{4}$ മടങ്ങുമായ ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

(2) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ചിത്രം ചുവടെയുണ്ട്.



(i) ഇതേ കോണുകളും, വശങ്ങളുടെ നീളമെല്ലാം $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

(ii) കോണുകൾ വ്യത്യസ്തവും, വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം ഇതിലെ വശങ്ങളുടെ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങുമായ ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക.

(3) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 6 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ. ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശത്തിന്റെയും നാല് മടങ്ങ് വശമായിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ? ഓരോ വശവും പകുതിയാണെങ്കിലോ ?

മൂന്നാംവഴി

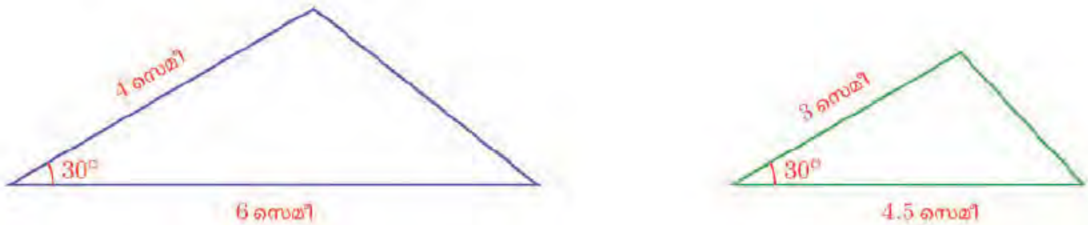
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശവും അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തെ കോണുകളും അറിയാമെങ്കിൽ കോണുകൾ മാറാതെ, വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ ചെറുതോ വലുതോ ആക്കി, മാറ്റിവരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് ആദ്യഭാഗത്ത് കണ്ടു. അറിയാവുന്ന വശം വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റിവരച്ച്, അതിന്റെ രണ്ടറ്റത്തും അതേ കോണുകൾ വരച്ചാൽ മതി; മറ്റു രണ്ടു വശങ്ങളും അതേ തോതിൽ മാറിക്കൊള്ളും.

മൂന്നു വശങ്ങളുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിൽ ഇത്തരത്തിൽ മാറ്റിവരയ്ക്കുന്ന രീതി രണ്ടാം ഭാഗത്തിലും കണ്ടു: എല്ലാ വശങ്ങളും വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരച്ചാൽ മതി; കോണുകൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റേതുതന്നെയായിരിക്കും.

ഇനി മാറ്റേണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളും, അവ ചേരുന്ന കോണുമാണ് അറിയാവുന്നതെങ്കിലോ? ഉദാഹരണമായി ഈ ചിത്രം നോക്കുക:

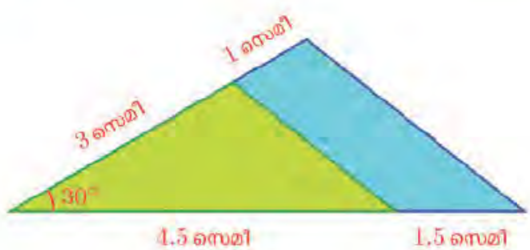
കോണുകൾ മാറാതെ ഇതിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാക്കണം.

വശങ്ങളുടെ നീളം 6 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും, 4 സെന്റിമീറ്ററിന്റെയും $\frac{3}{4}$ ഭാഗവും അവ ചേരുന്ന കോൺ 30° യുമായി ത്രികോണം വരയ്ക്കാം:

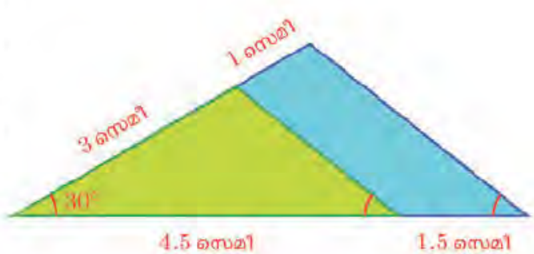


പക്ഷേ ഈ ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു രണ്ടു കോണുകൾ ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റേതു തന്നെയാണെന്നോ, മൂന്നാം വശവും ആദ്യത്രികോണത്തിലെ മൂന്നാം വശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗമാണെന്നോ അറിയില്ലല്ലോ.

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, പാഠത്തിന്റെ ആദ്യഭാഗത്തു ചെയ്തതുപോലെ, ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ കട്ടിക്കടലാസിൽ വെട്ടിയെടുത്ത്, ഇടതുമൂലകൾ ചേർത്തുവയ്ക്കുക. കോണുകൾ തുല്യമായതിനാൽ, ഈ മൂലയിലെ വശങ്ങളും ചേർന്നിരിക്കും:



ഇപ്പോൾ പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശം, നീല ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തെയും താഴത്തെ വശത്തെയും ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ് ഭാഗിക്കുന്നത്. അതിനാൽ ഈ വര, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിനു സമാന്തരമാണ്; അതുകൊണ്ട് രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും വലതു വശങ്ങൾ താഴത്തെ വശവുമായി ഒരേ ചരിവിലാണ്.



അങ്ങനെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളുടെയും കോണുകൾ തുല്യമാണെന്നു കാണാം. അപ്പോൾ ഇവയുടെ വശങ്ങൾ മൂന്നും മാറുന്നത് ഒരേ തോതിലാകണമല്ലോ. അങ്ങനെ ചെറിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതു വശവും, വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം തന്നെയാണെന്നു കാണാം.

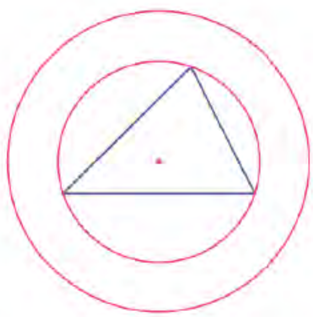
ഇതിൽ അളവുകളും തോതുമെല്ലാം മാറിയാലും, ഇതേ രീതിയിൽത്തന്നെ മേല്പറഞ്ഞ നിഗമനത്തിലെത്താമല്ലോ.

രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലും, അവയുടെ ഇടയിലെ കോണുകൾ തുല്യവും ആയ ത്രികോണങ്ങളിൽ മൂന്നാം വശങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണ്. മറ്റു രണ്ടു കോണുകളും തുല്യവുമാണ്.

ഈ തത്വമുപയോഗിച്ച്, വശങ്ങളോ കോണുകളോ അളക്കാതെതന്നെ ഒരു ത്രികോണത്തിനെ വേണ്ട തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കാം. ഉദാഹരണമായി, ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക:

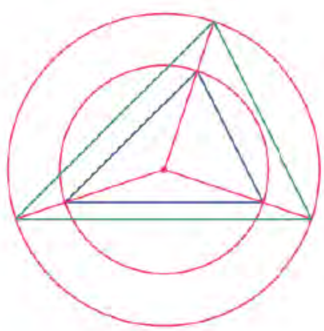
ഇതിന്റെ വശങ്ങളെയെല്ലാം ഒന്നര മടങ്ങാക്കി വലുതാക്കണം.

അതിന് ആദ്യം ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തവും, അതേ കേന്ദ്രമായി, ഒന്നര മടങ്ങ് ആരമുള്ള മറ്റൊരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക:

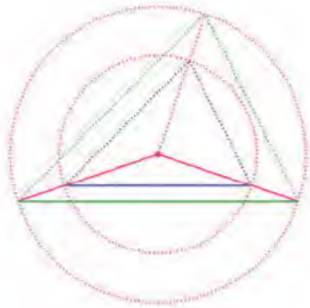


ഇനി വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രം ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ നീട്ടി വരച്ച്, വലിയ വൃത്തത്തിൽ മുട്ടിക്കുക. ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ച് ത്രികോണം വരയ്ക്കുക:

വലിയ (പച്ച) ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ ചെറിയ (നീല) ത്രികോണത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണെന്നു കാണാൻ, ഈ ത്രികോണങ്ങൾ മാത്രം നോക്കുക:

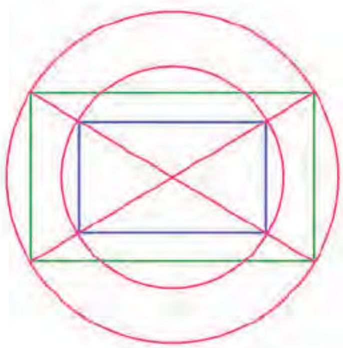


ഇതിലെ വലിയ ത്രികോണത്തിലെ ഇടതും വലതും വശങ്ങൾ,ചെറിയ ത്രികോണത്തിലെ ഇടതും വലതും വശങ്ങളുടെ ഒന്നര മടങ്ങാണല്ലോ (എന്തുകൊണ്ട് ?). ഇവയുടെ ഇടയിലെ കോൺ രണ്ടു ത്രികോണത്തിലും ഒന്നുതന്നെയാണ്. അപ്പോൾ താഴത്തെ വശങ്ങളും ഇതേ തോതിലാണ്.



അതായത്, ആദ്യത്തെ നീല ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിന്റെ ഒന്നര മടങ്ങാണ്, അവസാനം വരച്ച പച്ചത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശം. ഈ ത്രികോണത്തിലെ മറ്റു വശങ്ങളുടെ തോതും ഒന്നര മടങ്ങാണെന്നു കാണാമല്ലോ.

ഇതുപോലെതന്നെ ഏതു ചതുരത്തിന്റെയും വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കുകയോ ചെറുതാക്കുകയോ ചെയ്യാം.



Min = 0 ആയ ഒരു സ്ലൈഡർ 'a' നിർമ്മിക്കുക. ത്രികോണം ABC വരച്ച് അതിന്റെ പരിവൃത്ത കേന്ദ്രം D കണ്ടുപിടിക്കുക (Circle through 3 Points ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിവൃത്തം വരച്ച ശേഷം Midpoint or Centre ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് വൃത്തത്തിൽ ക്ലിക്ക് ചെയ്താൽ മതി). D കേന്ദ്രമായി പരിവൃത്ത ആരത്തിന്റെ a മടങ്ങ് ആരത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക (ആരമായി a*AD എന്ന് നൽകിയാൽ മതി). D യിൽ തുടങ്ങി ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വരകൾ വരയ്ക്കുക (Ray ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). ഈ വരകൾ പുതിയ വൃത്തവുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തി അവ മൂലകളായി വരുന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടെത്തുക.

എല്ലാ ചതുർഭുജങ്ങളിലും ഈ രീതി പ്രയോഗിക്കാൻ കഴിയില്ല. ഉദാഹരണമായി, ചതുരമല്ലാത്ത ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു മൂലകളിൽക്കൂടി വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ലല്ലോ.

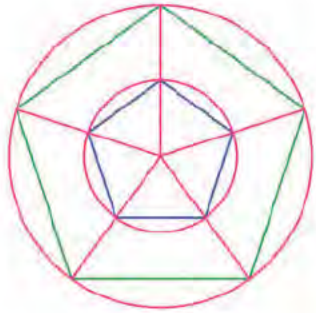
മട്ടത്രികോണം

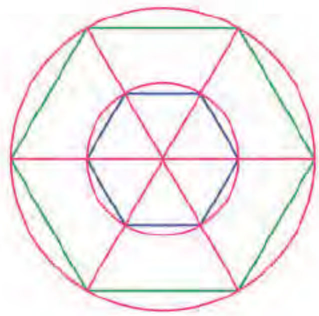
ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളം, മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളുടെ നീളത്തിനു തുല്യമായതുകൊണ്ട്, ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യമാകണമെന്നില്ല. മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളും തുല്യമാകണം; അല്ലെങ്കിൽ ഈ വശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകൾ തുല്യമാകണം.

പക്ഷേ ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങൾ നിശ്ചയിച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ, പൈഥാഗറസ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് മൂന്നാമത്തെ വശവും നിശ്ചയിക്കപ്പെടും; ത്രികോണങ്ങൾ തുല്യവുമാകും

ഇതുപോലെ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളിൽ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലായതുകൊണ്ടു മാത്രം അവ സദൃശമാണെന്നു പറയാൻ കഴിയില്ല. മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളുടെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിൽ ആകണം; അല്ലെങ്കിൽ ഈ വശങ്ങൾക്കിടയിലെ കോണുകൾ തുല്യമാകണം. എന്നാൽ രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ, രണ്ടു വശങ്ങളുടെ മാറ്റം ഒരേ തോതിൽ ആയാൽത്തന്നെ ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശമാണ്.

എന്നാൽ സമബഹുഭുജങ്ങളെയെല്ലാം ഒരേ തോതിൽ മാറ്റി വരയ്ക്കാൻ ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം:





ഇതുവരെപ്പറഞ്ഞ തത്വങ്ങളെല്ലാം ഇങ്ങനെ ചുരുക്കിപ്പറയാം.

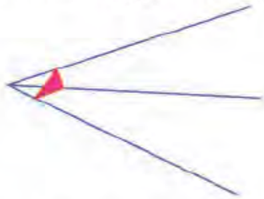
രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ തമ്മിൽ ചുവടെപ്പറയുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബന്ധമുണ്ടെങ്കിൽ, മറ്റു രണ്ടു ബന്ധങ്ങളും ഉണ്ടാകും.

- ഒരേ കോണുകളാകുക.
- വശങ്ങളിലെയെല്ലാം മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുക.
- രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാകുകയും, അവയുടെയിടയിൽ ഒരേ കോൺ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യുക.

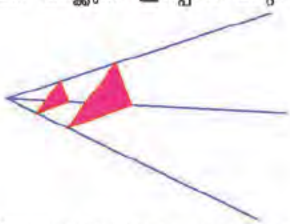
ഇതിലേതെങ്കിലും തരത്തിൽ ബന്ധപ്പെടുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശം (similar) ആണെന്നാണ് പറയുന്നത്.

പ്രക്ഷേപണം

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളെല്ലാം, പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമായി യോജിപ്പിച്ച്, നീട്ടി വരയ്ക്കുക:

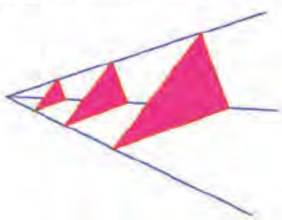


ത്രികോണത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തിന് സമാന്തരമായി, അല്പം വലത്തേക്കു മാറി, ഒരു വര വരയ്ക്കുക. ഇത് മുകളിലെ നീല വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ത്രികോണത്തിന്റെ വലതുവശത്തിന് സമാന്തരമായി മറ്റൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഈ വര നടുവിലെ നീല വരയുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ ത്രികോണത്തിന്റെ താഴത്തെ വശത്തിനു സമാന്തരമായി മൂന്നാമതൊരു വര വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ മറ്റൊരു ത്രികോണമായി.



രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണ് (എന്തുകൊണ്ട് ?) അതിനാൽ അവയുടെ വശങ്ങൾ ഒരേ തോതിലാണ് വലുതായിരിക്കുന്നത്.

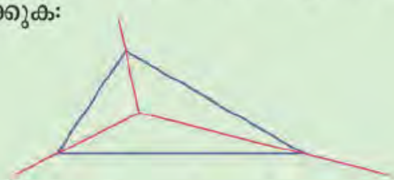
ഇങ്ങനെ എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ വേണമെങ്കിലും വരയ്ക്കാമല്ലോ.

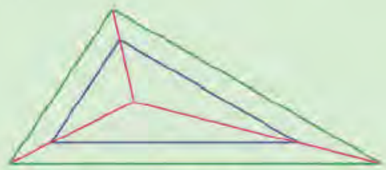


(1) രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ ലംബവശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെങ്കിൽ, അവയുടെ കർണ്ണങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു വശങ്ങളിലെ മാറ്റം ഒരേ തോതിലാണെങ്കിൽ, മൂന്നാമത്തെ വശങ്ങളിലെ മാറ്റവും ഇതേ തോതിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(3) ഒരു ത്രികോണം വരച്ച്, അതിനുള്ളിൽ ഒരു കുത്തിടുക. ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ ഈ കുത്തുമായി യോജിപ്പിച്ചു വരയ്ക്കുക. ഈ വരകളോരോന്നും അവയുടെ പകുതി കൂടി പുറത്തേക്ക് നീട്ടി, അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിക്കുക:

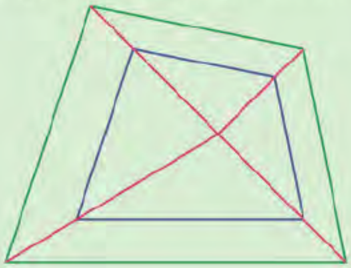




ഇങ്ങനെ കിട്ടിയ വലിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളെല്ലാം, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ ഒന്നര മടങ്ങാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഒരു ത്രികോണം ABC വരച്ച് അതിനുപുറത്ത് ഒരു ബിന്ദു D അടയാളപ്പെടുത്തുക. D യിൽ നിന്ന് ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വരകൾ വരയ്ക്കുക (Ray ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). DA എന്ന വരയിൽ ഒരു ബിന്ദു E അടയാളപ്പെടുത്തുക. E യിലൂടെ AB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി ഒരു വര വരച്ച് ഈ വര DB യെ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു F അടയാളപ്പെടുത്തുക. അതുപോലെ, E യിലൂടെ AC യ്ക്ക് സമാന്തരം വരച്ച് DC യുമായി കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ബിന്ദു G യും അടയാളപ്പെടുത്തുക. ത്രികോണം EFG വരയ്ക്കുക. ABC, EFG എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ കോണുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കൂ. അവ തുല്യമല്ലേ ? E യുടെ സ്ഥാനം മാറ്റിനോക്കൂ. EFG യുടെ വലിപ്പം മാറുന്നില്ലേ. അതിന്റെ വശങ്ങളും ABC യുടെ സമാന വശങ്ങളും ഒരേ തോതിലാണോ മാറുന്നത് ?

(4) ഒരു ചതുർഭുജത്തിനകത്തെ ഒരു ബിന്ദുവും ചതുർഭുജത്തിന്റെ മൂലകളും യോജിപ്പിക്കുന്ന വരകൾ, ഒരേ തോതിൽ പുറത്തേക്കു നീട്ടുന്നു; ഈ വരകളുടെ അറ്റങ്ങൾ യോജിപ്പിച്ച് മറ്റൊരു ചതുർഭുജമുണ്ടാക്കുന്നു.



(i) വലിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങൾ, ചെറിയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളെ ഒരേ തോതിൽ വലുതാക്കിയതാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

(ii) രണ്ടു ചതുർഭുജങ്ങൾക്കും ഒരേ കോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

സദൃശത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ ജിയോജിബ്രയിലെ Enlarge from Point ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം. Min = 0 വരത്തക്കവിധം സ്ലൈഡർ 'a' ഉണ്ടാക്കുക. ഒരു ത്രികോണം വരച്ച് അതിന് അകത്തോ പുറത്തോ ആയി ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Enlarge from Point Tool (Dilate from point) ടൂൾ ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിലും തുടർന്ന് ബിന്ദുവിലും ക്ലിക്ക് ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ജാലകത്തിൽ Scale Factor ആയി 'a' എന്ന് നൽകുക. ത്രികോണത്തിന് സദൃശമായി മറ്റൊരു ത്രികോണം കിട്ടും. 'a' യും ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനവും മാറ്റി നോക്കൂ. ത്രികോണത്തിനുപകരം ഏതുരൂപത്തിന്റെയും സദൃശരൂപങ്ങൾ ഇതുപോലെ നിർമ്മിക്കാം.

ഗവേഷണം

സദൃശത്രികോണങ്ങളുടെ ഉയരം, നടുവരകൾ, കോൺസമഭാജികൾ എന്നിവ മാറുന്നത് വശങ്ങളുടെ അതേ തോതിലാണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.