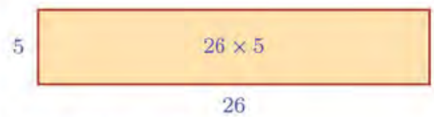
4

ഗുണനസമവാക്യങ്ങൾ

തുകകളുടെ ഗുണനം

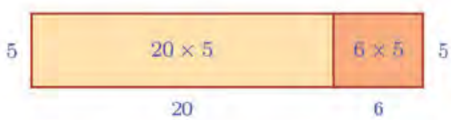
26 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും, 5 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

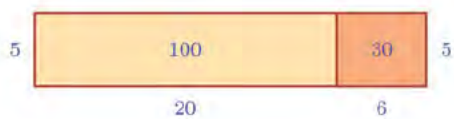


നേരിട്ടു ചെയ്യാതെ ഇങ്ങനെ എഴുതിയാലോ ?

$$26 \times 5 = (20 + 6) \times 5$$

ചിത്രത്തെയും ഇതുപോലെ ഭാഗിക്കാം:





അപ്പോൾ പരപ്പളവ്

$$100 + 30 = 130 \text{ ചസെമീ}$$

ഇവിടെ ചെയ്ത ക്രിയ എന്താണ് ?

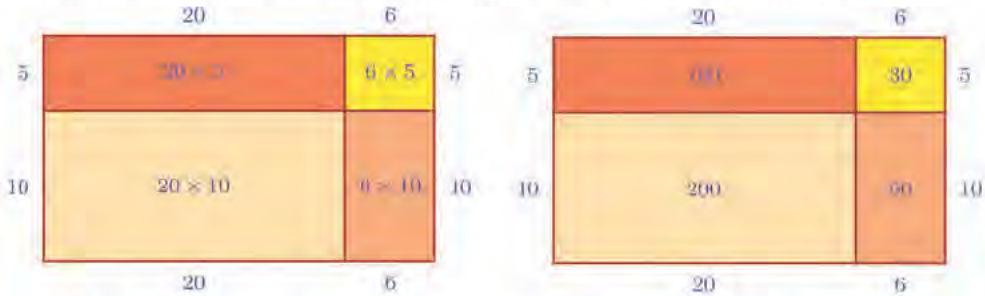
$$\begin{aligned} 26 \times 5 &= (20 + 6) \times 5 \\ &= (20 \times 5) + (6 \times 5) \\ &= 100 + 30 \\ &= 130 \end{aligned}$$

ഇനി 26 സെന്റിമീറ്റർ നീളവും, 15 സെന്റിമീറ്റർ വീതിയുമുള്ള ചതുരം ആയാലോ ?

നേരിട്ടു ഗുണിക്കാതെ,

$$26 \times 15 = (20 + 6) \times (10 + 5)$$

എന്നെഴുതി, ചിത്രത്തെയും ഇതുപോലെ ഭാഗിച്ചാൽ കണക്കുകൂട്ടൽ എളുപ്പമാകും:



ഇനി പരപ്പളവ് കണക്കാക്കാമല്ലോ:

$$200 + 100 + 60 + 30 = 390$$ ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ

ഈ സംഖ്യകൾ കിട്ടിയ ക്രിയകൾ എഴുതിയാലോ ?

$$\begin{aligned}
26 \times 15 &= (20 + 6) \times (10 + 5) \\
&= (20 \times 10) + (20 \times 5) + (6 \times 10) + (6 \times 5) \\
&= 200 + 100 + 60 + 30 \\
&= 390
\end{aligned}$$

സാധാരണയായി, സംഖ്യകൾ ഒന്നിനുതാഴെ മറ്റൊന്നെഴുതി ഗുണിക്കുമ്പോഴും ഇതുതന്നെയല്ലേ (വേറൊരു ക്രമത്തിൽ) ചെയ്യുന്നത് ?

$$\begin{array}{r l}
26\ \times & \\
\underline{15} & \\
130 & \leftarrow 26 \times 5 = (6 + 20) \times 5 = 30 + 100 \\
\underline{260} & \leftarrow 26 \times 10 = (6 + 20) \times 10 = 60 + 200 \\
390 &
\end{array}$$

ഇവിടെ ചെയ്ത ക്രിയകൾ അല്പം കൂടി വിശദമാക്കാം:

$20 + 6$ എന്ന തുകയെ $10 + 5$ എന്ന തുക കൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ തുകയിലെ 20, 6 എന്നീ സംഖ്യകളെ, രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ 10, 5 എന്ന ഓരോ സംഖ്യകൾ കൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, അങ്ങനെ കിട്ടുന്ന നാലു ഗുണനഫലങ്ങളും കൂട്ടി.

തുകകളിലെ സംഖ്യകൾ എണ്ണൽസംഖ്യകൾ തന്നെ ആകണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി

$$\begin{aligned}6\tfrac{1}{2} \times 8\tfrac{1}{3} &= \left(6+\tfrac{1}{2}\right) \times \left(8+\tfrac{1}{3}\right)\\ &= (6 \times 8) + \left(6 \times \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times 8\right) + \left(\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3}\right)\\ &= 48 + 2 + 4 + \tfrac{1}{6}\\ &= 54\tfrac{1}{6}\end{aligned}$$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

തുകയെ തുക കൊണ്ടു ഗുണിക്കാൻ, ആദ്യത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യയേയും രണ്ടാമത്തെ തുകയിലെ ഓരോ സംഖ്യകൊണ്ടും ഗുണിച്ച്, ഗുണനഫലങ്ങളെല്ലാം കൂട്ടണം.

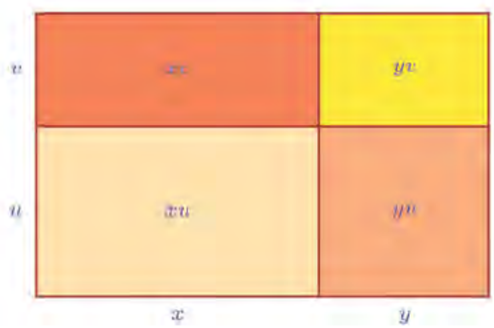
ഇത് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാലോ ?

ആദ്യത്തെ തുക $x + y$ എന്നും, രണ്ടാമത്തെ തുക $u + v$ എന്നും എടുക്കാം. ഇവയുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, xu, xv, yu, yv ഇവയെല്ലാം കൂട്ടണം. അതായത്,

x, y, u, v എന്ന ഏതു നാല് അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും

$$(x+y)(u+v) = xu + xv + yu + yv$$

പരപ്പളവുകളുടെ കണക്കായി ഇത് ഇങ്ങനെ കാണാം.



ചില കണക്കുകൂട്ടലുകൾ എളുപ്പമാക്കാൻ മേല്പറഞ്ഞ തത്വം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, 31×51 നോക്കുക.

$30 \times 50 = 1500$ എന്നു മനസ്സിൽത്തന്നെ ചെയ്യാമല്ലോ.

ഇപ്പോൾ കണ്ട തത്വമനുസരിച്ച്,

$$31 \times 51 = (30 + 1) \times (50 + 1) = 1500 + 30 + 50 + 1 = 1581$$

എന്നു മനസ്സിൽ കൂട്ടാം.

ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ച ബീജഗണിത സമവാക്യം എന്താണ് ?

$$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$$

അതായത്, രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അറിയാമെങ്കിൽ, തൊട്ടടുത്ത എണ്ണൽ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും തുകയും, പിന്നെ ഒന്നും കൂടി കൂട്ടിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണമായി,

$$21 \times 71 = (20 \times 70) + 20 + 70 + 1 = 1400 + 91 = 1491$$

$$81 \times 91 = (80 \times 90) + 80 + 90 + 1 = 7200 + 171 = 7371$$

$$201 \times 401 = (200 \times 400) + 200 + 400 + 1 = 80000 + 601 = 80601$$

ഒന്നു കൂട്ടിയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം പോലെ, രണ്ടു കൂട്ടിയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ എളുപ്പവഴിയുണ്ടോ? ആലോചിച്ചുനോക്കൂ.

ചില ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാനും മേല്പറഞ്ഞ പൊതുതത്വം ഉപയോഗിക്കാം:

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \left(x \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times y\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{4}$$

അപ്പോൾ

$$6\frac{1}{2} \times 8\frac{1}{2} = 48 + \left(\frac{1}{2} \times 14\right) + \frac{1}{4} = 48 + 7 + \frac{1}{4} = 55\frac{1}{4}$$

$$10\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{2} = 50 + \left(\frac{1}{2} \times 15\right) + \frac{1}{4} = 50 + 7\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 57\frac{3}{4}$$

എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

(1) ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ മനസ്സിൽത്തന്നെ ചെയ്ത് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക:

(i) 71×91 (ii) 42×62 (iii) $10\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}$ (iv) 9.5×3.5 (v) $10\frac{1}{4} \times 6\frac{1}{4}$

(2) രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 1400 ഉം, തുക 81 ഉം ആണ്. ഇവ ഓരോന്നിന്റേയും തൊട്ടടുത്ത രണ്ട് എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

(3) രണ്ടു ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 621 ഉം, തുക 50 ഉം ആണ്. ഈ ഓരോ ഒറ്റസംഖ്യയുടേയും തൊട്ടടുത്തുള്ള രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

ക്രിയാവിശേഷങ്ങൾ

സംഖ്യാക്രിയകളെക്കുറിച്ചുള്ള പൊതുവായ ചില തത്വങ്ങളാണല്ലോ സർവസമവാക്യങ്ങളായി ബീജഗണിതത്തിൽ എഴുതുന്നത്. ഇവയുപയോഗിച്ച് മറ്റു ചില പൊതുതത്വങ്ങൾ തെളിയിക്കുകയു മാകാം.

ഉദാഹരണമായി,

രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും ഒറ്റസംഖ്യ തന്നെയാണെന്ന് ചില ഒറ്റസംഖ്യാജോടികളെ ടുത്ത് പരിശോധിച്ചാൽ കാണാം. ഇത് ഏതു രണ്ടു ഒറ്റസംഖ്യകൾക്കും ശരിയാണെന്ന് എങ്ങനെ തെളിയിക്കും ?

ഒറ്റസംഖ്യകളുടെയെല്ലാം പൊതുരൂപം

$$2n + 1, n = 0, 1, 2, 3,...$$

എന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ. അപ്പോൾ രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകൾ പൊതുവായി $2m + 1, 2n + 1$ എന്നെടുക്കാം. ഇവയുടെ ഗുണനഫലം

$$(2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1$$

ഇതും ഒറ്റസംഖ്യ ആണോ ?

അല്പം മാറ്റിയെഴുതിയാലോ ?

$$(2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$$

ഗുണനഫലവും ഒറ്റസംഖ്യ തന്നെയാണെന്ന് ഇപ്പോൾ വ്യക്തമായില്ലേ ?

ഒറ്റസംഖ്യകളെന്നാൽ, രണ്ടുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളെന്നും പറയാമല്ലോ.

അപ്പോൾ മൂന്നു കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ പൊതുരൂപം എന്താണ് ?

അവയെല്ലാം മൂന്നിന്റെ ഗുണിതത്തിനോട് 1 കൂട്ടിയവയല്ലേ ?

അങ്ങനെ ആലോചിച്ചാൽ പൊതുരൂപം എഴുതാമല്ലോ.

$$3n + 1, n = 0, 1, 2, 3, ...$$

ഇങ്ങനെയുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഗുണിച്ചാലോ ?

$$(3m + 1) (3n + 1) = 9mn + 3m + 3n + 1$$

ഗുണനഫലത്തെയും മൂന്നു കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ മിച്ചം ഒന്നുതന്നെയാണോ? അത് അറിയാൻ മുകളിലെ സമവാക്യം ഇങ്ങനെ മാറ്റിയാൽപ്പോരേ ?

$$(3m + 1) (3n + 1) = 3(3mn + m + n) + 1$$

ഇതും മൂന്നിന്റെ ഗുണിതത്തിനോട് ഒന്നു കൂട്ടിയതല്ലേ ?

അതായത്, മൂന്നു കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഒന്നു മിച്ചം വരുന്ന സംഖ്യ.

മറ്റൊരുതരത്തിലുള്ള കണക്കു നോക്കാം:

ആദ്യത്തെ നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ 1, 2, 3, 4 ഇവയിൽ

അറ്റത്തുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 1 \times 4 = 4$

നടുക്കുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 2 \times 3 = 6$

2, 3, 4, 5 എടുത്താലോ ?

അറ്റത്തുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 2 \times 5 = 10$

നടുക്കുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= 3 \times 4 = 12$

അടുത്തടുത്ത നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കുറേ എണ്ണം കൂടി പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ. ഗുണനഫലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എല്ലാറ്റിലും 2 തന്നെയാണോ ?

അടുത്തടുത്ത ഏതു നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകൾ എടുത്താലും ഇതു ശരിയാകുമോ ?

അത് തെളിയിക്കാൻ, പൊതുവായി അടുത്തടുത്തുള്ള നാല് എണ്ണൽസംഖ്യകൾ x, $x + 1$, $x + 2$, $x + 3$ എന്നെടുത്തു തുടങ്ങാം.

അറ്റത്തുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= x(x + 3) = x^2 + 3x$

നടുക്കുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $= (x + 1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$

അപ്പോൾ വ്യത്യാസം 2 ആണെന്ന് വ്യക്തമായില്ലേ ?

x ആയി ഏതു സംഖ്യ എടുത്താലും ഈ സമവാക്യങ്ങൾ ശരിയാകും. എണ്ണൽസംഖ്യകളാണ് എടുക്കുന്നതെങ്കിൽ, ഈ തത്വം ഇങ്ങനെ പറയാം:

അടുത്തടുത്തുള്ള ഏതു നാലു എണ്ണൽസംഖ്യകളെടുത്താലും, അറ്റത്തുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും, നടുക്കുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം രണ്ട് ആണ്.

(1) ചുവടെപ്പറയുന്ന ഓരോ കാര്യവും, പല സംഖ്യകളെടുത്ത് പരിശോധിക്കുക. അവയിൽനിന്ന് പൊതുവായ ഒരു തത്വം ഊഹിക്കുക. ഊഹിച്ചത് ശരിയാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

(i) 3 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെയും, 2 മിച്ചം വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെയും, ഗുണനഫലത്തെ 3 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള മിച്ചം.

(ii) 4 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 1 മിച്ചം വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെയും, 2 മിച്ചം വരുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെയും, ഗുണനഫലത്തെ 4 കൊണ്ട് ഹരിച്ചാലുള്ള മിച്ചം.

(iii) അടുത്തടുത്തുള്ള ആറ് എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ, അറ്റത്തുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും, നടുക്കുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെയും ഗുണനഫലം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം.

(2) 36×28 എന്ന ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു രീതി ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$3 \times 2 = 6$	6×100	600
$(3 \times 8) + (6 \times 2) = 36$	36×10	360
6×8		48
36×28		1008

(i) മറ്റു ചില രണ്ടക്കസംഖ്യകളിൽ ഈ രീതി പരീക്ഷിക്കുക.

(ii) ഇത് ശരിയാകാനുള്ള കാരണം, ബീജഗണിതരീതിയിൽ വിശദീകരിക്കുക.

(രണ്ടക്കസംഖ്യകളെയെല്ലാം $10m + n$ എന്ന ബീജഗണിതരൂപത്തിൽ എഴുതാമെന്ന് ഏഴാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർക്കുക).

ക്രിയാകൗതുകങ്ങൾ

സംഖ്യാക്രിയകളിലെ ചില കൗതുകങ്ങൾ വിശദീകരിക്കാനും ബീജഗണിതം ഉപയോഗിക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഈ ഗുണനങ്ങൾ നോക്കൂ:

$$12 \times 63 = 756$$
$$21 \times 36 = 756$$

സാധാരണയായി രണ്ടു രണ്ടക്കസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും, അവയുടെ അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചിട്ടു കിട്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും വ്യത്യസ്തമാണല്ലോ (പരീക്ഷിച്ചു നോക്കൂ). ഗുണനഫലങ്ങൾ ഒന്നുതന്നെയാകുന്ന വേറെ സംഖ്യകളുണ്ടോ ?

ഇതു നോക്കൂ:

$$32 \times 46 = 1472$$
$$23 \times 64 = 1472$$

ഇത്തരം ജോടികൾ ഇനിയുമുണ്ടോ ?

ഏതു രണ്ടക്ക സംഖ്യയെയും $10m + n$ എന്നെഴുതാമല്ലോ;

ആദ്യത്തെ അക്കം m, രണ്ടാമത്തെ അക്കം n.

അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചെടുത്താലോ ?

ആദ്യത്തെ അക്കം n, രണ്ടാമത്തെ അക്കം m; സംഖ്യ $10n + m$

നമുക്കു വേണ്ടത്, രണ്ട് രണ്ടക്കസംഖ്യകളാണല്ലോ; അവയെ $10m + n$, $10p + q$ എന്നെടുക്കാം. അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ $10n + m$, $10q + p$

രണ്ടു ജോടികളുടെയും ഗുണനഫലം ഒന്നുതന്നെയാകുന്ന തരത്തിൽ m, n, p, q എടുക്കാനാണ് നമ്മുടെ ശ്രമം.

ആദ്യത്തെ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം

$$(10m + n)(10p + q) = 100mp + 10mq + 10np + nq$$

അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചെഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം

$$(10n + m)(10q + p) = 100nq + 10np + 10mq + mp$$

രണ്ടു ഗുണനഫലങ്ങളും നാലു സംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്. അവ ഒത്തുനോക്കൂ. രണ്ട് തുകയിലും $10mq + 10np$ ഉണ്ട്. അപ്പോൾ ആകെ തുകകൾ തുല്യമാകാൻ, മറ്റു രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകകൾ തുല്യമായാൽ മതിയല്ലോ. അതായത്,

$$100mp + nq = 100nq + mp$$

എന്താണ് ഇതിന്റെ അർത്ഥം ?

ഒരു സംഖ്യയുടെ നൂറു മടങ്ങും മറ്റൊരു സംഖ്യയും കൂട്ടിയാൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയുടെ നൂറു മടങ്ങും ആദ്യത്തെ സംഖ്യയും കൂട്ടിയത് തന്നെ ആകുമോ ?

അപ്പോൾ mp, nq എന്നീ ഗുണനഫലങ്ങൾ ഒരേ സംഖ്യ തന്നെ ആകണം.

അതായത്

$$mp = nq$$

ഇക്കാര്യം ബീജഗണിതരീതിയിലും കാണാം. $100mp + nq$, $100nq + mp$ എന്നിങ്ങനെ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ ഒന്നുതന്നെ ആകണമെങ്കിൽ, ഈ തുകകളുടെ വ്യത്യാസം പൂജ്യമാകണ്ടേ ? അതായത്

$$(100mp + nq) - (100nq + mp) = 0$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$99mp - 99nq = 0$$

എന്നു കിട്ടും. അല്പം മാറ്റി എഴുതിയാൽ

$$99(mp - nq) = 0$$

ഒരു സംഖ്യയുടെ 99 മടങ്ങ് പൂജ്യമാകണമെങ്കിൽ, ആ സംഖ്യതന്നെ പൂജ്യം ആയാലല്ലേ പറ്റൂ ? അതായത്

$$mp - nq = 0$$

അഥവാ

$$mp = nq$$

അപ്പോൾ നമ്മൾ അന്വേഷിക്കുന്ന രണ്ടക്ക സംഖ്യാജോടികളിലെല്ലാം, ആദ്യത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും, രണ്ടാമത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലവും ഒന്നുതന്നെ ആയിരിക്കണം.

ആദ്യം കണ്ട ഉദാഹരണത്തിലെ സംഖ്യകൾ 12, 63

ആദ്യത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 1 \times 6 = 6$

രണ്ടാമത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 2 \times 3 = 6$

രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിലോ ? സംഖ്യകൾ 32, 46

ആദ്യത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 3 \times 4 = 12$

രണ്ടാമത്തെ അക്കങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $= 2 \times 6 = 12$

ഇതുപോലെ

$$2 \times 9 = 18$$

$$3 \times 6 = 18$$

ആയതിനാൽ, 23×96 ഉം 32×69 ഉം ചെയ്താൽ ഒരേ സംഖ്യ കിട്ടും (പരിശോധിച്ചു നോക്കൂ).

മറ്റു ചില ജോടികൾ കണ്ടുപിടിക്കാമോ ?

കലണ്ടറിലെ സംഖ്യകളുടെ തുകകളെക്കുറിച്ചുള്ള ചില രസകരമായ കാര്യങ്ങൾ ഏഴാംക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇനി അവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു കണക്കു നോക്കാം.

കലണ്ടറിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു മാസമെടുത്ത്, ഒരു സമചതുരത്തിൽ വരുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക:

ഞായർ	തിങ്കൾ	ചൊവ്വ	ബുധൻ	വ്യാഴം	വെള്ളി	ശനി
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

കോണോടുകോൺ വരുന്ന സംഖ്യകൾ ഗുണിച്ചുനോക്കൂ:

$$14 \times 6 = 84$$

$$13 \times 7 = 91$$

ഇവയുടെ വ്യത്യാസം

$$91 - 84 = 7$$

ഇതുപോലെ സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ വരുന്ന മറ്റു നാലു സംഖ്യകൾ എടുത്തു നോക്കൂ.

$$22 \times 30 = 660$$

$$23 \times 29 = 667$$

$$667 - 660 = 7$$

വ്യത്യാസം എപ്പോഴും 7 തന്നെയാകാൻ കാരണമെന്താണ് ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചുനോക്കാം:

സമചതുരത്തിലെ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ x എന്നെടുത്താൽ, നാലു സംഖ്യകൾ ഇങ്ങനെ എഴുതാം:

x	$x+1$
$x+7$	$x+8$

കോണോടുകോൺ ഗുണനഫലങ്ങൾ $x(x+8)$ ഉം $(x+1)(x+7)$ ഉം ആണല്ലോ.

ഇതിൽ ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലം

$$x(x+8) = x^2 + 8x$$

രണ്ടാമത്തെ ഗുണനഫലം

$$(x+1)(x+7) = x^2 + 7x + x + 7 = x^2 + 8x + 7$$

രണ്ടു ഗുണനഫലങ്ങളും നോക്കൂ.

വ്യത്യാസം 7 അല്ലേ ?

ഇതിൽ x ആയി ഏതു സംഖ്യയും എടുക്കാമല്ലോ; അതായത്, കലണ്ടറിന്റെ ഏതുഭാഗത്തും ഇതു ശരിയാണ്.

വേറൊരു കണക്ക്:

ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ഒരു ഗുണിതപ്പട്ടിക ഉണ്ടാക്കുക.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

കലണ്ടറിൽ ചെയ്തതുപോലെ ഒരു സമചതുരത്തിനുള്ളിൽ വരുന്ന നാലു സംഖ്യകൾ പട്ടികയുടെ വ്യത്യസ്ത ഭാഗങ്ങളിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

ഓരോ സമചതുരത്തിലും കോണോടുകോൺ വരുന്നസംഖ്യകൾ ഗുണിക്കുന്നതിനു പകരം കൂട്ടി നോക്കൂ:

$12 + 20 = 32$ $\qquad$ $35 + 48 = 83$

$16 + 15 = 31$ $\qquad$ $40 + 42 = 82$

പട്ടികയുടെ ഏതു ഭാഗത്ത് ഇതുപോലെ സമചതുരമെടുത്താലും തുകകളുടെ വ്യത്യാസം 1 തന്നെ ആകുമോ ?

ഇതു പരിശോധിക്കാൻ, പട്ടികയിൽ ഇങ്ങനെ എടുക്കുന്ന നാലു സംഖ്യകളുടെ പൊതുവായ രൂപം അറിയണം.

പട്ടികയിലെ ആദ്യത്തെ വരി 9 വരെയുള്ള എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ; രണ്ടാം വരിയിൽ ഇവയെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ ...

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, 1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള ഏത് എണ്ണൽസംഖ്യ n എടുത്താലും n-ാം വരിയിലെ സംഖ്യകൾ

$$n \quad 2n \quad 3n \quad 4n \quad 5n \quad 6n \quad 7n \quad 8n \quad 9n$$

അടുത്ത വരിയിലോ ?

ആദ്യത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളെ ഏതു സംഖ്യ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യകളാണ് ?

ഈ രണ്ടു വരികളും ഒന്നിച്ചു നോക്കിയാലോ ?

n	$2n$	$3n$	$4n$	$5n$	$6n$	$7n$	$8n$	$9n$
$n+1$	$2(n+1)$	$3(n+1)$	$4(n+1)$	$5(n+1)$	$6(n+1)$	$7(n+1)$	$8(n+1)$	$9(n+1)$

ഇനി സമചതുരമായി സംഖ്യകൾ എടുക്കാൻ, ആദ്യത്തെ വരിയിലെ ഏതു സംഖ്യയിൽ നിന്നും തുടങ്ങാം. ഉദാഹരണമായി, ഇങ്ങനെയെല്ലാം ആകാം:

$2n$	$3n$
$2(n+1)$	$3(n+1)$

$5n$	$6n$
$5(n+1)$	$6(n+1)$

പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ, n നെ m കൊണ്ടു ഗുണിച്ച സംഖ്യയിൽനിന്നാണ് തുടങ്ങുന്നതെങ്കിൽ, സമചതുരത്തിലെ നാലു സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയായിരിക്കും ? ഓരോന്നായി എഴുതി നോക്കാം:

mn	$(m+1)n$

mn	$(m+1)n$
$m(n+1)$	

mn	$(m+1)n$
$m(n+1)$	$(m+1)(n+1)$

ഗുണനഫലങ്ങളെല്ലാം വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ

mn	$mn+n$
$mn+m$	$mn+m+n+1$

കോണോടുകോൺ കൂട്ടിയാൽ, ഒരു തുക

$$mn + (mn + m + n + 1) = 2mn + m + n + 1$$

മറ്റേ തുക

$$(mn + n) + (mn + m) = 2mn + n + m$$

ഇങ്ങനെയെടുക്കുന്ന ഏതു സമചതുരത്തിലും തുകകളുടെ വ്യത്യാസം 1 തന്നെ ആകുമെന്നും അത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്നും ഇപ്പോൾ മനസ്സിലായില്ലേ ?

(1) ചുവടെക്കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ സംഖ്യകൾ എഴുതുക:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

(i) കലണ്ടറിൽ ചെയ്തതുപോലെ നാലു സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരം അടയാളപ്പെടുത്തി, സംഖ്യകൾ കോണോടുകോൺ ഗുണിച്ച് വ്യത്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക. ഏതു സമചതുരത്തിലെ നാലു സംഖ്യകളെടുത്താലും ഒരേ വ്യത്യാസമാണോ കിട്ടുന്നത് ?

(ii) ഇത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(2) ഗുണിതപ്പട്ടികയിൽ നാലു സംഖ്യകളുള്ള സമചതുരത്തിനു പകരം, ഒൻപതു സംഖ്യകളുള്ള ഒരു സമചതുരമെടുത്ത്, നാലു മൂലകളിലുമുള്ള സംഖ്യകൾ മാത്രം അടയാളപ്പെടുത്തുക:

6	8	10
9	12	15
12	16	20

(i) കോണോടുകോൺ തുകകളുടെ വ്യത്യാസം എന്താണ് ?

(ii) ഇങ്ങനെയുള്ള സമചതുരങ്ങളിലെല്ലാം വ്യത്യാസം 4 തന്നെ കിട്ടുന്നത് എന്തുകൊണ്ടാണെന്ന് ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കുക.

(iii) പതിനാറ് സംഖ്യകളുടെ സമചതുരമെടുത്താലോ ?

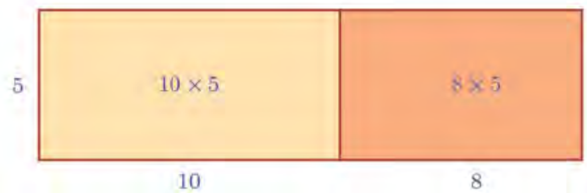
വ്യത്യാസ ഗുണനം

18×5 എങ്ങനെ കണക്കാക്കും ?

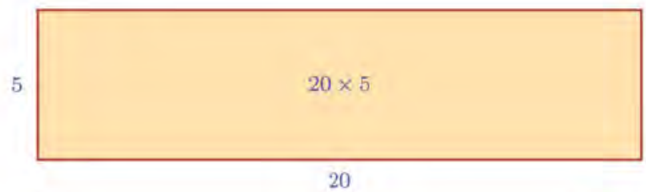
നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലെ

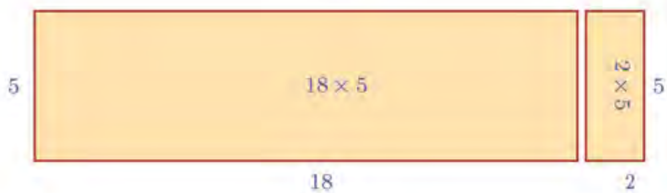
$$18 \times 5 = (10 + 8) \times 5 = (10 \times 5) + (8 \times 5) = 50 + 40 = 90$$

എന്നു കണക്കുകൂട്ടാം.



മറ്റൊരുരീതിയിലും ഇതുകാണാം:



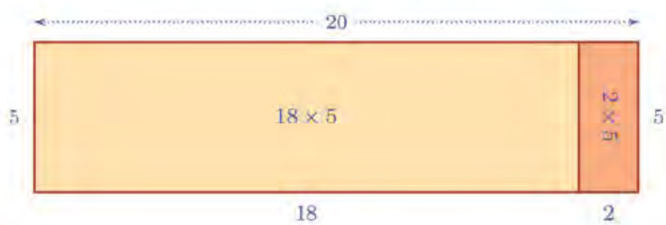


അതായത്,

$$\begin{aligned} 18 \times 5 &= (20 - 2) \times 5 \\ &= (20 \times 5) - (2 \times 5) \\ &= 100 - 10 \\ &= 90 \end{aligned}$$

ഇങ്ങനെയും ആലോചിക്കാം: 18×5 നോട് 2×5 കൂട്ടിയാൽ 20×5 ആകുമല്ലോ.

$$(18 \times 5) + (2 \times 5) = (18 + 2) \times 5 = 20 \times 5$$



അപ്പോൾ

$$18 \times 5 = (20 \times 5) - (2 \times 5)$$

ഇതുപോലെ

$$38 \times 5 = (40 - 2) \times 5 = (40 \times 5) - (2 \times 5) = 200 - 10 = 190$$

എന്നും

$$45 \times 8 = 45 \times (10 - 2) = (45 \times 10) - (45 \times 2) = 450 - 90 = 360$$

എന്നുമെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

ഈ രണ്ടു കണക്കുകളിലും ചെയ്തത് എന്താണ്? രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയും മറ്റൊരു സംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം പിരിച്ചെഴുതി കണക്കാക്കിയതുപോലെ, വ്യത്യാസവും സംഖ്യയും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലവും പിരിച്ചെഴുതി കണക്കാക്കാം.

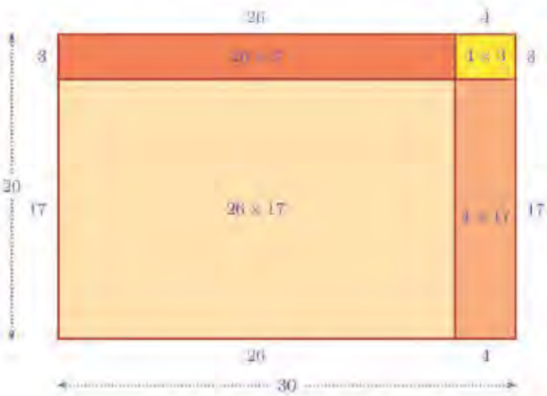
ഇനി രണ്ടു തുകകളുടെ ഗുണനഫലം പിരിച്ചെഴുതി കണക്കാക്കിയതുപോലെ, രണ്ടു വ്യത്യാസങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാൻ കഴിയുമോ എന്നു നോക്കാം.

ഉദാഹരണമായി,

$$26 \times 17 = (30 - 4) \times (20 - 3)$$

എന്നെഴുതാം. ഇതിനെ തുകയുടെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെ നാലു ഗുണനങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതുന്നതെങ്ങനെ?

ഇതു കാണാൻ വശങ്ങളുടെ നീളം 26 ഉം, 17 ഉം ആയ ചതുരത്തിനെ, വശങ്ങളുടെ നീളം 30 ഉം, 20 ഉം ആയ ചതുരമാക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് ആലോചിക്കുന്നതാണ് എളുപ്പം.



ചിത്രത്തിൽനിന്ന്

$$(26 \times 17) + (26 \times 3) + (4 \times 17) + (4 \times 3) = 30 \times 20$$

എന്നു കാണാമല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന്

$$(26 \times 17) = 30 \times 20 - (26 \times 3) - (4 \times 17) - (4 \times 3)$$

എന്നും കണക്കാക്കാം.

ഇനി, സമവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശത്തുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ ഓരോന്നായി കണക്കാക്കാം:

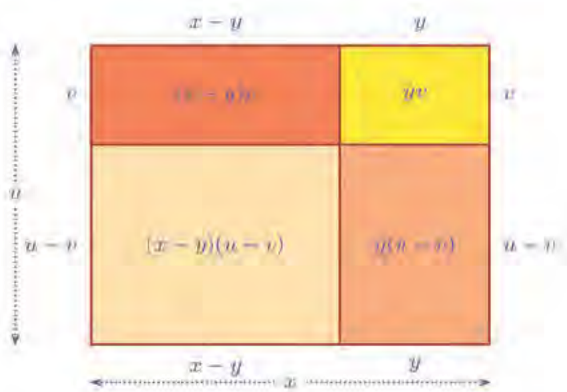
$$\begin{aligned} 30 \times 20 &= 600 \\ 26 \times 3 &= (30 - 4) \times 3 = 90 - 12 = 78 \\ 4 \times 17 &= 4 \times (20 - 3) = 80 - 12 = 68 \\ 4 \times 3 &= 12 \end{aligned}$$

അപ്പോൾ

$$\begin{aligned} (26 \times 17) &= 600 - 78 - 68 - 12 \\ &= 600 - (78 + 68 + 12) \\ &= 600 - 158 \\ &= 442 \end{aligned}$$

ഇത്രയധികം കണക്കുകൂട്ടാതെ ഇതു ചെയ്യാൻ കഴിയുമോ എന്നതാണ് അടുത്ത ചിന്ത. അതിന് സംഖ്യകൾ ഇല്ലാതെ ബീജഗണിതരീതിയിൽ ചിന്തിച്ചു നോക്കാം.

$(x - y)(u - v)$ എന്നതിനെ എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതും എന്നതാണ് പ്രശ്നം. മുകളിലെ കണക്കിൽ ചെയ്തപോലെ, വശങ്ങളുടെ നീളം $x - y$, $u - v$ ആയ ചതുരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ നീട്ടി, ഈ നീളങ്ങൾ x, u ആയ ചതുരമാക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം:



ഇതിൽ നിന്ന്

$$(x - y)\,(u - v) + y(u - v) + (x - y)v + yv = xu$$

എന്നു കാണാമല്ലോ.

സമവാക്യത്തിന്റെ ഇടതുവശത്തുള്ള ഗുണനഫലങ്ങളിൽ നടുവിലെ രണ്ടെണ്ണം പിരിച്ചെഴുതിയാൽ

$$(x - y)(u - v) + (yu - yv) + (xv - yv) + yv = xu$$

അതായത്,

$$(x-y)(u-v) + yu - yv + xv = xu$$

ഇതനുസരിച്ച്, $(x-y)$ $(u-v)$ യെ xu ആക്കാൻ, xv യും yu യും കൂട്ടി, yv കുറച്ചു (ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് ഇതു കാണാൻ കഴിയുന്നുണ്ടോ ?).

അപ്പോൾ xu നെ തിരിച്ച് $(x-y)(u-v)$ ആക്കാൻ, ആദ്യം കൂട്ടിയ xv യും yu യും കുറയ്ക്കണം; കുറച്ച yv കൂട്ടണം. അതായത്

$$(x-y)\,(u-v) = xu - xv - yu + yv$$

അങ്ങനെ ഗുണനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ഒരു പൊതുതത്വം കൂടിയായി :

> $x > y$, $u > v$ ആയ ഏതു അധിസംഖ്യകളെടുത്താലും
>
> $(x-y)(u-v) = xu - xv - yu + yv$

ഇതുപയോഗിച്ച് നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ കണക്ക് കുറെക്കൂടി എളുപ്പമാക്കാം:

$$\begin{aligned} 26 \times 17 &= (30-4) \times (20-3) \\ &= (30 \times 20) - (30 \times 3) - (4 \times 20) + (4 \times 3) \\ &= 600 - 90 - 80 + 12 \\ &= 612 - 170 \end{aligned}$$

612 ൽ നിന്ന് 170 കുറയ്ക്കാൻ 200 കുറച്ച്, 30 കൂട്ടുകയാണല്ലോ എളുപ്പം

$$26 \times 17 = 612 - 200 + 30 = 442$$

ഇതുപോലെ ചുവടെയുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

(i) 38×49 (ii) 47×99 (iii) 29×46 (iv) $9\frac{1}{2} \times 19\frac{1}{2}$

മറ്റൊരു കണക്കു നോക്കാം

രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അറിയാമെങ്കിൽ, അവയുടെ തൊട്ടടുത്ത സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കിയത് ഓർമ്മയുണ്ടല്ലോ? തുകകളുടെ ഗുണനത്തിന്റെ ബീജഗണിത സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ചാണ് ഇതു ചെയ്തത്. അതുപോലെ, തൊട്ടു പുറകിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാൻ, വ്യത്യാസങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സമവാക്യം ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി,

$$\begin{aligned} 29 \times 49 &= (30 - 1) \times (50 - 1) \\ &= (30 \times 50) - (30 \times 1) - (50 \times 1) + (1 \times 1) \\ &= 1500 - 30 - 50 + 1 \\ &= 1500 - 80 + 1 \\ &= 1421 \end{aligned}$$

ഇവിടെ ഉപയോഗിച്ച ക്രിയകളെ പൊതുതത്വമായി പറയാം:

$$(x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1$$

ഇത് ഇങ്ങനെ മാറ്റി എഴുതാമല്ലോ:

$$(x - 1)(y - 1) = xy - (x + y) + 1$$

അതായത്, രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അറിയാമെങ്കിൽ, തൊട്ടു പുറകിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കണക്കാക്കാൻ, ആദ്യത്തെ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിൽനിന്ന് തുക കുറച്ച്, ഒന്നും കൂടി കൂട്ടിയാൽ മതി.

മറിച്ച്, രണ്ടു എണ്ണൽസംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നിന്റെയും തൊട്ടു മുമ്പിലുള്ള സംഖ്യകളുടെയും, തൊട്ടു പുറകിലുള്ള സംഖ്യകളുടെയും ഗുണനഫലമറിഞ്ഞാൽ, സംഖ്യകളുടെതന്നെ ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാനും ഈ സമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, തൊട്ടു മുമ്പിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 525, തൊട്ടു പുറകിലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 437.

സംഖ്യകൾ x, y എന്നെടുത്താൽ

$$(x + 1)(y + 1) = 525$$

$$(x - 1)(y - 1) = 437$$

അതായത്

$$xy + x + y + 1 = 525$$

$$xy - (x + y) + 1 = 437$$

ഈ രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളും കൂട്ടിയാൽ

$$2xy + 2 = 962$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$xy = \frac{1}{2}\ (962 - 2) = 480$$

സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കിട്ടിയല്ലോ.

മുകളിലെ സമവാക്യങ്ങൾ കൂട്ടുന്നതിനു പകരം, ആദ്യത്തേതിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തേത് കുറച്ചാലോ ?

$$2(x + y) = 88$$

അപ്പോൾ,

$$x + y = 44$$

അങ്ങനെ സംഖ്യകളുടെ തുകയും കിട്ടി.

ഗുണനഫലവും തുകയും കിട്ടിയാൽ വ്യത്യാസവും കണക്കാക്കാമല്ലോ.

$$(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$$

എന്ന സമവാക്യം എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടത് ഓർക്കുക.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ കണക്കിൽ

$$\begin{aligned}(x - y)^2 &= 44^2 - (4 \times 480)\\ &= (4^2 \times 11^2) - (4^2 \times 120)\\ &= (4^2 \times 121) - (4^2 \times 120)\\ &= 4^2\end{aligned}$$

അതായത്,

$$x - y = 4$$

തുകയും വ്യത്യാസവും അറിഞ്ഞാൽ സംഖ്യകളും കണക്കാക്കാം (**സമവാക്യജോടികൾ** എന്ന പാഠം).

$$x = \frac{1}{2}\ (44 + 4) = 24$$

$$y = \frac{1}{2}\ (44 - 4) = 20$$

(1) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 40 സെന്റിമീറ്ററും, പരപ്പളവ് 70 ചതുരശ്ര സെന്റിമീറ്ററുമാണ്. നീളവും വീതിയും ഇതിനേക്കാൾ 3 സെന്റിമീറ്റർ കുറവായ ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും ഒരു മീറ്റർ വീതം കുറച്ചാൽ, പരപ്പളവ് 741 ചതുരശ്ര മീറ്ററാകും; ഒരു മീറ്റർ വീതം കൂട്ടിയാൽ 861 ചതുരശ്രമീറ്ററും

(i) ചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ?

(ii) ചുറ്റളവ് എത്രയാണ് ?

(iii) നീളവും വീതിയും എത്രയാണ് ?

(3) രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഓരോന്നിനോടും ഒന്നു കൂട്ടി ഗുണിച്ചപ്പോൾ 1271 ഉം, ഒന്നു കുറച്ച് ഗുണിച്ചപ്പോൾ 1131 ഉം കിട്ടി.

(i) സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എത്രയാണ് ?

(ii) സംഖ്യകളുടെ തുക എത്രയാണ് ?

(iii) സംഖ്യകൾ ഏതൊക്കെയാണ് ?

(4) രണ്ട് ഒറ്റസംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നിന്റെയും തൊട്ടുമുമ്പിലുള്ള ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 285 ഉം, തൊട്ടുപുറകിലുള്ള ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 165 ഉം ആണ്. സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ്?

രണ്ടു തുകകളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ചും, രണ്ടു വ്യത്യാസങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കുറിച്ചുമുള്ള സർവസമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടല്ലോ. തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിന്റെയും ഗുണനഫലമോ ?

അതായത്, $(x+y)(u-v)$ എങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതും ?

ബീജഗണിതത്തിൽത്തന്നെ തുടരാം; ആദ്യം ഇങ്ങനെ പിരിച്ചെഴുതാം:

$$(x+y)(u-v) = x(u-v) + y(u-v)$$

ഇനി വലതുവശത്തെ ഓരോ ഗുണനഫലത്തെയും ഓരോന്നായി പിരിച്ചെഴുതാം:

$$x(u-v) = xu - xv$$

$$y(u-v) = yu - yv$$

അപ്പോൾ $(x+y)(u-v) = xu - xv + yu - yv$

x, y, u, v എന്ന ഏതു നാലു അധിസംഖ്യകളിലും, $u > v$ ആണെങ്കിൽ

$$(x+y)(u-v) = xu - xv + yu - yv$$

ഉദാഹരണമായി 14×59 ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം,

$$\begin{aligned} 14 \times 59 &= (10 + 4) \times (60 - 1) \\ &= 600 - 10 + 240 - 4 \\ &= 590 + 236 \\ &= 826 \end{aligned}$$

ഇതുപോലെ ഈ കണക്കുകൾ ചെയ്തുനോക്കൂ.

(i) 52×19 (ii) 101×48 (iii) 97×102 (iv) $9\frac{3}{4} \times 20\frac{1}{2}$

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലവും തുകയും ഉപയോഗിച്ച്, ഓരോന്നിനോടും ഒന്നു കൂട്ടിയാലോ, ഒന്നു കുറച്ചാലോ കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചത് ഓർമ്മയുണ്ടല്ലോ. ഒരു സംഖ്യയോട് ഒന്നു കൂട്ടുകയും മറ്റേ സംഖ്യയിൽനിന്ന് ഒന്നു കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താലോ ?

8 ഉം 5 ഉം എടുത്ത് പരിശോധിക്കാം.

$$\begin{aligned} 8 \times 5 &= 40 \\ (8 + 1) \times (5 - 1) = 9 \times 4 &= 36 \\ (8 - 1) \times (5 + 1) = 7 \times 6 &= 42 \end{aligned}$$

മറ്റു സംഖ്യകൾ എടുത്തു നോക്കൂ. പൊതുവായി എന്തു പറയാം ?

വലിയ സംഖ്യ ഒന്നു കൂട്ടുകയും, ചെറിയ സംഖ്യ ഒന്നു കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ ഗുണനഫലം കൂടുന്നോ, കുറയുന്നോ ?

മറിച്ചായാലോ ?

ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ചു നോക്കാം. വലിയ സംഖ്യ x എന്നും, ചെറിയ സംഖ്യ y എന്നും എടുക്കാം. വലിയ സംഖ്യ ഒന്നു കൂട്ടി, ചെറിയസംഖ്യ ഒന്നു കുറച്ചാൽ, ഗുണനഫലം

$$(x + 1)(y - 1) = xy - x + y - 1$$

അതായത്, ആദ്യത്തെ ഗുണനഫലത്തിൽനിന്ന് വലിയ സംഖ്യ x കുറച്ചു, ചെറിയ സംഖ്യ y കൂട്ടി; അപ്പോൾത്തന്നെ ഗുണനഫലം കുറഞ്ഞുവല്ലോ. കൂടാതെ ഒരു ഒന്നും കുറച്ചിട്ടുണ്ട്. പുതിയ ഗുണനഫലം കുറഞ്ഞില്ലേ ?

ഇനി മറിച്ചായാലോ ?

$$(x - 1)(y + 1) = xy + x - y - 1$$

കൂട്ടിയത് വലിയ സംഖ്യ x; കുറച്ചത് ചെറിയ സംഖ്യ y അങ്ങനെ ഗുണനഫലം കൂടി. പക്ഷേ ഒരു ഒന്നും കൂടി കുറച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ ?

ഇവിടെ പുതിയ ഗുണനഫലം പല തരത്തിലാകാം:

- അടുത്തടുത്ത സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഗുണനഫലത്തിൽ മാറ്റമില്ല.
- അടുത്തടുത്തല്ലാത്ത, വ്യത്യസ്ത സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ഗുണനഫലം കൂടും.

ഇപ്പറഞ്ഞ കാര്യങ്ങളുടെയെല്ലാം കാരണങ്ങൾ ആലോചിക്കൂ.

(1) രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 713 ഉം, വ്യത്യാസം 8 ഉം ആണ്

(i) വലിയ സംഖ്യയോട് 1 കൂട്ടിയതും, ചെറിയ സംഖ്യയിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

(ii) വലിയ സംഖ്യയിൽനിന്ന് 1 കുറച്ചതും, ചെറിയ സംഖ്യയോട് 1 കൂട്ടിയതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

(2) രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ വലുതിനോട് 1 കൂട്ടിയതും, ചെറുതിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം, സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തേക്കാൾ 5 കുറവാണ്. വലുതിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ച്, ചെറുതിനോട് 1 കൂട്ടി ഗുണിച്ചാൽ ഗുണനഫലം സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെക്കാൾ എത്ര കൂടും ?

(3) രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ, വലുതിനോട് 1 കൂട്ടിയതും, ചെറുതിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം 540; വലുതിൽനിന്ന് 1 കുറച്ചതും, ചെറുതിനോട് 1 കൂട്ടിയതും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലം 560

(i) സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എന്താണ് ?

(ii) സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്താണ് ?

(iii) സംഖ്യകൾ എന്തൊക്കെയാണ് ?

(4) ഒരു ചതുരത്തിന്റെ നീളം 3 മീറ്റർ കൂട്ടുകയും, വീതി 2 മീറ്റർ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ, പരപ്പളവ് 10 ചതുരശ്രമീറ്റർ കുറയും. നീളം 2 മീറ്റർ കുറയ്ക്കുകയും, വീതി 3 മീറ്റർ കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ, പരപ്പളവ് 30 ചതുരശ്രമീറ്റർ കൂടും. ചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കണക്കാക്കുക.