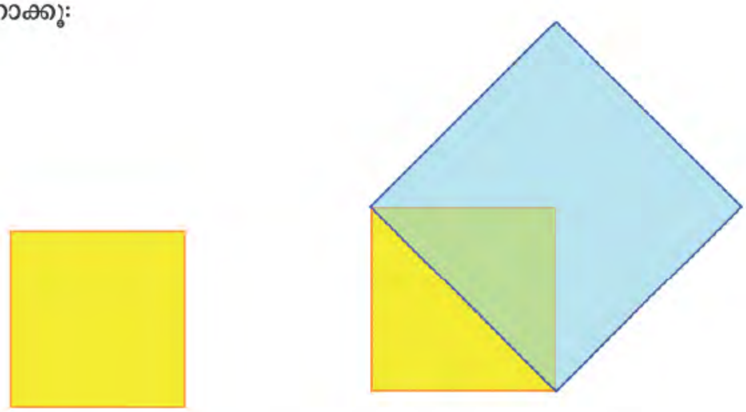
2

പുതിയ സംഖ്യകൾ

നീളങ്ങളും സംഖ്യകളും

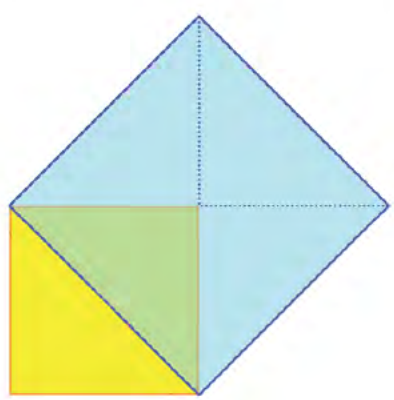
ഈ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കൂ:



ഒരു സമചതുരവും, അതിന്റെ വികർണ്ണത്തിൽ മറ്റൊരു സമചതുരവും.

വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ എത്ര മടങ്ങാണ് ?

വികർണ്ണം ചെറിയ സമചതുരത്തെ ഒരേ വലുപ്പമുള്ള രണ്ടു മട്ടത്രികോണങ്ങളാക്കുന്നുണ്ടല്ലോ. ഇത്തരം എത്ര മട്ടത്രികോണങ്ങൾ ചേർന്നതാണ് വലിയ സമചതുരം ?



അപ്പോൾ ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ് വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്.

ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ പരപ്പളവ് 1 ചതുരശ്രമീറ്റർ, വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 2 ചതുരശ്രമീറ്റർ.

വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്?

അത് ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണം ആയതിനാൽ 1 മീറ്ററിനേക്കാൾ കൂടുതലാണ്.

രണ്ടു വശങ്ങൾ 1 മീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാം വശം ആയതിനാൽ 2 മീറ്ററിനേക്കാൾ കുറവുമാണ്.

ഒന്നിനും രണ്ടിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഭിന്നസംഖ്യ ആകാം; പക്ഷേ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് രണ്ടു ചതുരശ്രമീറ്ററായതിനാൽ, വശത്തിന്റെ നീളമായ ഈ സംഖ്യയുടെ വർഗം രണ്ടാകണം.

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് രണ്ട്?

ഒന്നരയാകുമോ?

$$\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + 1 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$$

അത് കൂടുതലാണ്; ഒന്നേകാൽ ആയാലോ?

$$\left(1\frac{1}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = 1\frac{9}{16}$$

അത് കുറഞ്ഞും പോയി.

ഒന്നും മൂന്നിലൊന്നും ആയാലോ ?

$$\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{9} = 1\frac{7}{9}$$

അതും കുറവ് തന്നെ; പക്ഷേ ഒന്നേകാലിനേക്കാൾ മെച്ചമാണ്.

ഇങ്ങനെ പല ഭിന്നസംഖ്യകൾ പരിശോധിച്ചാലും, വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുമെന്നല്ലാതെ കൃത്യം 2 കിട്ടില്ല. ബീജഗണിതം ഉപയോഗിച്ച്, ഇതു സാധിക്കില്ലെന്നു തെളിയിക്കുകയും ചെയ്യാം (പാഠത്തിന്റെ അവസാനം ചേർത്തിരിക്കുന്ന അനുബന്ധം നോക്കുക).

അതായത്,

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല.

അപ്പോൾ നമ്മുടെ ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നം എന്തായി?

വശങ്ങളെല്ലാം 1 മീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം ഒരു മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 2 ആകണം (വശങ്ങളുടെ നീളം ഭിന്നസംഖ്യയായാലും പരപ്പളവ് അതിന്റെ വർഗമാണെന്ന് കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ).

പക്ഷേ, വർഗം 2 ആയ ഭിന്നസംഖ്യ ഇല്ല.

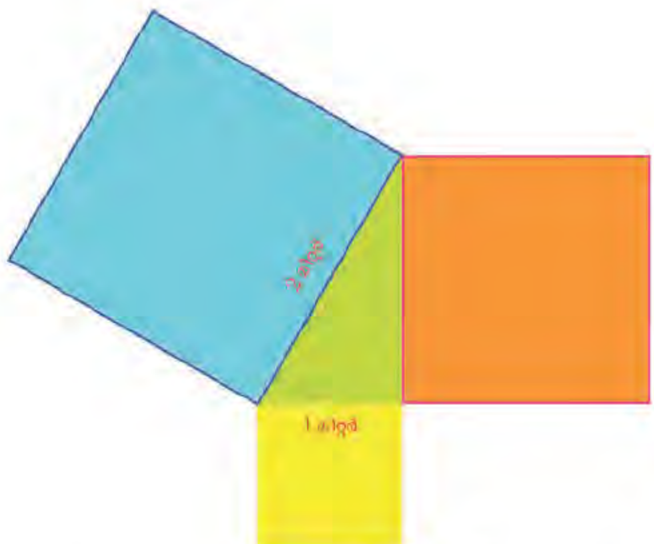
അതായത്,

വശങ്ങളുടെയെല്ലാം നീളം 1 ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ എണ്ണൽസംഖ്യകളോ ഭിന്നസംഖ്യകളോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ പല തുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ ആയ സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം എത്ര യാണെന്നു നോക്കാം:

ത്രികോണത്തെ ഉയരത്തിലൂടെ മുറിച്ച് ഒരു ഭാഗം എടുത്താൽ ഒരു മട്ടത്രികോണം കിട്ടുമല്ലോ:

ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശം കണക്കാക്കാൻ, വശങ്ങളിലെല്ലാം സമചതുരങ്ങൾ വരച്ചുനോക്കാം:



പൈഥഗറസ് തത്വമനുസരിച്ച് ഓറഞ്ച് സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ്, $4 - 1 = 3$ ചതുരശ്രമീറ്ററാണ്.

അപ്പോൾ അതിന്റെ നീളം 1 മീറ്ററിന്റെ ഭിന്നസംഖ്യാമടങ്ങാണെങ്കിൽ, ആ ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 3 ആകണം.

ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ലെന്നു കണ്ടതുപോലെത്തന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 3 അല്ലെന്നും കാണാം. അതായത്, ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായും പറയാൻ കഴിയില്ല.

മറ്റൊരു ഉദാഹരണം നോക്കാം: വ്യാപ്തം 2 ഘനസെന്റിമീറ്ററായ ഒരു സമചതുരക്കട്ട ഉണ്ടാക്കണമെന്നു കരുതുക. ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം എന്തായിരിക്കണം ? ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നതുപോലെതന്നെ, ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും മൂന്നാംകൃതിയും 2 അല്ല. അപ്പോൾ ഈ സമചതുരക്കട്ടയുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയില്ല.

ഇങ്ങനെ പല സന്ദർഭങ്ങളിലും ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരും.

സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നത്

എന്തിനേയും അളന്ന് സംഖ്യയാക്കുക; ഈ സംഖ്യകളിലൂടെയും അവയുടെ പരസ്പരബന്ധ ങ്ങളിലൂടെയും ലോകത്തെ മനസ്സിലാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക. ഇതാണ് ഗണിതത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ധർമ്മം.

അളക്കപ്പെടുന്നതിന്റെ സ്വഭാവം മാറുന്നതിനനുസ രിച്ച് വ്യത്യസ്ത തരത്തിലുള്ള സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കേ ണ്ടി വരും. പ്രകൃതിയിൽ നിന്ന് നേരിട്ട് കിട്ടുന്നതു മാത്രം ഭക്ഷിച്ചു നടന്നിരുന്ന കാലത്ത് മനുഷ്യന് കൂട്ടത്തിലെ ആളുകളുടെ എണ്ണം, വളർത്തുന്ന കന്നുകാലികളുടെ എണ്ണം തുടങ്ങിയവ മാത്രമേ ആവശ്യമായിരുന്നുള്ളു. അക്കാലത്ത് എണ്ണൽ സംഖ്യകൾ മാത്രം മതിയായിരുന്നു.

ബി.സി.ഇ. അയ്യായിരത്തോടടുപ്പിച്ച്, നദീതീര ങ്ങളിൽ സ്ഥിരമായി താമസിച്ചുകൊണ്ട് വ്യാപ കമായ കൃഷി തുടങ്ങിയതോടെ, കൃഷിയിടങ്ങൾ തിട്ടപ്പെടുത്താനും, പാർപ്പിടങ്ങൾ പണിയാനു മെല്ലാം പലതരത്തിലുള്ള നീളവും പരപ്പുമെല്ലാം അളക്കേണ്ടതായി വന്നു. ഇക്കാലത്താണ് ഭിന്ന സംഖ്യകൾ എന്ന സങ്കേതം ഉണ്ടായത്. പങ്കു വയ്ക്കുമ്പോഴും ഭിന്നസംഖ്യകൾ ആവശ്യമുണ്ടല്ലോ. എല്ലാ അളവുകളേയും ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാൻ കഴിയില്ല എന്ന തിരിച്ചറിവിൽ നിന്നാണ് പുതിയതരം സംഖ്യകൾ ആവശ്യ മായി വന്നത്.

പിൽക്കാലത്ത് ഭൗതികമായ ആവശ്യങ്ങൾക്ക ല്ലാതെ ഗണിതത്തിന്റെ തന്നെ സൗകര്യങ്ങൾ ക്കായും പുതിയതരം സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കപ്പെട്ടു. ന്യൂനസംഖ്യകൾ, സങ്കീർണ്ണസംഖ്യകൾ (Complex numbers) എന്നിവ ഇങ്ങനെ ഉണ്ടായവയാണ്. ഇത്തരം സംഖ്യകൾ ഭൗതികശാസ്ത്രം പോലുള്ള മറ്റു ശാസ്ത്രങ്ങളിൽ വളരെയധികം ഉപയോഗിക്ക പ്പെടുന്നുണ്ട് എന്നത് മറ്റൊരു കാര്യം.

അളവുകളും സംഖ്യകളും

എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയി പറയാൻ കഴിയാത്ത നീളങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ പുതിയ സംഖ്യകളുണ്ടാക്കണം. നമ്മുടെ ആദ്യത്തെ ഉദാഹര ണം തന്നെയെടുക്കുക. വശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം ?

ഈ ചോദ്യം ഇങ്ങനെയും ചോദിക്കാം: പരപ്പളവ് 2 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം എങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കാം ?

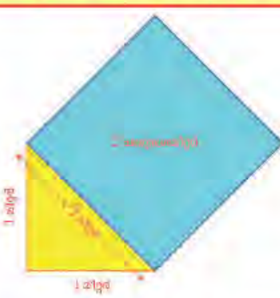
വശം എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആയ സമചതുരമാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ നീളം പരപ്പളവി ന്റെ വർഗമൂലമാണല്ലോ.

ഉദാഹരണമായി, പരപ്പളവ് 4 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{4} = 2$ മീറ്റർ;

പരപ്പളവ് $2\frac{1}{4}$ ചതുരശ്രമീറ്റർ ആണെങ്കിൽ, വശത്തി ന്റെ നീളം $\sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}$ മീറ്റർ

ഇതുപോലെ,

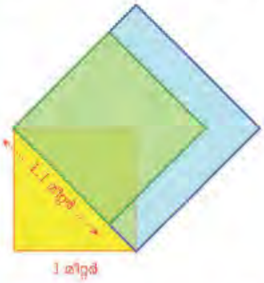
പരപ്പളവ് 2 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയ സമചതുരത്തി ന്റെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം.

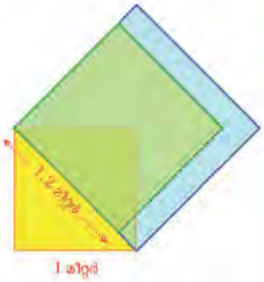


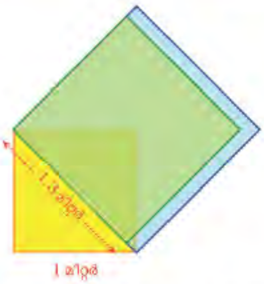
നീളത്തെ സൂചിപ്പിക്കാൻ ഒരു ചിഹ്നം കൊടുത്തതുകൊണ്ടായില്ലല്ലോ; അതിന്റെ വലുപ്പം മനസ്സിലാ ക്കാൻ, അറിയാവുന്ന നീളങ്ങളുമായി ഒത്തുനോക്കണ്ടേ ?

അതിനുള്ള വഴി, ഈ നീളത്തോട് അടുത്തടുത്തുവരുന്ന, ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയുന്ന നീളങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക എന്നതാണ്. ഇത്തരം നീളങ്ങൾ വികർണ്ണത്തിൽത്തന്നെ എടുത്താൽ ഇവ വശങ്ങളായ സമചതുരങ്ങൾ, വികർണ്ണം വശമായ സമചതുരത്തോട് അടുക്കുമല്ലോ:

ഇങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്തിയത് നോക്കൂ.







സംഖ്യകൾ മാത്രമായി പറഞ്ഞാൽ, ഈ വരകളുടെ നീളങ്ങളായ ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരും. കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ച് ഈ വർഗങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം:

$$1.1^2 = 1.21$$

$$1.2^2 = 1.44$$

$$1.3^2 = 1.69$$

$$1.4^2 = 1.96$$

$$\mathbf{1.5^2 = 2.25}$$

ഇവിടെ കണ്ടത് എന്താണ്?

$$1.4^2 < 2 < 1.5^2$$

വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്ത് വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി കുറേക്കൂടി വ്യക്തമാക്കാം.

എണ്ണൽസംഖ്യകൾ മാത്രമെടുത്താൽ

$$1^2 < 2 < 2^2$$

പത്തിലൊന്നുകളും കൂടി എടുത്താലോ?

തകരുന്ന വിശ്വാസങ്ങൾ

എല്ലാ അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് താരതമ്യം ചെയ്യാം എന്നായിരുന്നു ബി.സി.ഇ. ആറാം നൂറ്റാണ്ടിലെ പൈഥാഗറസിന്റേയും ശിഷ്യരുടേയും വിശ്വാസം. കുറേക്കൂടി കൃത്യമായിപ്പറഞ്ഞാൽ, ഏതു രണ്ട് അളവുകളേയും എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാം എന്നതാണ് ഈ വിശ്വാസം. എന്നാൽ, ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റേയും വശത്തിന്റേയും നീളം തമ്മിലുള്ള അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് എഴുതാൻ സാധ്യമല്ല. ഈ അംശബന്ധം എണ്ണൽസംഖ്യകൾ കൊണ്ട് $a : b$ എന്നെഴുതണമെങ്കിൽ, വികർണ്ണത്തിന്റെ നീളം വശത്തിന്റെ $\frac{a}{b}$ മടങ്ങാകണം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ വികർണ്ണത്തിന്റെ വർഗം വശത്തിന്റെ വർഗത്തിന്റെ $\left(\frac{a}{b}\right)^2$ മടങ്ങാകണം. വികർണ്ണത്തിലെ സമചതുരം, വശത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങായതിനാൽ $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$ ആകണം. ഇതു സാധ്യമല്ല എന്നു കണ്ടല്ലോ.

പൈഥാഗറസിന്റെ തന്നെ ശിഷ്യനായ ഹിപ്പാസസ് ആണ് ഈ വസ്തുത കണ്ടെത്തിയതെന്നാണ് കരുതപ്പെടുന്നത്.

സമചതുരത്തിന്റെ വികർണ്ണവും വശവും പോലെ, എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് താരതമ്യം ചെയ്യാൻ കഴിയാത്ത അളവുകളെ ഒരുമിച്ചളക്കാൻ കഴിയാത്ത അളവുകൾ (incommensurable magnitudes) എന്നാണ് പറയുന്നത്.

$$\left(1\frac{4}{10}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{5}{10}\right)^2$$

നൂറിലൊന്നുകളും കൂടി എടുത്താലോ ?

$$1.41^2 = 1.9881$$

$$1.42^2 = 2.0164$$

അപ്പോൾ

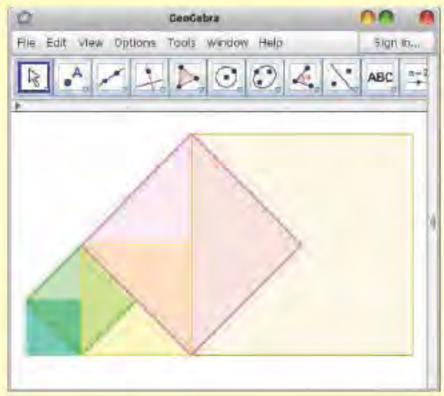
$$1.41^2 < 2 < 1.42^2$$

അഥവാ

$$\left(1\frac{41}{100}\right)^2 < 2 < \left(1\frac{42}{100}\right)^2$$

ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ

$1.4^2 = 1.96$	$1.5^2 = 2.25$
$1.41^2 = 1.9881$	$1.42^2 = 2.0164$
$1.414^2 = 1.999396$	$1.415^2 = 2.002225$
$1.4142^2 = 1.99996164$	$1.4143^2 = 2.00024449$
$1.41421^2 = 1.9999899241$	$1.41422^2 = 2.0000182084$



ചിത്രത്തിൽ ഏറ്റവും ചെറിയ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം 1 സെന്റിമീറ്ററാണ്. ഏറ്റവും വലിയ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും ഒരു വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക. ഇത്തരം ഒരു ചിത്രം ജിയോജിബ്രയിൽ വരയ്ക്കുക (Regular polygon ടൂൾ ഉപയോഗിക്കാം). Area ഉപയോഗിച്ച് ഓരോ സമചതുരത്തിന്റെയും പരപ്പളവ് കണക്കാക്കി നോക്കൂ. ഇതിൽ ഏതൊക്കെ സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങളാണ് ഭിന്നസംഖ്യയായി പറയാൻ കഴിയുന്നവ ?

എന്നെല്ലാം കാണാം. അതായത്, അഞ്ചു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ (ലക്ഷത്തിലൊന്നുകൾ വരെ) എടുത്താൽ

$$1.41421^2 < 2 < 1.41422^2$$

ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ

$1\frac{4}{10}, 1\frac{41}{100}, 1\frac{414}{1000}, 1\frac{4142}{10000}, 1\frac{41421}{100000}$ എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു.

ദശാംശരൂപങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു പറഞ്ഞാൽ,

1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421 എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 2 നോട് അടുത്തടുത്ത് വരുന്നു.

ഇക്കാര്യം ചുരുക്കിയെഴുതുന്നത് ഇങ്ങനെയാണ്.

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$

അപ്പോൾ $\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയെ, ഒരു ദശാംശസ്ഥാനം മാത്രമെടുത്താൽ 1.4, രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെയെടുത്താൽ 1.41, എന്നിങ്ങനെ പറയാം.

അടുത്തടുത്ത്

$$2 - 1.4^2 = 0.04$$

$$2 - 1.41^2 = 0.0119$$

$$2 - 1.414^2 = 0.000604$$

$$2 - 1.4142^2 = 0.00003836$$

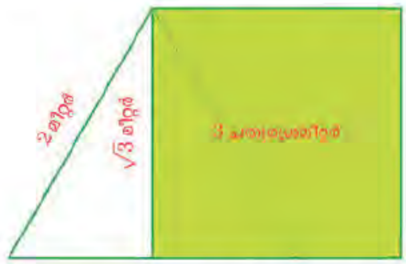
$$2 - 1.41421^2 = 0.000010075 9$$

ഇതെഴുതുന്നത്.

$$\sqrt{2} \approx 1.4$$
$$\sqrt{2} \approx 1.41$$

എന്നൊക്കെയാണ്. ഇതിൽ ≈ എന്ന ചിഹ്നത്തിന്റെ അർഥം, ഏകദേശം തുല്യം എന്നാണ്.

ഇതുപോലെ, വശങ്ങളെല്ലാം 2 മീറ്റർ ആയ ത്രികോണത്തിന്റെ ഉയരം വശമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് 3 ചതുരശ്രമീറ്റർ ആയതിനാൽ, ഈ ഉയരത്തെ $\sqrt{3}$ എന്നെഴുതാം.



നേരത്തെ ചെയ്തതുപോലുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകളിലൂടെ, 1.7, 1.73, 1.732, ... എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ 3 നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നു എന്നും കാണാം. ഇക്കാര്യം ചുരുക്കി ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$\sqrt{3} = 1.73205...$$

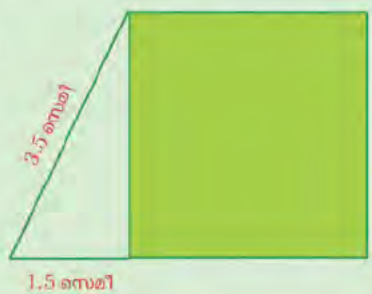
പൊതുവേ പറഞ്ഞാൽ,

> x ഏത് അധിസംഖ്യ ആയാലും, പരപ്പളവ് x ആയ സമചതുരത്തിന്റെ വശത്തിന്റെ നീളമാണ് $\sqrt{x}$.

ചിലപ്പോൾ $\sqrt{x}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയോ ഭിന്നസംഖ്യയോ ആകാം; അല്ലെങ്കിൽ, വർഗം x നോട് അടുത്തുവരുന്ന, ദശാംശരൂപത്തിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കി, $\sqrt{x}$ നെ ദശാംശരൂപത്തിലെഴുതാം.

(1) ഏത് ഒറ്റസംഖ്യയെയും രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി എഴുതാമെന്ന് എട്ടാം ക്ലാസിൽ കണ്ടല്ലോ. ഇതുപയോഗിച്ച്, 7 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ, 11 ചതുരശ്രസെന്റിമീറ്റർ എന്നീ പരപ്പളവുകളുള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവയുടെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ് ?

(2) ചിത്രത്തിലെ സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ് ? ഒരു വശത്തിന്റെ നീളമോ ?



വരയും വർഗമൂലവും

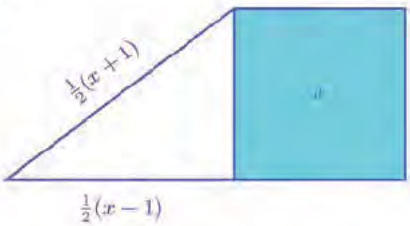
x ഏതു സംഖ്യയായാലും

$$(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$$

(എട്ടാം ക്ലാസിൽ വർഗങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ). ഇത് ഇങ്ങനെ മാറ്റിയെഴുതാം

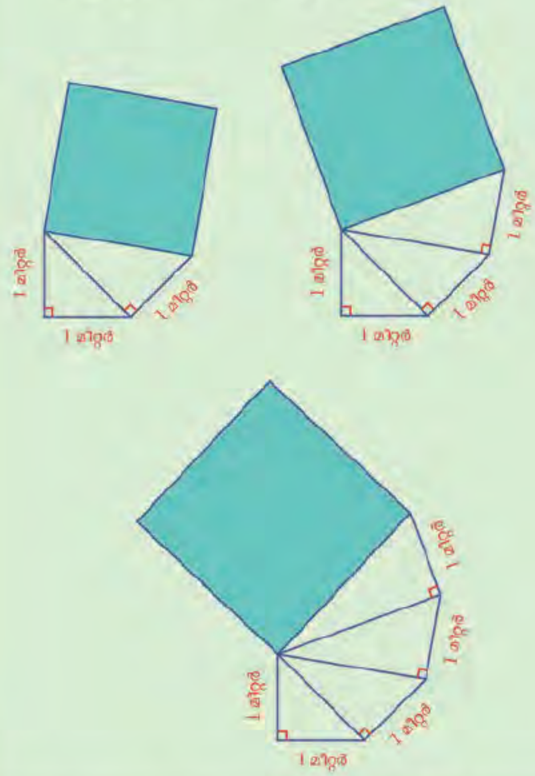
$$x = \left(\frac{1}{2}(x+1)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^2$$

ഇതുപയോഗിച്ച്, പരപ്പളവ് $x > 1$ ആയ സമചതുരം വരയ്ക്കാം :



$x < 1$ ആണെങ്കിൽ താഴത്തെ വശം $\frac{1}{2}(1-x)$ ആയി എടുക്കണം.

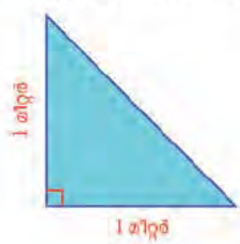
(3) ചുവടെയുള്ള ഓരോ ചിത്രത്തിലെയും സമചതുരത്തിന്റെ പരപ്പളവും, വശത്തിന്റെ നീളവും കണക്കാക്കുക.



(4) $\sqrt{2}$ നേക്കാൾ വലുതും, $\sqrt{3}$ നേക്കാൾ ചെറുതുമായ മൂന്നു ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

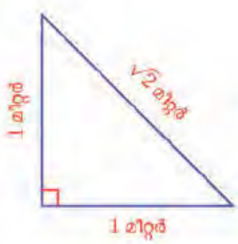
കൂട്ടലും കുറയ്ക്കലും

ലംബവശങ്ങളുടെ നീളം 1 മീറ്ററായ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവെത്രയാണ്?



ചുറ്റളവോ?

ഇതിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{2}$ മീറ്ററാണല്ലോ.



അപ്പോൾ ചുറ്റളവ് കിട്ടാൻ 2 മീറ്ററും $\sqrt{2}$ മീറ്ററും കൂട്ടണം. ഈ നീളത്തെ $2+\sqrt{2}$ മീറ്റർ എന്നാണ് എഴുതുന്നത്.

$\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142... എന്നിങ്ങനെ തുടരുമല്ലോ.

അപ്പോൾ $2+\sqrt{2}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ, ഇവയോടെല്ലാം 2 കൂട്ടിയതാണ്. അതായത്, 3.4, 3.41, 3.414, 3.4142, ... എന്നീ ഭിന്നസംഖ്യകൾ.

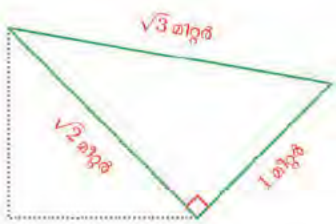
ഇക്കാര്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$2+\sqrt{2} = 3.4142...$$

സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായ അളവ് മതിയെന്നു തീരുമാനിച്ചാൽ ചുറ്റളവ് 3.41 മീറ്റർ എന്നെടുക്കാം. ഇനി അതല്ല, മില്ലിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമാകണമെന്നുണ്ടെങ്കിൽ 3.414 മീറ്റർ എന്നെടുക്കണം.

ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം പാദമാക്കി ഇവിടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ മറ്റൊരു മട്ടത്രികോണമുണ്ടാക്കിയാലോ ?

ഇതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളം $\sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നു കണ്ടല്ലോ.



ദശാംശരൂപങ്ങൾ

ഛേദം 10 ന്റെ കൃതികളാക്കാവുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളെയാണ് ആദ്യം ദശാംശരൂപത്തിൽ എഴുതിയത്.

$$\frac{7}{10} = 0.7, \qquad \frac{21}{100} = 0.21$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0.5, \qquad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0.25$$

തുടർന്ന് അങ്ങനെയല്ലാത്ത ഭിന്നസംഖ്യകൾക്കും മറ്റൊരു തരത്തിലുള്ള ദശാംശരൂപം ഉണ്ടാക്കി.

$$\frac{3}{10}, \frac{33}{100}, \frac{333}{1000}, ...$$

എന്നിങ്ങനെ തുടരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ $\frac{1}{3}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്നതിനാൽ

$$\frac{1}{3} = 0.333...$$

എന്നെഴുതി. ഇതുപോലെ

$$\frac{1}{6} = 0.1666...$$

$$\frac{1}{11} = 0.090909...$$

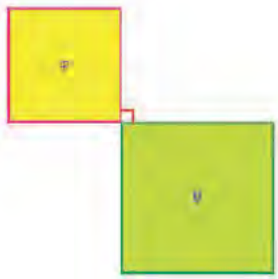
എന്നെല്ലാം കണക്കാക്കാം.

$$\sqrt{2} = 1.41421...$$

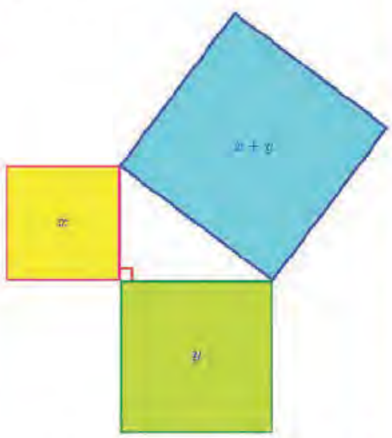
എന്നെഴുതുന്നതും ഇത് പോലെയാണ്, എന്നാൽ ഒരു വ്യത്യാസമുണ്ട്. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{11}$ പോലെയുള്ള ഭിന്നസംഖ്യകളിലൂടെ ദശാംശരൂപങ്ങളിൽ അക്കക്കൂട്ടങ്ങൾ ആവർത്തിക്കുന്നതു കാണാം. എന്നാൽ, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ പോലുള്ള സംഖ്യകളുടെ ദശാംശരൂപങ്ങളിൽ ഇത്തരം ആവർത്തനം ഇല്ല.

തുകയും വർഗമൂലവും

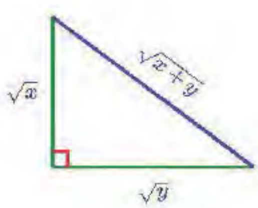
പരപ്പളവുകൾ x, y ആയ രണ്ട് സമചതുരങ്ങൾ ഇങ്ങനെ ചേർത്തു വയ്ക്കുക.



ഇനി മുകളിലെ മൂലകൾ ചേർത്തുവരച്ച്, ഒരു സമചതുരവും കൂടി വരച്ചാലോ? അതിന്റെ പരപ്പളവ് എത്രയാണ്?



നടുവിലെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?



ഇതിൽനിന്ന് എന്തു മനസ്സിലാക്കാം?

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} > \sqrt{x+y}$$

ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ് $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ മീറ്റർ എന്നെഴുതാം.

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടാൻ, ഇവ ഓരോന്നിനോടും ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ക്രമമായി കൂട്ടണം.

1.4	1.41	1.414	...	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$
1.7	1.73	1.732	...	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
3.1	3.14	3.146	...	$\rightarrow$	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$

ഇവയോടെല്ലാം 1 കൂട്ടിയാൽ $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ എന്ന സംഖ്യയോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കിട്ടും.

അപ്പോൾ പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, മില്ലി മീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി 4.146 മീറ്റർ.

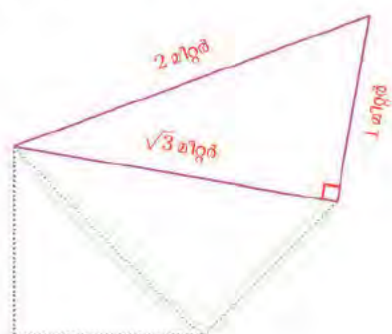
ഈ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, ആദ്യത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

ഏകദേശം $4.146 - 3.414 = 0.732$ മീറ്റർ എന്നു പറയാം; അല്ലെങ്കിൽ ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കാം:

$$(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{3} - 2$$

$$= \sqrt{3} - 1 \approx 0.732$$

ഇനി ഈ ത്രികോണത്തിന്റെയും മുകളിൽ ഇതുപോലെ മറ്റൊരു ത്രികോണം വരച്ചാലോ? അതിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്താണ്?



ഇതിന്റെ ചുറ്റളവ്, രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവിനേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

പുതിയ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്, $2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$ മീറ്റർ. ഇതിനോട് ഏകദേശം തുല്യമായ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കാതെ തന്നെ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണെന്ന് നോക്കാം.

രണ്ടാമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്രയാണ്?

അപ്പോൾ ചുറ്റളവിന്റെ വ്യത്യാസം

$$(3 + \sqrt{3}\ ) - (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}\ ) = 2 - \sqrt{2}$$

ഇത് മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായി

$$2 - 1.414 = 0.586$$

എന്നു കണക്കാക്കാം. അതായത്, ചുറ്റളവ് ഏകദേശം 586 മില്ലിമീറ്റർ, അഥവാ 58.6 സെന്റിമീറ്റർ കൂടുതലാണ്.

വ്യവകലനം

$\sqrt{3} + \sqrt{2}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകൾ കണക്കാക്കിയതുപോലെ, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ നോട് അടുത്തടുത്തു വരുന്ന ഭിന്നസംഖ്യകളും കണക്കാക്കാം.

1.7	1.73	1.732	...	$\rightarrow$	$\sqrt{3}$
1.4	1.41	1.414	...	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$
0.3	0.32	0.318	...	$\rightarrow$	$\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} \approx 0.318$$

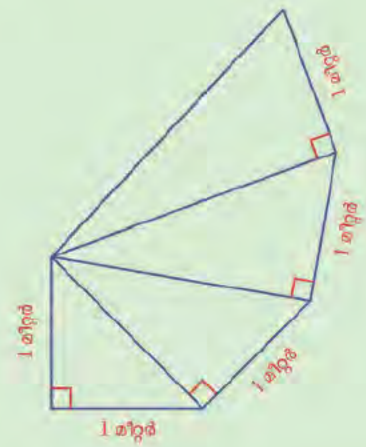
(1) ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണം $1\frac{1}{2}$ മീറ്ററും, മറ്റൊരു വശം $\frac{1}{2}$ മീറ്ററുമാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റളവ്, സെന്റിമീറ്റർ വരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

(2) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിനെ ഒരു മൂലയിലൂടെ മുറിച്ച് രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കിയതാണ് ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്.

(i) ഇവയിലൊന്നിന്റെ ചുറ്റളവ് എത്ര മീറ്ററാണ്?

(ii) മുഴുവൻ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കുറഞ്ഞു?

(3) ചുവടെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ തുടർച്ചയായി മട്ടത്രികോണങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്ന രീതി നേരത്തെ കണ്ടിട്ടുണ്ടല്ലോ:



(i) ഇങ്ങനെ വരയ്ക്കുന്ന പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം എന്തൊക്കെയാണ്?

(ii) പത്താമത്തെ ത്രികോണത്തിന് ഒൻപതാമത്തെ ത്രികോണത്തേക്കാൾ ചുറ്റളവ് എത്ര കൂടുതലാണ്?

(4) ലംബവശങ്ങൾ $\sqrt{2}$ സെന്റിമീറ്റർ, $\sqrt{3}$ സെന്റിമീറ്റർ ആയ മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം എത്രയാണ്? ലംബവശങ്ങളുടെ തുക കർണ്ണത്തേക്കാൾ എത്ര കൂടുതലാണ്?

അനുബന്ധം

ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ല എന്നു തെളിയിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്നു നോക്കാം.

അങ്ങനെ ഒരു ഭിന്നസംഖ്യ ഉണ്ടെങ്കിൽ, അതിന്റെ അംശത്തിന്റെയും ഛേദത്തിന്റെയും പ്രത്യേകതകൾ എന്തൊക്കെയായിരിക്കുമെന്നു നോക്കാം. ഏതു ഭിന്നസംഖ്യയ്ക്കും പല രൂപങ്ങളുള്ളതിൽ, ഏറ്റവും ലഘുവായ ഒരു രൂപമുണ്ടല്ലോ - അതായത്, അംശത്തിനും ഛേദത്തിനും പൊതുവായ ഘടകങ്ങളില്ലാത്ത രൂപം. നാം അന്വേഷിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ (വർഗം 2 ആയ) ഈ രൂപം $\frac{x}{y}$ ആണെന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ x, y ഇവ പൊതുവായ ഘടകങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത സംഖ്യകളാണ്.

മറ്റെന്തൊക്കെയാണ് ഇവയുടെ സവിശേഷതകൾ?

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = 2$$

അതായത്,

$$\frac{x^2}{y^2} = 2$$

ഇതിൽനിന്ന്

$$x^2 = 2y^2$$

എന്നു കിട്ടും. അപ്പോൾ x^2 ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. x ന്റെ കാര്യമോ ?

ഒറ്റ സംഖ്യകളുടെയെല്ലാം വർഗങ്ങളും ഒറ്റസംഖ്യകളാണ്. (ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങൾ ഇരട്ട സംഖ്യകളും). അപ്പോൾ x^2 ഇരട്ടസംഖ്യ ആയതിനാൽ x ഉം ഇരട്ടസംഖ്യതന്നെ.

x, y ഇവയ്ക്ക് പൊതുവായ ഘടകങ്ങളില്ല; x ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. അതിനാൽ y ഇരട്ടസംഖ്യ ആകാൻ തരമില്ല (ഏതു രണ്ടു ഇരട്ടസംഖ്യകൾക്കും 2 ഒരു പൊതുഘടകമാണല്ലോ). അപ്പോൾ y ഒറ്റസംഖ്യയാകണം.

അതായത്, നാം അന്വേഷിക്കുന്ന ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശം ഇരട്ടസംഖ്യ, ഛേദം ഒറ്റസംഖ്യ.

കൂടുതൽ വല്ലതും പറയാൻ കഴിയുമോ ? അന്വേഷണം തുടരാം. x ഇരട്ടസംഖ്യ ആയതിനാൽ, അതിനെ 2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും എണ്ണൽസംഖ്യതന്നെ കിട്ടും. അതായത് $\frac{x}{2}$ ഒരു എണ്ണൽസംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ z എന്നെഴുതാം.

$$\frac{x}{2} = z$$

അഥവാ,

$$x = 2z$$

ഇനി $x^2 = 2y^2$ എന്ന് ആദ്യം എഴുതിയതിൽ x നു പകരം $2z$ ഉപയോഗിക്കാമല്ലോ:

$$(2z)^2 = 2y^2$$

അതായത്,

$$4z^2 = 2y^2$$

ഇതിൽ നിന്ന്

$$y^2 = 2z^2$$

എന്നും കിട്ടും.

അപ്പോൾ y^2 ഇരട്ടസംഖ്യയാണ്. ഇതിൽനിന്ന്, മുമ്പ് x ന്റെ കാര്യത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ, y ഉം ഇരട്ട സംഖ്യതന്നെയാണെന്നു കാണാമല്ലോ.

അതെങ്ങനെ ശരിയാകും ? y ഒറ്റസംഖ്യ ആണെന്നല്ലേ ആദ്യം കണ്ടത്.

എന്താണിവിടെ സംഭവിച്ചത് ? ഏറ്റവും ലഘുവായ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ വർഗം 2 ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ഛേദം ഒറ്റസംഖ്യയാണെന്ന് ആദ്യം കണ്ടു. കുറേക്കൂടി ആലോചിച്ചപ്പോൾ ഈ ഛേദം ഇരട്ടസംഖ്യ ആണെന്നും കിട്ടി. ഇതു രണ്ടും കൂടി സാധ്യമല്ലല്ലോ.

ഇതിൽ നിന്ന് ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെയും വർഗം 2 അല്ലെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.