ഓൺലൈൻ ഗണിതക്ലാസ്സ് - X - 12 (15 / 07 /2021)

1. സമാന്തരശ്രേണികൾ - ക്ലാസ്സ് -10

കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സിൽ നാം പഠിച്ചത് .

★ ഒന്നു മുതലുള്ള തുടർച്ചയായ കുറേ എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക , അവസാനസംഖ്യയുടെയും അതിനടുത്ത എണ്ണൽസംഖ്യയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയാണ് .

അതായത് , $1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$

★ ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം , $x_n = an + b$ ആണെങ്കിൽ ,

അതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + x_3 + . . . + x_n = a\frac{n\,(n+1)}{2} + bn$$

<u>പ്രവർത്തനം 1</u> (ആദ്യത്തെ n ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക)

എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 2 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്നവയാണല്ലോ ഇരട്ടസംഖ്യകൾ .

സ്ഥാനം	1	2	3	10	50	100	n
ഇരട്ടസംഖ്യ	2 x 1 = 2	2 x 2 = 4	2 x 3 = 6	2 x 10 = 20	2 x 50 = 100	2 x 100 = 200	2 x n = 2n

ആദ്യത്തെ n എണ്ണൽസംഖ്യകളുടെ തുക = $1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{n\,(n+1)}{2}$

ആദ്യത്തെ n ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക $= 2 + 4 + 6 + . . . + 2n$

$= 2(\,1 + 2 + 3 + . . . + n\,)$

$= 2 \times \frac{n\,(n+1)}{2} = n\,(n+1)$

ആദ്യത്തെ n ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക $= n\,(n+1)$

NOTE :

ആദ്യത്തെ 10 ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക	=	$10 \times 11 = 110$
ആദ്യത്തെ 15 ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക	=	$15 \times 16 = 240$
ആദ്യത്തെ 20 ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക	=	$20 \times 21 = 420$
ആദ്യത്തെ 50 ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക	=	$50 \times 51 = 2550$
ആദ്യത്തെ 100 ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുക	=	$100 \times 101 = 10100$

പ്രവർത്തനം 2 (ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക)

2 ന്റെ ഗുണിതങ്ങളിൽ നിന്ന് 1 കുറച്ചു കിട്ടുന്നവയാണല്ലോ ഒറ്റസംഖ്യകൾ .

സ്ഥാനം	1	2	3	10	50	100	n
ഒറ്റസംഖ്യ	2 x 1 - 1 = 2 – 1 = 1	2 x 2 - 1 = 4 – 1 = 3	2 x 3 - 1 = 6 – 1 = 5	2 x 10 - 1 = 20 – 1 = 19	2 x 50 - 1 = 100 – 1 = 99	2 x 100-1 = 200 – 1 = 199	2 x n - 1 = 2 n – 1

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക $= 1 + 3 + 5 + \ldots + 2n-1$

$= 2-1 + 4-1 + 6-1 + \ldots + 2n-1$

n എണ്ണം

$= 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n \underbrace{- 1 - 1 - 1 - \ldots - 1}_{n}$

$= n(n+1) - 1 \times n = n^2 + n - n = n^2$

ആദ്യത്തെ n ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക $= n^2$

NOTE :

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2 \times \dfrac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$

c) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n(n+1) - 1 \times n = n^2 + n - n = n^2$

ആദ്യത്തെ 10 ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക $= 10^2 = 100$
ആദ്യത്തെ 15 ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക $= 15^2 = 225$
ആദ്യത്തെ 20 ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക $= 20^2 = 400$
ആദ്യത്തെ 50 ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക $= 50^2 = 2500$
ആദ്യത്തെ 100 ഒറ്റസംഖ്യകളുടെ തുക $= 100^2 = 10000$

പ്രവർത്തനം 3 (4 ന്റെ ആദ്യത്തെ n ഗുണിതങ്ങളുടെ തുക)

എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 4 കൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്നവയാണല്ലോ 4 ന്റെ ഗുണിതങ്ങൾ .

4 ന്റെ ആദ്യത്തെ n ഗുണിതങ്ങളുടെ തുക $= 4 + 8 \quad 12 + \ldots + 4n$

$$= 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$= 4 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= 2 \times n(n+1) = 2(n^2 + n) = 2n^2 + 2n$$

NOTE :

സമാന്തരശ്രേണി	ബീജഗണിതരൂപം	ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക
1 , 2 , 3 , . . .	n	$\frac{n(n+1)}{2}$
2 , 4 , 6 , . . .	$2n$	$2 \times \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$
1 , 3 , 5 , . . .	$2n - 1$	$2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$
4 , 8 , 12 , . . .	$4n$	$4 \times \frac{n(n+1)}{2} = 2n^2 + 2n$

പ്രവർത്തനം 4 (സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുക കാണുന്ന മറ്റൊരു രീതി)

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം , $x_n = an + b$ ആണെങ്കിൽ , അതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ . \ . \ . + x_n = a\frac{n(n+1)}{2} + bn$$

ആണെന്ന് നാം കണ്ടു .

$$a\frac{n(n+1)}{2} + bn = n\left(\frac{a(n+1)}{2} + b\right)$$

$$= n\left(\frac{a(n+1)}{2} + \frac{2b}{2}\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left[\left(a(n+1) + 2b\right)\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[an + a + 2b\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[an + a + b + b\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[(an + b) + (a + b)\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[(an + b) + (a + b)\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[x_n + x_1\right]$$

(NOTE : $x_n = an + b$, $x_1 = a + b$)

കണ്ടെത്തൽ

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ തുടർച്ചയായ കുറേ പദങ്ങളുടെ തുക , ആദ്യത്തേയും അവസാനത്തെയും പദങ്ങളുടെ തുകയെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്റെ പകുതിയാണ്

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ . \ . \ . + x_n = \frac{n}{2}\left(x_1 + x_n\right)$$

പ്രവർത്തനം 5

5 , 8 , 11 , . . . സമാന്തരശ്രേണി പരിഗണിക്കുക .

a) ഈ ശ്രേണിയുടെ പൊതുവ്യത്യാസമെത്ര ?

b) ഈ ശ്രേണിയിലെ 20-)൦ പദമെത്ര ?

c) ഈ ശ്രേണിയിലെ ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക കണക്കാക്കുക .

ഉത്തരം

a) പൊതുവ്യത്യാസം = $8 - 5 = 3$

b) $x_{20} = x_1 + 19d = 5 + (19 \times 3) = 5 + 57 = 62$

c) ആദ്യത്തെ 20 പദങ്ങളുടെ തുക $= \frac{20}{2}(x_1 + x_{20})$

$$= \frac{20}{2} \times (5 + 62)$$

$$= \frac{20}{2} \times 67 = 670$$

പ്രവർത്തനം 6 (തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം)

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം , $x_n = an + b$ ആണെങ്കിൽ , അതിലെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക

$$x_1 + x_2 + x_3 + . . . + x_n = a\frac{n(n+1)}{2} + bn$$

ആണെന്ന് നാം കണ്ടു .

$$a\frac{n(n+1)}{2} + bn = \frac{a}{2}(n(n+1)) + bn$$

$$= \frac{a}{2}(n^2 + n) + bn$$

$$= \frac{a}{2}n^2 + \frac{a}{2}n + bn$$

$$= \frac{a}{2}n^2 + (\frac{a}{2} + b)n$$

ഇതിൽ $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2} + b$ എന്നിവ ശ്രേണിയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിശ്ചിതസംഖ്യകളാണല്ലോ .

($a = d$, $b = f - d$ ആണെന്ന് നാം നേരത്തെ കണ്ടല്ലോ)

അപ്പോൾ തുക n^2 നെയും n നെയും നിശ്ചിതസംഖ്യകൾകൊണ്ടു ഗുണിച്ച് കൂട്ടിയതാണ് .

അതായത് ,

ഏതു സമാന്തരശ്രേണിയുടെയും തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം $pn^2 + qn$ എന്നാണ്

$$\left(p = \frac{a}{2} \quad , \quad q = \frac{a}{2} + b \right)$$

ഇവിടെ $p + q = \frac{a}{2} + \left(\frac{a}{2} + b\right) = a + b = f$

അതായത് p പൊതുവ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതിയും , $p + q$ ആദ്യപദവുമായിരിക്കും .

NOTE :

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം , $x_n = an + b$ ആയാൽ

a) $a = d$ (d = പൊതുവ്യത്യാസം)

b) $b = f - d$ (f = ആദ്യപദം)

c) തുകയുടെ ബീജഗണിതരൂപം = $pn^2 + qn$

d) $p = \frac{d}{2}$

e) $p + q = f$

പ്രവർത്തനം 7

5 , 9 , 13 , . . . എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ

a) ബീജഗണിതരൂപമെഴുതുക ?

b) ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുകയെന്ത് ?

ഉത്തരം

a) $x_n = dn + f - d = 4n + 5 - 4 = 4n + 1$ $(f = 5 \ , \ d = 9 - 5 = 4)$

b)

ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $= pn^2 + qn$

$= 2n^2 + 3n$

($p = \frac{d}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$p + q = f$

$2 + q = 5$

$q = 5 - 2 = 3$)

OR

ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $= 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = 2n(n+1) + n$

$= 2n^2 + 2n + n = 2n^2 + 3n$

പ്രവർത്തനം 8

ഒരു സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $3n^2 + 2n$ ആണ് . ഈ ശ്രേണി യുടെ ബീജഗണിതരൂപമെഴുതുക .

ഉത്തരം

ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $= 3n^2 + 2n$

$x_n = dn + f - d$

$= 6n + 5 - 6 = 6n - 1$

$p = \frac{d}{2}$, $p + q = f$

$\frac{d}{2} = 3 \rightarrow d = 3 \times 2 = 6$

$f = 3 + 2 = 5$

OR

ആദ്യത്തെ n പദങ്ങളുടെ തുക $= 3n^2 + 2n$

ആദ്യപദം $= 3 \times 1^2 + 2 \times 1 = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$

ആദ്യത്തെ 2 പദങ്ങളുടെ തുക $= 3 \times 2^2 + 2 \times 2 = 3 \times 4 + 4 = 12 + 4 = 16$

$\Longrightarrow x_1 + x_2 = 16$

$5 + x_2 = 16 \Longrightarrow x_2 = 16 - 5 = 11$

$d = 11 - 5 = 6$

$x_n = dn + f - d$

$= 6n + 5 - 6 = 6n - 1$

പ്രവർത്തനം 9 (സംഖ്യാക്രമം - 1)

താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യാക്രമം ശ്രദ്ധിക്കൂ .

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

....

....

ഇവിടെ ഒന്നാമത്തെ വരിയിൽ ഒരു സംഖ്യ , രണ്ടാമത്തെ വരിയിൽ രണ്ടു സംഖ്യകൾ , മൂന്നാമത്തെ വരിയിൽ മൂന്നു സംഖ്യകൾ , നാലാമത്തെ വരിയിൽ നാലു സംഖ്യകൾ , . . . എന്ന ക്രമത്തിലാണ് സംഖ്യകൾ എഴുതിയിരിക്കുന്നത് . ഇങ്ങനെ തുടർന്നാൽ n -)മത്തെ വരിയിൽ n സംഖ്യകളുണ്ടാകും

ഈ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ n -)മത്തെ വരിയിൽ n സംഖ്യകളുണ്ടാകും .

ഒന്നാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനസംഖ്യ	1	1
രണ്ടാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനസംഖ്യ	3	1 + 2
മൂന്നാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനസംഖ്യ	6	1 + 2 + 3
നാലാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനസംഖ്യ	10	1 + 2 + 3 + 4

1

2 3 = 1 + 2

4 5 6 = 1 + 2 + 3

7 8 9 10 = 1 + 2 + 3 + 4

....

....

	സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം	അവസാനത്തെ സംഖ്യ	
ഒന്നാമത്തെ വരി	1	1	1
രണ്ടാമത്തെ വരി	2	1 + 2	3
മൂന്നാമത്തെ വരി	3	1 + 2 + 3	6
നാലാമത്തെ വരി	4	1 + 2 + 3 + 4	10
അഞ്ചാമത്തെ വരി	5	1 + 2 + 3 + 4 + 5	15
ആറാമത്തെ വരി	6	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	21
ഏഴാമത്തെ വരി	7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7	28
എട്ടാമത്തെ വരി	8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	36
ഒൻപതാമത്തെ വരി	9	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9	45
പത്താമത്തെ വരി	10	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10	55

n -)മത്തെ വരിയിലെ അവസാന സംഖ്യ = $1 + 2 + 3 + . . . + n$

$$\left(1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{n\ (n+1)}{2} \right)$$

കണ്ടെത്തലുകൾ

ഈ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ ,

a) n -)മത്തെ വരിയിൽ n സംഖ്യകളുണ്ടാകും .

b) n -)മത്തെ വരിയിലെ അവസാന സംഖ്യ = $1 + 2 + 3 + . . . + n = \frac{n\ (n+1)}{2}$

പ്രവർത്തനം 10

താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യാക്രമം ശ്രദ്ധിക്കൂ .

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

....

..

a) ഈ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ അടുത്ത രണ്ടു വരികൾ കൂടി എഴുതുക .

b) പത്താമത്തെ വരിയിൽ എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകും ?

c) ഒൻപതാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനത്തെ സംഖ്യയേത് ?

d) പത്താമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യസംഖ്യയേത് ?

e) പത്താമത്തെ വരിയിലെ അവസാനത്തെസംഖ്യയേത് ?

f) പത്താമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുകയെത്ര ?

ഉത്തരം

a) 11 12 13 14 15

16 17 18 19 20 21

b) പത്താമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം = 10

c) ഒൻപതാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനത്തെ സംഖ്യ = $\frac{9 \times 10}{2} = 45$

d) പത്താമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യസംഖ്യ = 46

e) പത്താമത്തെ വരിയിലെ അവസാനത്തെ സംഖ്യ = $\frac{10 \times 11}{2} = 55$

f) പത്താമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക = $\frac{10}{2} \times (46 + 55) = \frac{10}{2} \times 91 = 455$

പ്രവർത്തനം 11 (സംഖ്യാക്രമം - 2)

താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യാക്രമം ശ്രദ്ധിക്കൂ .

5

8 11

14 17 20

23 26 29 32

....

....

5 , 8 , 11 , . . . എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയുടെ ബീജഗണിതരൂപം = $d\,n + f - d$

$= 3\,n + 5 - 3 = 3\,n + 2$

എണ്ണൽസംഖ്യകളെ 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 2 കൂട്ടികിട്ടുന്നതാണ് ഈ ശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ .

അതായത് 1 , 2 , 3 , . . . എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങളെ 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 2 കൂട്ടികിട്ടുന്നതാണ് 5 , 8 , 11 , . . . എന്ന സമാന്തരശ്രേണിയിലെ പദങ്ങൾ .

അതായത് ,

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

....

.... എന്ന സംഖ്യാക്രമത്തിലെ സംഖ്യകളെ 3 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു 2 കൂട്ടികിട്ടുന്നതാണ് മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യാക്രമത്തിലെ സംഖ്യകൾ .

ഉദാ:

സംഖ്യാക്രമം 1 ലെ അഞ്ചാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനസംഖ്യ $= \frac{5 \times 6}{2} = 15$

സംഖ്യാക്രമം 2 ലെ അഞ്ചാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനസംഖ്യ $= 3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17$

സംഖ്യാക്രമം 1 ലെ പത്താമത്തെ വരിയിലെ അവസാനസംഖ്യ $= \frac{10 \times 11}{2} = 55$

സംഖ്യാക്രമം 2 ലെ പത്താമത്തെ വരിയിലെ അവസാനസംഖ്യ $= 3 \times 55 + 2 = 165 + 2 = 167$

പ്രവർത്തനം 12

താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സംഖ്യാക്രമം ശ്രദ്ധിക്കൂ .

5

8 11

14 17 20

23 26 29 32

....

....

a) ഈ സംഖ്യാക്രമത്തിലെ അടുത്ത രണ്ടു വരികൾ കൂടി എഴുതുക .

b) പത്താമത്തെ വരിയിൽ എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകും ?

c) ഒൻപതാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനത്തെ സംഖ്യയേത് ?

d) പത്താമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യസംഖ്യയേത് ?

e) പത്താമത്തെ വരിയിലെ അവസാനത്തെസംഖ്യയേത് ?

f) പത്താമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുകയെത്ര ?

ഉത്തരം

a) 35 38 41 44 47

50 53 56 59 62 65

ഗണിതം

b) പത്താമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം = 10

c) ഒൻപതാമത്തെ വരിയിലെ അവസാനത്തെ സംഖ്യ = $3 \times \left(\frac{9 \times 10}{2}\right) + 2$

$= 3 \times 45 + 2 = 135 + 2 = 137$

d) പത്താമത്തെ വരിയിലെ ആദ്യസംഖ്യ = $137 + 3 = 140$

e) പത്താമത്തെ വരിയിലെ അവസാനത്തെ സംഖ്യ = $3 \times \left(\frac{10 \times 11}{2}\right) + 2$

$= 3 \times 55 + 2 = 165 + 2 = 167$

f) പത്താമത്തെ വരിയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക = $\frac{10}{2} \times (140 + 167) = \frac{10}{2} \times 307 = 1535$

വണ്ടൂർ ഗണിതം