SET – 3

Series : GBM/C

कोड नं. **Code No. 65/3**

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।
Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **8** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **8** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minute time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे — *अधिकतम अंक : **100***

*Time allowed : **3** hours* — *Maximum Marks : **100***

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न पत्र में **29** प्रश्न हैं जो चार खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब, स तथा द । खण्ड अ में **4** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **एक अंक** का है । खण्ड ब में **8** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **दो अंक** का है । खण्ड स में **11** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **चार अंक** का है । खण्ड द में **6** प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक **छः अंक** का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकतानुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले **3** प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले **3** प्रश्नों में आंतरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको **एक** ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति **नहीं** है । यदि आवश्यक हो, तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into four sections A, B, C and D. Section A comprises of* ***4*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***8*** *questions of* ***two marks*** *each, Section C comprises of* ***11*** *questions of* ***four marks*** *each and Section D comprises of* ***6*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in* ***one*** *word,* ***one*** *sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in* ***3*** *questions of* ***four*** *marks each and* ***3*** *questions of* ***six*** *marks each. You have to attempt only* ***one*** *of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड – अ

SECTION – A

प्रश्न संख्या **1** से **4** तक प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है ।

Question numbers **1** to **4** carry **1** mark each.

1. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{3x}{3x-1}\,dx$

   Find : $\int \frac{3x}{3x-1}\,dx$

2. यदि $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 225$ तथा $|\vec{a}| = 5$ है, तो $|\vec{b}|$ का मान लिखिए ।

   If $(\vec{a} \times \vec{b})^2 + (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = 225$ and $|\vec{a}| = 5$, then write the value of $|\vec{b}|$.

3. यदि A, कोटि 2 का एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तथा det (A) = 4 है, तो $\det(A^{-1})$ का मान लिखिए ।

   If A is an invertible matrix of order 2 and det (A) = 4, then write the value of $\det(A^{-1})$.

4. यदि निम्न फलन $f(x)$, $x = 0$ पर संतत है, तो k का मान लिखिए :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{3x}{2}}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

   If the following function $f(x)$ is continuous at $x = 0$, then write the value of k.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \frac{3x}{2}}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

खण्ड – ब
SECTION – B

प्रश्न संख्या **5** से **12** तक प्रत्येक प्रश्न के **2** अंक हैं ।
Question numbers **5** to **12** carry **2** marks each.

5. एक हवाई जहाज अधिकतम 250 यात्रियों को यात्रा करा सकता है । प्रत्येक प्रथम श्रेणी के टिकट पर ₹ 1,500 तथा सस्ते श्रेणी के टिकट पर ₹ 1,000 का लाभ कमाया जा सकता है । एयरलाइन कम से कम 25 सीटें प्रथम श्रेणी के लिए आरक्षित करती है । तथापि प्रथम श्रेणी की अपेक्षा कम से कम 3 गुने यात्री सस्ती श्रेणी के टिकट से यात्रा करने को वरीयता देते हैं । यह ज्ञात करने के लिए कि एयरलाइन के लाभ के अधिकतमीकरण के लिए कितने-कितने टिकट बेचे जाएँ, उपरोक्त से रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाएँ ।
An aeroplane can carry a maximum of 250 passengers. A profit of ₹ 1,500 is made on each executive class ticket and a profit of ₹ 1,000 is made on each economy class ticket. The airline reserves at least 25 seats for executive class. However, at least 3 times as many passengers prefer to travel by economy class than by executive class. Frame the Linear Programming Problem to determine how many tickets of each type must be sold in order to maximize the profit for the airline.

6. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1 + y}{x}$ का समाकलन गुणक ज्ञात कीजिए ।

Find the integrating factor of the differential equation $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1 + y}{x}$.

7. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x}{\sqrt{32 - x^2}}\, dx$

Find : $\int \frac{x}{\sqrt{32 - x^2}}\, dx$

8. यदि $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$ है, तो $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ज्ञात कीजिए ।

If $f(x) = \sin 2x - \cos 2x$, find $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

9. निम्न आव्यूह समीकरण में से x तथा y के मान ज्ञात कीजिए :

$$2\begin{pmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

Find the values of x and y from the following matrix equation :

$$2\begin{pmatrix} x & 5 \\ 7 & y-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

10. यदि सदिश $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ और $\hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$ सहतलीय हैं, तो λ का मान ज्ञात कीजिए ।

If the vectors $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ and $\hat{i} + \lambda\hat{j} - 3\hat{k}$ are coplanar, then find the value of λ.

11. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया है कि $y(0) = \sqrt{3}$.

Find the particular solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{1 + x^2}$; given that $y(0) = \sqrt{3}$.

12. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{2}{3}(3x + 1)$ है, x के सापेक्ष, आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए ।

A balloon, which always remains spherical, has a variable diameter $\frac{2}{3}(3x + 1)$. Find the rate of change of its volume with respect to x.

खण्ड – स

SECTION – C

प्रश्न संख्या **13** से **23** तक प्रत्येक प्रश्न के **4** अंक हैं ।

Question numbers **13** to **23** carry **4** marks each.

13. एक विद्यालय अपने विद्यार्थियों को नियमितता तथा कठिन परिश्रम करने के लिए कुल ₹ 6,000 का नकद पुरस्कार देना चाहता है । यदि कठिन परिश्रम करने वाले को दी जाने वाली राशि के तीन गुने में नियमितता के लिए दी जानी वाली राशि जोड़ने पर ₹ 11,000 प्राप्त होते हों तो इस परिस्थिति को बीजगणितीय समीकरणों द्वारा निरूपित कीजिए तथा आव्यूह विधि से हल करके प्रत्येक मूल्य के लिए दी जाने वाली राशि ज्ञात कीजिए । ऐसे दो और मूल्य लिखिए जिनके लिए विद्यालय को पुरस्कार देने चाहिए ।

A school wants to award its students for regularity and hardwork with a total cash award of ₹ 6,000. If three times the award money for hardwork added to that given for regularity amounts to ₹ 11,000, represent the above situation algebraically and find the award money for each value, using matrix method. Suggest two more values, which the school must include for award.

14. थैले A में 3 लाल तथा 2 काले रंग की गेंदें हैं, जबकि थैले B में 2 लाल तथा 3 काली गेंदें है । थैले A में से यादृच्छया 1 गेंद निकाल कर थैले B में डाल दी गई तथा अब थैले B में से यादृच्छया एक गेंद निकाली गई तथा यह एक लाल रंग की गेंद पाई गई । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि थैले A से B में डाली गई गेंद लाल रंग की थी ।

अथवा

यदि A और B स्वतंत्र घटनाएँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि A और B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता $1 - P(A') \cdot P(B')$ है ।

Bag A contains 3 red and 2 black balls, while bag B contains 2 red and 3 black balls. A ball drawn at random from bag A is transferred to bag B and then one ball is drawn at random from bag B. If this ball was found to be a red ball, find the probability that the ball drawn from bag A was red.

OR

If A and B are two independent events, then prove that the probability of occurrence of at least one of A and B is given by $1 - P(A') \cdot P(B')$.

15. समीकरण $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x, (x > 0)$ के वास्तविक हल ज्ञात कीजिए ।

Find the real solutions of the equation $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1} x, (x > 0)$.

16. बिंदु A (1, 8, 4) से बिंदुओं B(0, –1, 3) तथा C(2, –3, –1) से होकर जाने वाली रेखा पर डाले गए लंब के पाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

Find the co-ordinates of the foot of perpendicular drawn from a point A (1, 8, 4) to the line joining the points B(0, –1, 3) and C(2, –3, –1).

17. यदि $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ समान परिमाणों वाले परस्पर लंबवत सदिश हैं, तो सदिश $2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ द्वारा सदिशों $\vec{a}, \vec{b}$ तथा $\vec{c}$ के साथ बनने वाले कोण ज्ञात कीजिए ।

If $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ are mutually perpendicular vectors of equal magnitudes, find the angles which the vector $2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$ makes with the vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$.

18. उन अंतरालों को ज्ञात कीजिए जिनमें फलन

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$

(a) निरंतर वर्धमान है ।

(b) निरंतर ह्रासमान है ।

Find the intervals in which the function given by

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ is

(a) Strictly increasing

(b) Strictly decreasing

19. ज्ञात कीजिए : $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2 (x + 2)} \, dx$

अथवा

ज्ञात कीजिए : $\int (x - 3) \sqrt{3 - 2x - x^2} \, dx$

Find : $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x + 1)^2 (x + 2)} \, dx$

OR

Find : $\int (x - 3) \sqrt{3 - 2x - x^2} \, dx$

20. यदि $y = (\cos x)^x + \sin^{-1} \sqrt{3x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए ।

अथवा

यदि $y = (\sec^{-1} x)^2$ है, तो दर्शाइए कि $x^2(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + (2x^3 - x) \frac{dy}{dx} = 2$

If $y = (\cos x)^x + \sin^{-1} \sqrt{3x}$, find $\frac{dy}{dx}$.

OR

If $y = (\sec^{-1} x)^2$, then show that $x^2(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + (2x^3 - x) \frac{dy}{dx} = 2$

21. निम्न रैखिक प्रोग्रामन समस्या का ग्राफ द्वारा हल ज्ञात कीजिए :
$z = 105x + 90y$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए जबकि :
$x + y \leq 50,\ 2x + y \leq 80,\ x \geq 20,\ x \geq 0,\ y \geq 0$
Solve the following linear programming problem graphically :
Find the maximum value of $z = 105x + 90y$ when
$x + y \leq 50,\ 2x + y \leq 80,\ x \geq 20,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

22. अवकल समीकरण $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$; $y = 2$ यदि $x = 1$, का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए ।

Find the particular solution of the differential equation $2xy + y^2 - 2x^2 \frac{dy}{dx} = 0$; $y = 2$ when $x = 1$.

23. मान ज्ञात कीजिए : $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + \sin x}$

Evaluate : $\int_0^{\pi} \frac{x \, dx}{1 + \sin x}$

खण्ड – द

SECTION – D

प्रश्न संख्या **24** से **29** तक प्रत्येक प्रश्न के **6** अंक हैं ।

Question numbers **24** to **29** carry **6** marks each.

24. समाकलन विधि के प्रयोग से एक ऐसे त्रिभुज ABC, का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक A(1, –2), B(3, 5) तथा C(5, 2) हैं ।

अथवा

निम्नलिखित निश्चित समाकलन का योगों की सीमा के रूप में मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^4 (3x^2 + 2x + 1)\, dx$$

Using method of integration find the area of the triangle ABC, co-ordinates of whose vertices are A(1, –2), B(3, 5) and C(5, 2).

OR

Evaluate the following definite integral as limit of sums :

$$\int_0^4 (3x^2 + 2x + 1)\, dx$$

25. दर्शाइए कि न्यूनतम वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल तथा दिए गए आयतन वाले एक लंबवृत्तीय शंकु की ऊँचाई, इसके आधार की त्रिज्या की $\sqrt{2}$ गुनी होती है ।

अथवा

वक्र $x = a \cos \theta + a\, \theta \sin \theta$, $y = a \sin \theta - a\, \theta \cos \theta$ के किसी बिंदु θ पर स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा यह भी सिद्ध कीजिए की वक्र के किसी बिंदु θ पर अभिलंब मूल बिंदु से अचर दूरी पर है ।

Show that the right circular cone of least curved surface and given volume has an altitude equal to $\sqrt{2}$ times the radius of the base.

OR

Find the equation of tangent to the curve $x = a \cos \theta + a\, \theta \sin \theta$, $y = a \sin \theta - a\, \theta \cos \theta$ at any point θ of the curve. Also show that at any point θ of the curve the normal is at a constant distance from origin.

26. किसी प्रदत्त अरिक्त समुच्चय X के लिए एक द्विआधारी संक्रिया $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$ पर विचार कीजिए, जो $A * B = A \cap B, \forall A, B \in P(X)$ द्वारा परिभाषित है, जहाँ P(X), समुच्चय X का घात समुच्चय (Power set) है । दर्शाइए कि $*$ क्रमविनिमेय तथा साहचर्य है और इस संक्रिया का तत्समक अवयव X है तथा संक्रिया $*$ के लिए P(X) में केवल X व्युत्क्रमणीय अवयव है ।

अथवा

माना $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$ द्वारा परिभाषित एक फलन $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ है । दर्शाइए कि f एक एकैकी फलन है । यह भी जाँच कीजिए कि f एक आच्छादक फलन है या नहीं । अतः (परिसर f) $\to \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$ में f का प्रतिलोम (f^{-1}) ज्ञात कीजिए ।

Given a non-empty set X, consider the binary operation $* : P(X) \times P(X) \to P(X)$ given by $A * B = A \cap B, \forall A, B \in P(X)$, where P(X) is the power set of X. Show that $*$ is commutative and associative and X is the identity element for this operation and X is the only invertible element in P(X) with respect to the operation $*$.

OR

Let $f : \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \to \mathbb{R}$ be a function defined as $f(x) = \dfrac{4x}{3x+4}$. Show that f is a one-one function. Also check whether f is an onto function or not. Hence find f^{-1} in (Range of f) $\to \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$.

27. यदि $a + b + c \neq 0$ तथा $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$ है, तो सारणिकों के गुणधर्मों के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि $a = b = c$.

If $a + b + c \neq 0$ and $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$, then using properties of determinants, prove that $a = b = c$.

28. रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ तथा बिंदुओं A(1, –2, 2), B(4, 2, 3) तथा C(3, 0, 2) द्वारा निर्धारित समतल के प्रतिच्छेदन बिंदु P के निर्देशांक ज्ञात कीजिए ।

Find the co-ordinates of the point of intersection P of the line $\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane determined by points A(1, –2, 2), B(4, 2, 3) and C(3, 0, 2).

29. एक पासा समसर्वय संतुलित नहीं है जिसमें $P(4) = \dfrac{1}{10}$ है तथा बाकी परिणाम समसंभाव्य हैं । यह पासा दो बार फेंका गया । यदि X = प्राप्त हुए '4' की संख्या है, तो X का प्रसरण ज्ञात कीजिए ।

A biased die is such that $P(4) = \dfrac{1}{10}$ and other scores are equally likely. The die is tossed twice. If X is the 'number of fours obtained', find the variance of X.