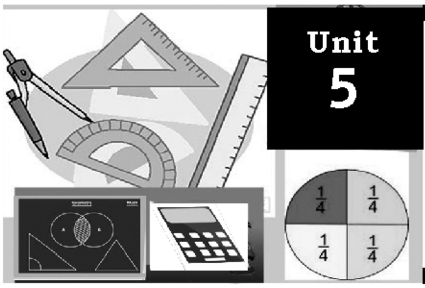
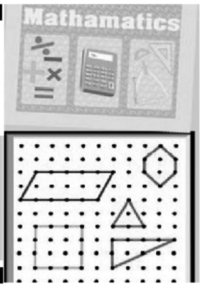


Unit 5

ത്രികോണമിതി



ഓർത്തിരിക്കാൻ

- ഒരേ കോണുകളുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെയെല്ലാം വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരേ അംശബന്ധത്തിലാണ്.

- ത്രികോണത്തിലെ കോണുകൾ അതിലെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം നിശ്ചയിക്കുന്നു.

  കോണുകൾ $45°, 45°, 90°$ വീതമായ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ ലംബവശങ്ങൾ തുല്യമാണ്. ലംബവശങ്ങളുടെ നീളത്തെ $\sqrt{2}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ കർണം കിട്ടും.

  (ഈ ത്രികോണത്തിൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $1 : 1 : \sqrt{2}$ ആണ്)

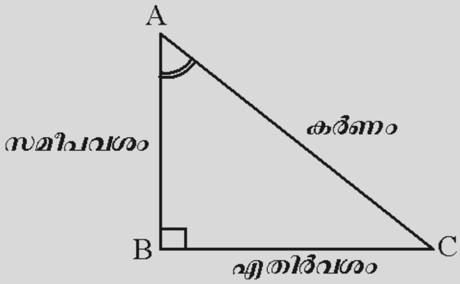
  കോണുകൾ $30°, 60°, 90°$ വീതമായ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ $30°$ കോണിന്റെ എതിർവശത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണ് കർണം. കൂടാതെ $30°$ കോണിന്റെ എതിർവശത്തെ $\sqrt{3}$ കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ $60°$ കോണിന്റെ എതിർവശം കിട്ടും.

  (ഈ ത്രികോണത്തിൽ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം $1 : \sqrt{3} : 2$ ആണ്)

- ഒരു നിശ്ചിത ന്യൂനകോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം ഈ കോണിന്റെ എതിർവശത്തിനെ കർണം കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്നത് ഒരേ സംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ ഈ കോണിന്റെ സൈൻ (sine) എന്ന് പറയുകയും sin എന്ന് ചുരുക്കി എഴുതുകയും ചെയ്യും.

- ഒരു നിശ്ചിത കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം ഈ കോണിന്റെ സമീപവശത്തിനെ (ഈ കോൺ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ചെറിയവശം) കർണം കൊണ്ട് ഹരിച്ചുകിട്ടുന്നത് ഒരേ സംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ ഈ കോണിന്റെ കോസൈൻ (cosine) എന്നു പറയുകയും cos എന്നു ചുരുക്കി എഴുതുകയും ചെയ്യുന്നു.

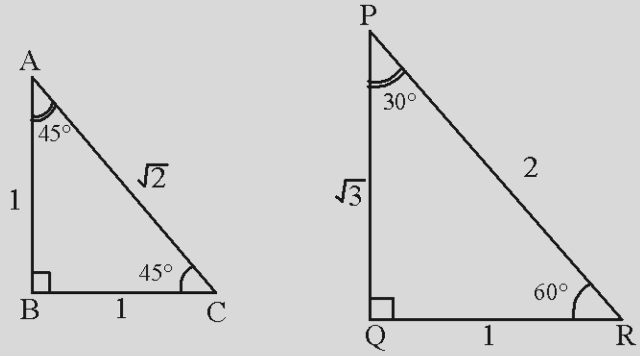
- ഒരു നിശ്ചിത കോൺ ഉൾപ്പെടുന്ന മട്ടത്രികോണങ്ങളിലെല്ലാം ഈ കോണിന്റെ എതിർവശത്തിനെ സമീപവശം കൊണ്ട് ഹരിച്ചുകിട്ടുന്നത് ഒരേ സംഖ്യയാണ്. ഇതിനെ ഈ കോണിന്റെ ടാൻജെന്റ് (tangent) എന്ന് പറയുകയും tan എന്നു ചുരുക്കി എഴുതുകയും ചെയ്യുന്നു.



$$\sin A = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB}$$



	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

- ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഏത് ഞാണിന്റേയും നീളം, ആ ഞാൺ കേന്ദ്രത്തിലുണ്ടാക്കുന്ന കോണിന്റെ പകുതിയുടെ sin അളവിനെ ആരം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്.

  'r' ആരമുള്ള വൃത്തത്തിൽ കേന്ദ്രകോൺ c° ആയ ഞാണിന്റെ നീളം, $2r \sin\left(\frac{c}{2}\right)$ ആയിരിക്കും.

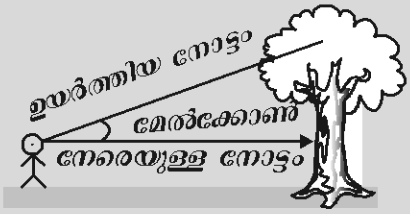
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം അവയുടെ എതിർകോണുകളുടെ sin അളവുകളുടെ അംശബന്ധമാണ്.

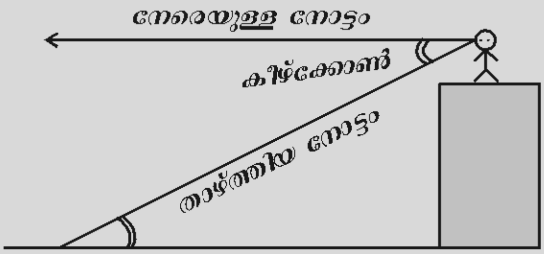
- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങളുടെ നീളം അതിന്റെ കോണുകളുടെ sin അളവുകളെ പരിവൃത്തവ്യാസം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചതാണ്. ഏതെങ്കിലും കോൺ മട്ടത്തിനേക്കാൾ വലുതാണെങ്കിൽ അതിന്റെ അനുപൂരകകോണിന്റെ sin എടുക്കണം. കോൺ മട്ടമാണെങ്കിൽ എതിർവശം പരിവൃത്ത വ്യാസം തന്നെയാണ്.

- ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളത്തെ അതിന്റെ എതിരെയുള്ള കോണിന്റെ sin വില കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ പരിവൃത്ത വ്യാസം കിട്ടും.

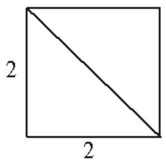
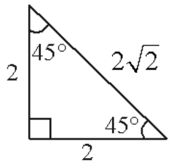
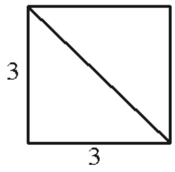
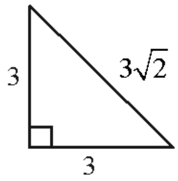
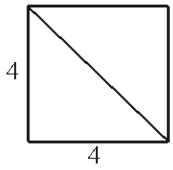
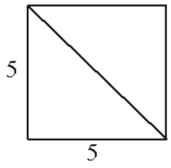
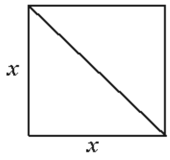
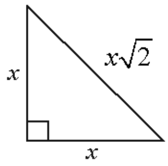
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

- നേരിട്ട് അളക്കാൻ കഴിയാത്ത ഉയരങ്ങളും നീളങ്ങളും ത്രികോണമിതി അംശബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടെത്താം.



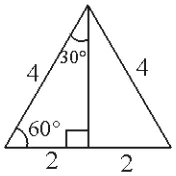
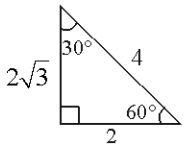
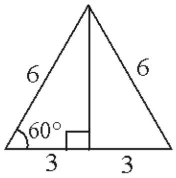
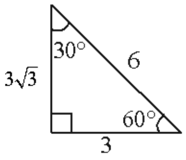
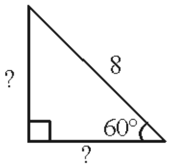
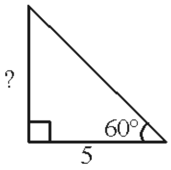
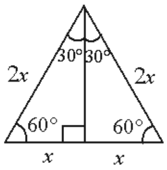
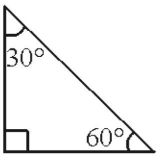


പ്രവർത്തനം 1

സമചതുരം	വികർണത്തിന്റെ നീളം $d = a\sqrt{2}$	സമപാർശ്വ മട്ടത്രികോണം	വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ			വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം
			45° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	45° കോണിന എതിരെയുള്ള വശം	90° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	
	$d = 2\sqrt{2}$		2	2	2	$2:2:\sqrt{2} = 1:1:\sqrt{2}$
	$d = 3\sqrt{2}$		—	—	$3\sqrt{2}$	— : — : — = — : — : —
	d = —	———	———	———	———	— : — : — = — : — : —
	d = —	———	———	———	———	— : — : — = — : — : —
	$d = x\sqrt{2}$		———	———	———	$x : x : \sqrt{2}$

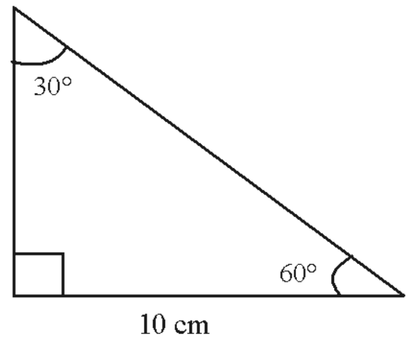
പ്രവർത്തനം 2

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

സമഭുജ ത്രികോണം	ഉന്നത് $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	ത്രികോണം	വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ			
			30° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	45° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	90° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം
	$h = 2\sqrt{3}$		2	$2\sqrt{3}$	4	$2 : 2\sqrt{3} : 4$ $=1 : \sqrt{3} : 1$
	$h = 3\sqrt{3}$		____	____		__ : __ : __ = __ : __ : __
____	h = __		____	____	____	__ : __ : __ = __ : __ : __
____	h = __		____	____	____	__ : __ : __ = __ : __ : __
	h = __		____	____	____	$x : x : \sqrt{2}$

പ്രവർത്തനം 3

ΔABC യുടെ കോണുകൾ 30°, 60°, 90° വീതമാണ്. ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കാണുക.



ΔABC യുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം ☐ : ☐ : ☐

30° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം BC = ☐ cm

60° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം AB = ☐ cm

90° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം AC = ☐ cm

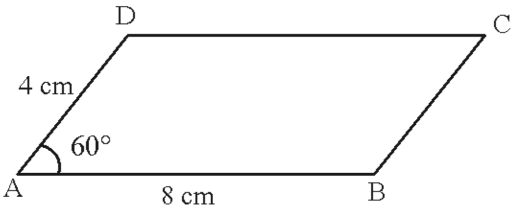
ΔABC യുടെ ചുറ്റളവ് = ☐ + ☐ + ☐

= ☐ + ☐ cm

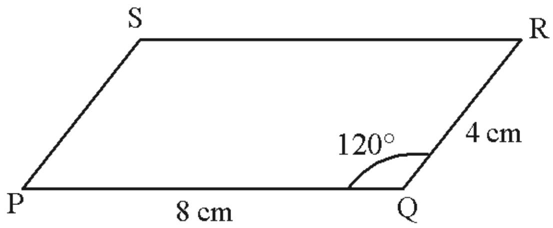
പ്രവർത്തനം 4

ചിത്രത്തിലെ സാമാന്തരികത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക?

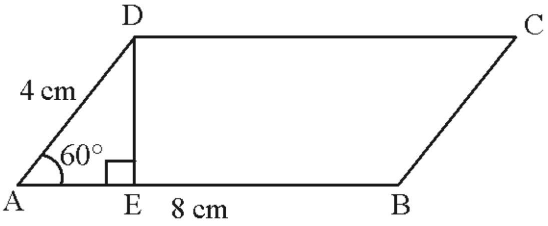
a.



b.



a.



D യിൽ നിന്നും AB യിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക.

$\angle AED$ യുടെ അളവ് = ☐

$\angle ADE$ യുടെ അളവ് = ☐

90° എതിരെയുള്ള വശം, AD = $\square$

30° എതിരെയുള്ള വശം,e AE = $\square$

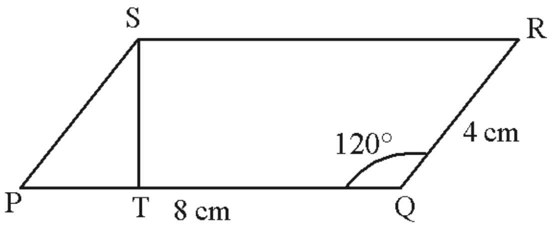
60° എതിരെയുള്ള വശം, DE = $\square$

AB യുടെ നീളം = $\square$ cm

സാമാന്തരികം ABCD യുടെ പരപ്പളവ് = AB × DE

= $\square$ × $\square$ ചതുരശ്ര സെ.മീ.

b.



S യിൽ നിന്നും PQ വിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക.

$\angle P = 180^0 - \square = \square$

$\angle PTS = \square$

$\angle PST = \square$

PS = $\square$ = 4cm

PQ = $\square$ cm

90^0 കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം PS = $\square$ cm

30^0 കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം PT = $\square$ cm

60^0 കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം ST = $\square$ cm

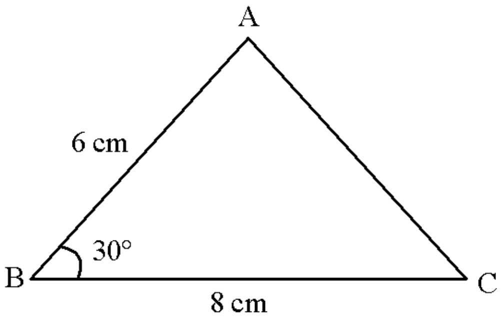
സാമാന്തരികം PQRS ന്റെ പരപ്പളവ് = PQ × ST

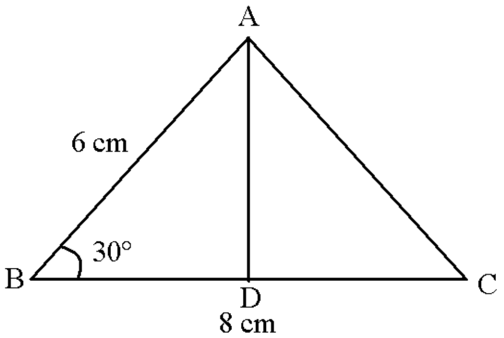
= $\square$ × $\square$

= $\square$ ചതുരശ്ര സെ.മീ.

പ്രവർത്തനം - 5

ΔABC യിൽ AB = 6cm, BC = 8cm, $\angle B = 30^0$ ആയാൽ ത്രികോണത്തിന്റെ പരപ്പളവ് കാണുക.





A യിൽ നിന്നും BC യിലേക്ക് ലംബം വരയ്ക്കുക.

$\angle ADB$ = ☐

$\angle B$ = ☐

$\angle BAD$ = ☐

BC യുടെ നീളം = ☐ cm

90^0 കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം, AB = ☐ cm

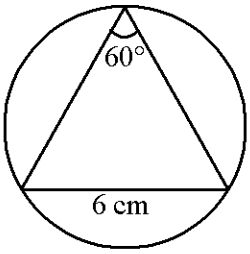
30^0 കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം, AD = ☐ cm

ΔABC യുടെ നീളം = $\dfrac{BC \times AD}{2}$

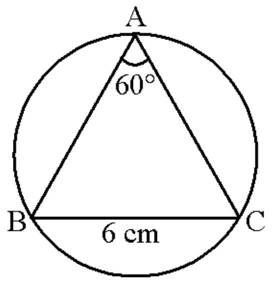
$= \dfrac{\square \times \square}{2}$

= ☐ ചതുരശ്ര സെ.മീ.

പ്രവർത്തനം - 6



ചിത്രത്തിൽ ഒരു ത്രികോണവും അതിന്റെ പരിവൃത്തവും തന്നിരിക്കുന്നു. വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക.



വ്യാസം 'd' എന്നെടുത്താൽ

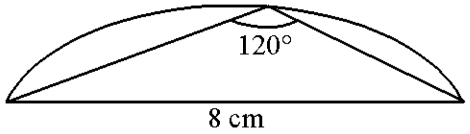
$$d = \frac{a}{\sin A}$$

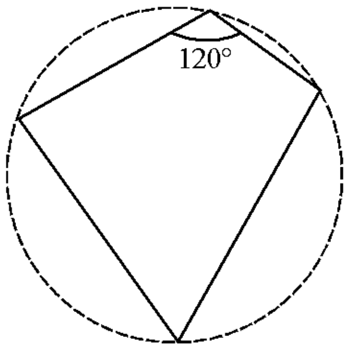
ഇവിടെ, $d = \frac{6}{\text{Sin}\,\square}$

വ്യാസം $= \frac{\square}{\square} = \square \times \square = \square$

പ്രവർത്തനം - 7

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചാപമാണ് ചിത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്. വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കാണുക.





ഇവിടെ 120° കോണിന്റെ മറുചാപത്തിലെ കോൺ $\square$ ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ വ്യാസം കാണുന്നതിന് ആ കോൺ പരിഗണിച്ചാൽ മതിയല്ലോ.

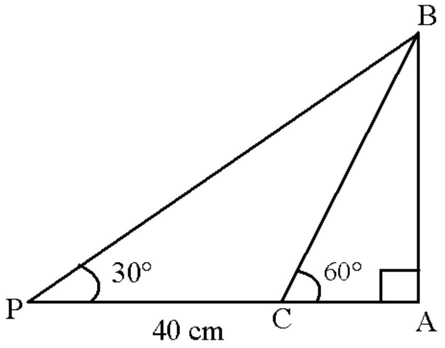
$\therefore$ വ്യാസം = $\frac{\square}{\text{Sin}\square} = \frac{\square}{\square}$

= $\square$

$\therefore$ ആരം = $\square$

പ്രവർത്തനം - 8

ഒരു പുഴയുടെ ഒരുകരയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു കുട്ടി മറുകരയിൽ നിൽക്കുന്ന ഒരു മരത്തിന്റെ മുകളറ്റം 60° മേൽകോണിൽ കാണുന്നു. 40 മീറ്റർ പുറകോട്ടുനടന്നതിനുശേഷം തിരിഞ്ഞ് മരത്തിന്റെ മുകൾ അറ്റം 30° മേൽകോണിൽ കാണുന്നു. മരത്തിന്റെ ഉയരവും പുഴയുടെ വീതിയും കാണുന്നതിനുള്ള ഒരു ഏകദേശചിത്രം താഴെ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ ചിത്രത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതിൽ വിട്ടുപോയ ഭാഗത്തിന്റെ ഉത്തരം എഴുതുക.



AB – മരത്തിന്റെ ഉയരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

AC - പുഴയുടെ വീതിയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

എങ്കിൽ ΔPCB യിൽ

$\angle PCB = 180 - \square = \square$

$\therefore \angle PBC = 180 - [\square + \square]$

= $\square$

$\therefore \Delta PCB$ ഒരു ________ ത്രികോണമാണ്

$\therefore BC =$ ________ = 40cm

മട്ട ΔACB യിൽ

$\angle ACB = 60^0$, $\angle A = 90^0$, എങ്കിൽ $\angle ABC =$ ________

ΔACB യുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം = ________ : ________ : ________

90^0 കോണളവിന് എതിരെയുള്ള വശം , BC = ________

30^0 കോണളവിന് എതിരെയുള്ള വശം, AC = ______

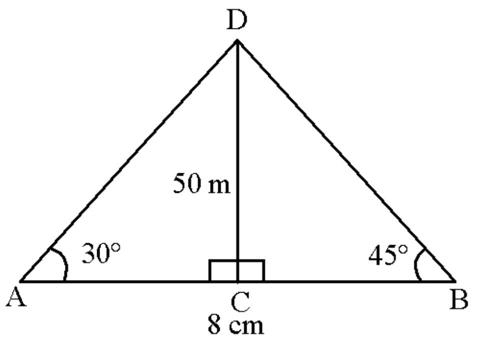
60^0 കോണളവിന് എതിരെയുള്ള വശം, AB = ______

പുഴയുടെ വീതി : AC = ______

മരത്തിന്റെ ഉയരം : AB = ______

പ്രവർത്തനം - 9

50m ഉയരമുള്ള ഒരു ഇലക്ട്രിക് പോസ്റ്റിന്റെ ഇരുവശങ്ങളിലും നിൽക്കുന്ന രണ്ടാളുകളിൽ ഒന്നാമത്തെ ആൾ പോസ്റ്റിന്റെ മുകൾഅഗ്രം $35°$ മേൽകോണിൽ കാണുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ആൾ പോസ്റ്റിന്റെ മുകൾ അഗ്രം $45°$ മേൽകോണിൽ കാണുന്നു. എങ്കിൽ താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഏകദേശ ചിത്രത്തിന്റെ സഹായത്താൽ ആളുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുന്നതിനുള്ള ഉത്തരത്തിലെ വിട്ടുപോയ ഭാഗങ്ങൾ എഴുതുക.



CD - പോസ്റ്റിന്റെ ഉയരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ആൾ നിൽക്കുന്നു.

ΔBCD പരിഗണിച്ചാൽ

$\angle B = 45^0$, $\angle BCD$ = ______ $\angle BDC$ ______

$\therefore$ ΔBCD ഒരു ______ ത്രികോണം ആണ്.

ΔBCD യുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം = ______

BCD = ______ = 50m

ΔACD പരിഗണിച്ചാൽ , A = 30^0, $\angle ACD$ =______, $\angle ADC$ =______

ΔACD യുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം = ______

30^0 കോണളവിനെതിരെയുള്ള വശം , CD = ______

60^0 കോണളവിനെതിരെയുള്ള വശം, AC = ______

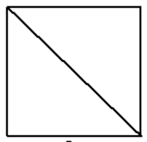
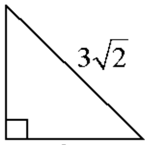
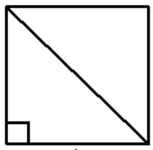
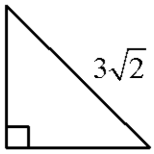
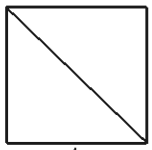
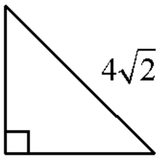
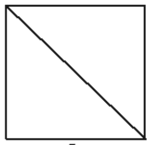
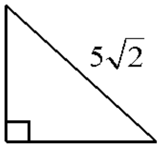
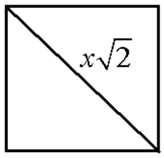
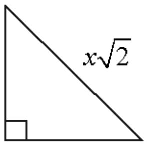
AC + BC = ______ + ______

= ______

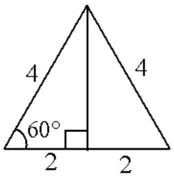
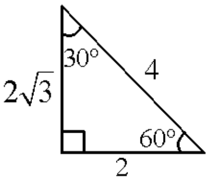
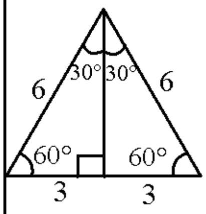
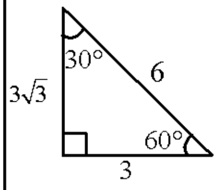
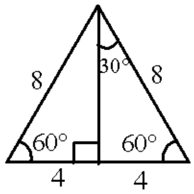
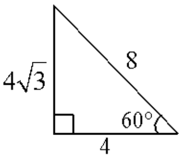
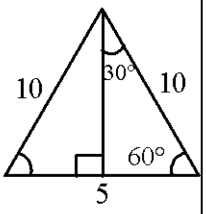
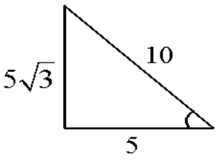
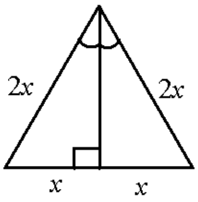
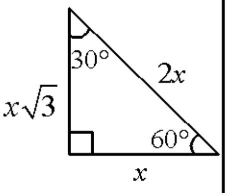
ആളുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, AB = _______

ANSWERS

പ്രവർത്തനം 1

സമചതുരം	വികർണത്തിന്റെ നീളം $d = a\sqrt{2}$	സമപാർശ്വ മട്ടത്രികോണം	വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ: 45° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	45° കോണിന എതിരെയുള്ള വശം	90° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം
	$d = 2\sqrt{2}$		2	2	$2\sqrt{2}$	$2:2:2\sqrt{2}$ $1:1:\sqrt{2}$
	$d = 4\sqrt{2}$		3	3	$3\sqrt{2}$	$3:3:3\sqrt{2}$ $= 1:1:\sqrt{2}$
	d = $5\sqrt{2}$		4	4	$4\sqrt{2}$	$4:4:4\sqrt{2}$ $= 1:1:\sqrt{2}$
	d = $x\sqrt{2}$		5	5	$5\sqrt{2}$	$5:5:5\sqrt{2}$ $= 1:1:\sqrt{2}$
	$d = x\sqrt{2}$		x	x	$x\sqrt{2}$	$x:x:x\sqrt{2}$ $= 1:1:\sqrt{2}$

പ്രവർത്തനം 2

സമഭുജ ത്രികോണം	ഉന്നതി $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	ത്രികോണം	വശങ്ങളുടെ അളവുകൾ			വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം
			30° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	45° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	90° കോണിന് എതിരെയുള്ള വശം	
	$h = 2\sqrt{3}$		2	$2\sqrt{3}$	4	$2 : 2\sqrt{3} : 4$ $=1 : \sqrt{3} : 2$
	$h = 3\sqrt{3}$		3	$3\sqrt{3}$	6	$3 : 3\sqrt{3} : 6$ $=1 : \sqrt{3} : 2$
	$h = 4\sqrt{3}$		4	$4\sqrt{2}$	8	$4 : 4 : \sqrt{3} = 8$ $= 1 : \sqrt{3} : 2$
	$h = 5\sqrt{3}$		5	$5\sqrt{3}$	10	$5 : 5\sqrt{3} : 10$ $= 1 : \sqrt{3} : 2$
	$h = x\sqrt{3}$		x	$x\sqrt{3}$	$2x$	$x : x\sqrt{3} : 2x$ $= 1 : \sqrt{3} : 2$

പ്രവർത്തനം 3

$1 : \sqrt{3} : 2$

BC = 10cm

AB = $10\sqrt{3}$ cm

AC = 20cm

ചുറ്റളവ് = 10 + $10\sqrt{3}$ + 20 = $(30+10\sqrt{3})$cm

പ്രവർത്തനം 4

$\angle ACD = 90^0$

$\angle ADE = 30^0$

AD = 4cm

AE = 2cm

DE = $2\sqrt{3}$ cm

AB = 8cm

സാമാന്തരികം ABCD യുടെ പരപ്പളവ് = $8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$ ച.സെ.മീ.

പ്രവർത്തനം 5

$\angle$ADB = 90^0

$\angle$B = 30^0

$\angle$BAD = 60^0

BC = 8cm

AB = 6cm

AD = 3cm

പരപ്പളവ് = $\frac{8 \times 2}{2}$ 8 ച.സെ.മീ.

പ്രവർത്തനം 6

$$d = \frac{6}{\sin 60}$$

$$\text{വ്യാസം} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3 \times 2 \times 2}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times 2 \times 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$

പ്രവർത്തനം 7

60^0

വ്യാസം = $\frac{8}{\sin 60}$

$= \frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}$

പ്രവർത്തനം 8

$\angle PCB = 180 - \boxed{60} = \boxed{120}$

$\angle PBC = 180 - \left[\boxed{30} + \boxed{120}\right]$

$= \boxed{30}$

ΔPCB ഒരു സമപാർശ്വ ത്രികോണം

BC = PC = 40 m

$\angle ABC = 30^0$

അംശബന്ധം = $1 : \sqrt{3} : 2$

BC = 40m

AC = 20m

AB = $20\sqrt{3}$ m

പുഴയുടെ വീതി = 20m

മരത്തിന്റെ ഉയരം = $20\sqrt{3}$ m

പ്രവർത്തനം 9

$\angle BCD = 50^0$ $\angle BDC = 45^0$

ΔBCD ഒരു സമപാർശ്വ മട്ടത്രികോണം ആണ്

BC = CD = 50m

$\Delta BCD = 1 : 1 : \sqrt{2}$

$\Delta ACD = 90^0$, $\angle ADC = 60^0$

ΔACD യുടെ വശങ്ങളുടെ അംശബന്ധം = $1 : \sqrt{3} : 2$

CD = 50m

AC = $50\sqrt{3}$

AC + BC = $50\sqrt{3} + 50$

$= 50\left(\sqrt{3}+1\right)$

ആളുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം, AB = $50\left(\sqrt{3}+1\right)$ m