अध्याय 13

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

महत्वपूर्ण बिंदु

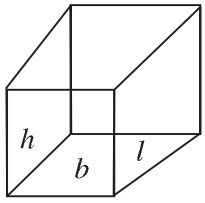
- **घनाभ**

1) घनाभ का आयतन = lbh

2) घनाभ का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2(\ell b+bh+h\ell)$

3) घनाभ का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2h (l+b)

4) घनाभ का विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$



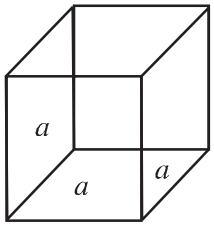
- **घन**

1) घन का आयतन=a^3

2) घन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $6a^2$

3) घन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4a^2$

4) घन का विकर्ण = $\sqrt{3}$ x भुजा

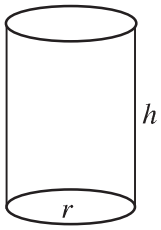


- **बेलन**

1) बेलन का आयतन =$\pi r^2 h$

2) बेलन का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल =$2\pi r(r+h)$

3) बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल= $2\pi rh$



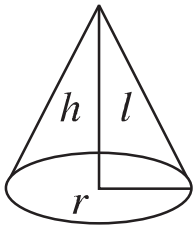
- **शंकु**

1) शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

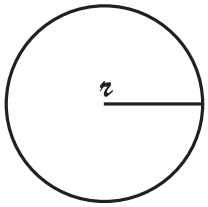
2) शंकु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r(\ell+r)$

3) शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $\pi r\ell$

4) शंकु की तिर्यक ऊँचाई = $\sqrt{h^2+r^2} = \ell$



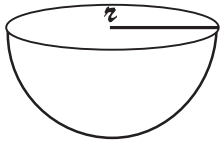
- **गोला**



1) गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

2) गोले का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$

- **अर्धगोला**



1) गोलार्ध का आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$

2) गोलार्ध का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r^2$

3) गोलार्ध का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 3\pi r^2$

- $1 m^3 = 1000\ l$
- $1 l = 1000\ cm^3$

खण्ड-अ

1. एक घन का पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल 256 सेमी.^{2} है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

2. एक माचिस की डिब्बी की माप 4cm × 2.5cm ×1.5cm है। ऐसी 12 डिब्बियों से बने पैकेट का आयतन क्या होगा?

3. दो बेलनों की ऊँचाईयों का अनुपात 5:3 तथा त्रिज्याओं का अनुपात 2:3 हो, तो उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

4. शंक्वाकार टेंट जिसकी ऊँचाई 24 मी. और त्रिज्या 7 मी. हो तो इसमें लगने वाले केनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

5. समान त्रिज्या वाले गोले एवं अर्द्धगोले के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. एक घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल 1372 sq.cm है। यदि इसकी विमाओं का अनुपात 4:2:1 है तो उनकी लम्बाई ज्ञात कीजिए।

7. यदि शंकु की त्रिज्या व तिर्यक ऊँचाई क्रमशः $\frac{1}{2}r$ और 2ℓ हो, तो शंकु का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. एक शंकु तथा अर्द्धगोले का आधार और आयतन समान है। दोनों की ऊँचाई का अनुपात ज्ञात कीजिए।

9. एक गोलाकार गुब्बारें की त्रिज्या 6 सेमी. से 12 सेमी. हो जाती है, जब उसमें हवा भरी जाती है। दोनों स्थितियों के लिए पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. एक r cm किनारे वाले घन में से अधिकतम संभव लंब वृत्तीय शंकु काटकर निकाला जाता है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

11. एक आयताकार शीट को, जिसकी विमाएं 33 cm × 18 cm हैं, उसकी चौड़ाई के अनुरूप मोड़कर एक बेलन बनाया गया। बेलन की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

खण्ड–ब

12. यदि एक रोलर का व्यास 70 cm और लम्बाई 1.5m है तो 50mx 33m माप वाले खेल के मैदान को वह कितने चक्करों में समतल करेगा?

13. एक घनाभ की विमाओं का अनुपात 1 : 2 : 3 है तथा उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $88m^2$ है। सभी विमाएँ ज्ञात कीजिए।

14. एक ठोस बेलन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $231cm^2$ है। बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल उसके कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का $\frac{2}{3}$ भाग है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

15. घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $150m^2$ है। घन के किसी एक फलक का परिमाप ज्ञात कीजिए।

16. तीन धातु के घन जिनके किनारे क्रमशः 3cm, 4cm तथा 5cm माप के हैं, को पिघलाकर एक घन बनाया गया है। नये घन का किनारा ज्ञात कीजिए।

17. एक कमरे की लंबाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 5m, 4m तथा 3m है। ₹ 7.50 प्रति m^2 की दर से कमरे की दीवारों और छत पर सफेदी करने का व्यय ज्ञात कीजिए।

18. 3 गोले जिनकी त्रिज्याएँ 3cm, 4cm और 5 cm है को पिघलाकर एक बड़ा गोला बनाया जाता है। नये गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

19. यदि एक बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $176cm^2$ है और आधार का क्षेत्रफल $38.5cm^2$ है तो बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए।

20. एक बेलन और शंकु समान ऊँचाई व समान त्रिज्या के हैं। बेलन का आयतन $24cm^3$ है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

21. उस बड़े से बड़े शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए जो 7 सेमी. त्रिज्या वाले खोखले अर्द्धगोले में पूर्ण रूप से घिरा हो।

22. घनाभ 22.5 cm × 10 cm × 7.5 cm के अंदर रखी जा सकने वाली सबसे लंबी छड़ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

खण्ड–स

23. एक घनाभकार जार की लम्बाई 10m और चौड़ाई 8m हैं। इसमें $380m^3$ द्रव भरा जा सकता है तो जार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

24. एक दीवार 10m लम्बी, 4m ऊँचाई और 24cm मोटी, खुले मैदान में बनाने के लिए 24cm x 10xm x 8cm विमाओं वाले कितने ईंटों की आवश्यकता होगी?

25. $1.1cm^3$ आयतन वाले सोने को ढालकर 0.1mm व्यास वाले कितने लम्बे तार को बनाया जा सकता है?

26. आन्तरिक व्यास 36cm वाला एक अर्द्धगोलाकार कटोरा द्रव से भरा है। इस द्रव को 3cm त्रिज्या तथा 6cm ऊँचाई वाले बेलनाकार बोतलों में भरा जाना है। कटोरे को खाली करने के लिए ऐसी कितनी बोतलों की आवश्यकता होगी?

27. ज्ञात कीजिए :

    i) एक बेलनाकार पेट्रोल की बंद टंकी का पार्श्व या वक्रपृष्ठीय क्षेत्रफल जिसका प्यास 4.2 मीटर है और ऊँचाई 4.5 मीटर है।

    ii) इस टंकी को बनाने में कुल कितना इस्पात (स्टील) लगा होगा, यदि कुल इस्पात का $\frac{1}{12}$ भाग बनाने में नष्ट हो गया है?

28. 30 डेसीमीटर चौड़ी तथा 12 डेसी मीटर गहरी नहर में 20 किमी. प्रति घंटा की चाल से पानी बह रहा है। 30 मिनट में यह कितने क्षेत्र की सिंचाई करेगी यदि क्षेत्र में भरे पानी की ऊँचाई 9 सेमी. हैं?

(10 डेसीमीटर = 10dm = 1m)

29. एक गोले की त्रिज्या 10 सेमी. है। यदि गोले की त्रिज्या 1 सेमी. बढ़ा दी जाए तो सिद्ध कीजिए कि गोले का आयतन 33.1% बढ़ जायेगा।

30. यदि किसी अर्द्धगोले के व्यास में 30% की कमी कर दी जाए तो उसके संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन होगा?

31. एक गोले तथा एक घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल समान है। उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

32. एक गोले का आयतन $4851 cm^3$ है। इसकी त्रिज्या में कितनी कमी कर दी जाए कि इसका आयतन $\frac{4312}{3} cm^3$ हो जाए।

33. एक अर्धवृत्तकार कागज की शीट का व्यास 14 सेमी. है। इस शीट को मोड़कार एक खुला शंक्वाकार कप बनाया गया। इस कप की धारिता ज्ञात कीजिए।

34. यदि c, t तथा v एक बेलन के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल, कुल पृष्ठीय तथा आयतन हों तो, दर्शाइए

$$th^2 = ch^2 + 4v^2 + 8v^2rh$$

जहां r तथा h, बेलन की त्रिज्या तथा ऊंचाई हैं।

खण्ड–द

35. एक घनाभकार टंकी में 5040 लीटर पानी आ सकता है। टंकी की बाहरी विमाएँ 2.2m x 1.7m x 1.7m हैं। यदि टंकी की दीवारों की मोटाई 5cm हो तो टंकी के तल की मोटाई क्या होगी?

36. एक आयताकार धातु की चादर की विमाएँ 48cm x 36cm है। प्रत्येक कोनों से 8cm भुजा के वर्ग काटे गए हैं। बची हुई शेष चादर से एक खुला बॉक्स बनाया गया है। बॉक्स का आयतन ज्ञात कीजिए।

37. एक समकोण त्रिभुज जिसकी भुजाएँ 6cm, 8cm तथा 10cm हैं। समकोण त्रिभुज को 8cm भुजा से घुमाने पर बनने वाले शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

38. एक लम्बवृत्तीय शंकु 5.4cm ऊँचाई तथा जिसके आधार की त्रिज्या 2cm है। इसे गलाकर दूसरा शंकु बनाया जाता है। जिसके आधार की त्रिज्या 1.5cm हो तो नए बने शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

39. एक बेलनाकार टब की त्रिज्या 12 cm है जिसमें 20cm गहराई तक पानी है। एक गोले को टब में डालने पर पानी की ऊँचाई 6.75cm बढ़ जाती है। तो गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

40. एक बेलन घन के भीतर इस प्रकार है कि वह इसकी सभी उर्ध्वाधर सतहों को स्पर्श करता है। बेलन के भीतर एक शंकु इस प्रकार रखा गया है कि उनकी ऊँचाईयाँ समान है तथा वे एक ही आधार पर बने हैं। उनके आयतनों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

41. एक भूमि का भाग आयताकार है जिसकी विमाएँ 240m x 180m है। इसके बाहर से चारों ओर 10m चौड़ा नाला खोदा गया है तथा खुदी हुई मिट्टी को भूमि के टुकड़े पर समान रूप से फैला दिया गया है जिससे कि भूमि का तल 25cm बढ़ जाता है। नाले की गहराई ज्ञात कीजिए।

42. एक आवासीय कॉलोनी में रहने वाले 5400 व्यक्तियों को 60 लीटर पानी की प्रतिदिन प्रतिव्यक्ति आवश्यकता होती है। वर्षा के पानी का प्रभावी सदुपयोग के लिए कॉलोनी के कुछ व्यक्तियां के समूह ने 'जल संरक्षण' की योजना बनाई। उन्होंने वर्षा के पानी के संचय के लिए 48mx 27mx 25m का जलाशय तैयार किया।

यदि वर्षा के दौरान पानी का जल स्तर 5m है तो यह पानी कितने दिनों के लिए पर्याप्त होगा?

43. कक्षा–9 के 50 छात्रों ने वृद्धाश्रम में एक दिन बिताने और घूमने की योजना बनाई। प्रत्येक छात्र ने उपहार देने के लिए बेलनाकार कार्ड बोर्ड का फूलदान बनाया जिसकी त्रिज्या 4.2cm तथा ऊँचाई 11.2cm है।

    ₹ 20 प्रति 100 cm^2 की दर से कुल कितना खर्च आयेगा?

44. राहुल ने आवारा कुत्तों के लिए अस्थाई आवास बनाने के लिए चारों भुजाओं और छत पर तिरपाल लगाकर एक बॉक्स बनाया, जिसकी ऊँचाई 2.5m तथा आधार की विमाएँ 4m x 3m हैं तो इसके लिए कितने तिरपाल की आवश्यकता होगी?

45. लोहे के सत्ताइस ठोस गोलों को पिघलाकर जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r है और पृष्ठीय क्षेत्रफल S है, एक बड़ा गोला बनाया जाता है जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल S′ है ज्ञात कीजिए

    i) नए गोले की त्रिज्या R

    ii) S तथा S′ का अनुपात

46. धातु से बनी गेंद का व्यास 4.2 cm है। यदि धातु का घनत्व 8.9 ग्राम प्रति cm^3 हो तो गेंद का द्रव्यमान क्या होगा?

47. सीसे की एक पेंसिल (Lead Pencil) लकड़ी के एक बेलन के अभ्यंतर में ग्रेफाइट (Graphite) से बने ठोस बेलन को डालकर बनाई गई है। पेंसिल का व्यास 7mm है और ग्रेफाइट का व्यास 1mm है। यदि पेंसिल की लम्बाई 14cm है, तो लकड़ी का आयतन और ग्रेफाइट का आयतन ज्ञात कीजिए।

48. एक सोफ्ट ड्रिंक (Soft Drink) दो प्रकार के पैकों में उपलब्ध है। (i) लम्बाई 5cm और चौड़ाई 4cm. वाले एक आयताकार टिन का डिब्बा जिसकी

ऊँचाई 15cm है और (ii) व्यास 7cm वाले वृत्तीय आधार और 10cm ऊँचाई वाले एक प्लास्टिक का बेलनाकार डिब्बा। किस डिब्बे की धारिता अधिक है और कितनी अधिक है?

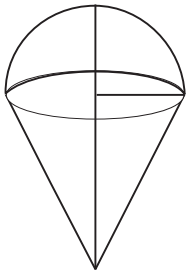
49. किसी बस स्टाप को पुराने गत्ते से बने 50 खोखले शंकुओं द्वारा सड़क से अलग किया हुआ है। प्रत्येक शंकु के आधार का व्यास 40cm है और ऊँचाई 1m है। यदि इन शंकुओं की बाहरी पृष्ठों को पेंट करवाना है और पेंट की दर ₹12 प्रति m^2 है, तो इनको पेंट कराने में कितनी लागत आएगी? (p = 3.14 और $\sqrt{1.04} = 1.02$ का प्रयोग कीजिए।)

50. आंशिक रूप से पानी से भरे एक लम्बवृत्तीय बेलन में 6cm व्यास वाले एक गोले को गिराया जाता है। बेलनाकार बर्तन का व्यास 12cm है। यदि गोला पानी में पूर्णतया डूब जाता है तो बताइए कि बेलनाकार बर्तन में पानी का स्तर कितना उठ जायेगा?

51. 7cm व्यास वाले बेलनाकार बीकर में जिसमें कुछ पानी भरा हुआ है, मार्बल से बनी 1.4cm व्यास वाली गोलियाँ डाली जाती है। 5.6cm पानी के स्तर को उठाने के लिए बीकर में डाली जाने वाली मार्बल की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

52. 12cm व्यास तथा 15cm ऊँचाई वाले लम्ब वृत्तीय बेलन आइसक्रीम से पूरा भरा है। इस आइसक्रीम को 12cm ऊँचाई वाले शंकुओं से भरा जाता है और इसका ऊपरी सिरा 6cm व्यास वाली अर्द्धगोलाकार आकृति बनाता है। आइसक्रीम से बने ऐसे शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

53. एक खिलौना जिसे शंकु के ऊपर 7cm व्यास वाले एक अर्द्धगोले को रखकर बनाया गया है। खिलौने की कुल ऊँचाई 14.5 सेमी है। खिलौने का आयतन व कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



54. यदि शंकु की ऊँचाई, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन को क्रमशः h, c तथा v से व्यक्त किया जाए तो सिद्ध कीजिए कि $3\pi vh^3 - c^2h^2 + 9v^2 = 0$

55. एक लकड़ी के खुले बक्से की विमाएं 36 × 24 × 25 हैं। बक्सा 2cm मोटा है। यदि लकड़ी का घनत्व $100 g/m^3$ हो तो लकड़ी का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए।

56. एक आयताकार टंकी 210 मीटर लंबी तथा 75 मी. चौड़ी है। इस टंकी में 25 सेमी. वाले पाइप से पानी इस तरह गिर रहा है कि 15 घंटे में टंकी में पानी का स्तर 3–5 मी. ऊंचा उठ जाता है। पाइप में पानी के बहने की रफ्तार ज्ञात कीजिए।

57. एक अर्धगोलाकार कटोरे को ₹ 20 प्रति 100 वर्ग मीटर की लागत से अंदर से रंगना है। रंगाई का कुल खर्च ₹ 30.80 है। ज्ञात कीजिए

(i) कटोरे का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल

(ii) कटोरे के अंदर मौजूद हवा का आयतन

अध्याय 13

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

उत्तर

1. $512\,cm^2$
2. $180\,cm^2$
3. 20 : 27
4. $550m^2$
5. 4 : 3
6. 28cm
7. $\pi r\left(\ell+\frac{r}{4}\right)$
8. 2:1
9. 1:4
10. $V=\frac{1}{12}\pi r^3$
11. 2.8 cm
12. 500
13. 2m, 4m, 6m
14. $269.5cm^2$
15. 20cm
16. 6 cm
17. Rs. 555
18. 6 cm
19. $308\ cm^3$
20. $8\ cm^3$
21. $359.33cm^3$
22. 25.7 cm
23. 4.75 m
24. 5000
25. 140 m
26. 72
27. $59.4m^2, 95.04m^2$
28. $4,00,000\ m^2$
30. 51%
31. $\sqrt{6} : \sqrt{\pi}$
32. 6.5cm
33. $79.2\ cm^3$
35. 10cm
36. $5120cm^3$
37. $96\pi cm^3$
38. 9.6cm
39. 9 cm
40. V1 : V2 : V3 = 42:33:11
41. 1.227 m
42. 20 days
43. ₹3511.20
44. $47m^2$
45. i) R=3r (ii) $S : S^1 = 1 : 9$
46. 345.39g
47. $5.28cm^3$, $0.11\ cm^3$
48. Plastic Cylinder, $85\ cm^3$
49. 384.34
50. 1 cm
51. 150
52. 10
53. $231cm^3$, $204.05cm^2$
55. 3968 g
56. 58.8 km/hr
57. (i) $154\ m^2$, (ii) $251.5\ m^3$

पृष्ठीय, क्षेत्रफल तथा आयतन

अभ्यास परीक्षा

Time : 50 Min. M.M. 20

1. यदि किसी कमरे की लंबाई l, चौड़ाई b तथा ऊँचाई h हो तो कमरे की दीवारों का कुल क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (1)

(1)

2. किसी गोले का आयतन 310.4 cm^3 है।। उसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए। (2)

3. बेलन के आधार की परिधि 3.80 सेमी. है। उसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल 289.52cm^2 है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। (2)

4. एक घन की भुजा किसी धनाभ की लंबाई की दुगुनी है। धनाभ की चौड़ाई तथा ऊँचाई उसकी लंबाई की आधी है। घन तथा घनाभ के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुपात ज्ञात कीजिए। (2)

5. एक भुट्टे का दाना 1.8 × 0.8 × 0.2 cm. विमाओं का है। भुट्टे की कुल ऊँचाई 13.7 सेमी. तथा त्रिज्या 4.2 सेमी है। ऐसा मानते हुए कि दानों का आकार समान है तथा दानों के बीच की दूरी नगण्य है, भुट्टे पर लगें दानों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए। (3)

6. घनाभ की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई को 30%. बढ़ा दिया जाता है। घनाभ के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल में हुई वृद्धि का प्रतिशत ज्ञात कीजिए। (3)

7. अजय ने एक व्यंजन बनाया तथा व्यंजन को 30 सेमी. व्यास वाले अर्धगोलाकार बर्तन में रखा। उसने व्यंजन को 15 सेमी. व्यास तथा 4 सेमी. ऊँचाई वाले आयताकार कपों में भरकर अपने तथा अपने दोस्तों में बांट दिया। अजय के दोस्तों की संख्या कितनी है? (4)

8. एक 15 मी. गहरी तथा 50 मी. चौड़ी नदी 2 सेमी. प्रति सैकेंड की दर से बह रही है। 9 घंटों में उस नदी से कितना लीटर पानी समुद्र में गिरेगा? (4)