This Question Paper consists of **33 questions** and **11 printed pages+Graph sheet**.
इस प्रश्न-पत्र में **33 प्रश्न** एवं **11 मुद्रित पृष्ठ+ग्राफ शीट** हैं।

Roll No.
अनुक्रमांक

Code No.
कोड नं. **54/OSS/1**

MATHEMATICS
गणित
(311)

Set/सेट A

Day and Date of Examination
(परीक्षा का दिन व दिनांक) ______________________

Signature of Invigilators 1. ______________________
(निरीक्षकों के हस्ताक्षर)
2. ______________________

General Instructions :

1. Candidate must write his/her Roll Number on the first page of the Question Paper.
2. Please check the Question Paper to verify that the total pages and total number of questions contained in the Question Paper are the same as those printed on the top of the first page. Also check to see that the questions are in sequential order.
3. Making any identification mark in the Answer-Book or writing Roll Number anywhere other than the specified places will lead to disqualification of the candidate.
4. Write your Question Paper Code No. **54/OSS/1-A** on the Answer-Book.
5. (a) The Question Paper is in English/Hindi medium only. However, if you wish, you can answer in any one of the languages listed below :
   English, Hindi, Urdu, Punjabi, Bengali, Tamil, Malayalam, Kannada, Telugu, Marathi, Oriya, Gujarati, Konkani, Manipuri, Assamese, Nepali, Kashmiri, Sanskrit and Sindhi.
   You are required to indicate the language you have chosen to answer in the box provided in the Answer-Book.
   (b) If you choose to write the answer in the language other than Hindi and English, the responsibility for any errors/mistakes in understanding the question will be yours only.

सामान्य अनुदेश :

1. परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र के पहले पृष्ठ पर अपना अनुक्रमांक अवश्य लिखें।
2. कृपया प्रश्न-पत्र को जाँच लें कि प्रश्न-पत्र के कुल पृष्ठों तथा प्रश्नों की उतनी ही संख्या है जितनी प्रथम पृष्ठ के सबसे ऊपर छपी है। इस बात की जाँच भी कर लें कि प्रश्न क्रमिक रूप में हैं।
3. उत्तर-पुस्तिका में पहचान-चिह्न बनाने अथवा निर्दिष्ट स्थानों के अतिरिक्त कहीं भी अनुक्रमांक लिखने पर परीक्षार्थी को अयोग्य ठहराया जायेगा।
4. अपनी उत्तर-पुस्तिका पर प्रश्न-पत्र की कोड संख्या **54/OSS/1-A** लिखें।
5. (क) प्रश्न-पत्र केवल हिंदी/अंग्रेजी में है। फिर भी, यदि आप चाहें तो नीचे दी गई किसी एक भाषा में उत्तर दे सकते हैं :
   अंग्रेजी, हिंदी, उर्दू, पंजाबी, बँगला, तमिल, मलयालम, कन्नड़, तेलुगू, मराठी, उड़िया, गुजराती, कोंकणी, मणिपुरी, असमिया, नेपाली, कश्मीरी, संस्कृत और सिंधी।
   कृपया उत्तर-पुस्तिका में दिए गए बॉक्स में लिखें कि आप किस भाषा में उत्तर लिख रहे हैं।
   (ख) यदि आप हिंदी एवं अंग्रेजी के अतिरिक्त किसी अन्य भाषा में उत्तर लिखते हैं तो प्रश्न को समझने में होने वाली त्रुटियों/गलतियों की जिम्मेदारी केवल आपकी होगी।

MATHEMATICS
गणित
(311)

Time : **3** Hours] [Maximum Marks : **100**

समय : **3** घण्टे] [पूर्णांक : **100**

Note :

(1) This question paper consists of **four Sections** A, B, C and D containing **33** questions.

(2) Question Number **1** to **10** in **Section A** are multiple choice questions (MCQ). Each question carries **one mark**. In each question there are **four** choices (A), (B), (C) and (D) of which only one is correct. You have to select the correct choice and indicate it in your answer book by writing (A), (B), (C) or (D) as the case may be. No separate time is allotted for attempting MCQ.

(3) Question Number **11** to **16** in **Section B** are very short answer questions and carry **2 marks** each.

(4) Question Number **17** to **28** in **Section C** are short answer questions and carry **4 marks** each.

(5) Question Number **29** to **33** in **Section D** are long answer questions and carry **6 marks** each.

(6) **All** question are **compulsory**. There is no overall choice, however, alternative choices are given in some questions. In such questions, you have to attempt only one choice.

निर्देश :

(1) इस प्रश्नपत्र में कुल 33 प्रश्न हैं, जो **चार खण्डों अ, ब, स** तथा **द** में विभाजित हैं।

(2) **खण्ड - अ** में प्रश्न संख्या **1** से **10** तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के लिए **1 अंक** निर्धारित है। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के रूप में (A), (B), (C) तथा (D) **चार** विकल्प दिए गए हैं जिन में से कोई एक सही है। आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी उत्तर पुस्तिका में (A), (B), (C) तथा (D) में जो सही हो उत्तर के रूप में लिखना है। बहुविकल्पीय प्रश्न हल करने के लिए अलग से समय नहीं दिया गया है।

(3) **खण्ड - ब** में प्रश्न संख्या **11** से **16** तक अतिलघु उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के **2 अंक** निर्धारित हैं।

(4) **खण्ड - स** में प्रश्न संख्या **17** से **28** तक लघु उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के **4 अंक** निर्धारित हैं।

(5) **खण्ड - द** में प्रश्न संख्या **29** से **33** तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के **6 अंक** निर्धारित हैं।

(6) **सभी** प्रश्न **अनिवार्य** हैं। पूर्ण प्रश्नपत्र में विकल्प नहीं है, फिर भी कुछ प्रश्नों में, आंतरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।

SECTION - A

खण्ड - अ

1. If $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, then $|3A|$ equals :

यदि $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ है, तो $|3A|$ का मान है :

(A) -45 (B) 45 (C) 15 (D) -15

2. The value of $(x+y)$ if $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ is :

यदि $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$ है, तो $(x+y)$ का मान है :

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

3. If the following lines are perpendicular to each other, then λ equals :
यदि निम्न रेखाएँ परस्पर लंबवत हैं, तो λ का मान है :

$$\frac{x-5}{7} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{1}, \frac{x+2}{\lambda} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+10}{3}$$

(A) -1 (B) 1 (C) $-\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

4. Which of the following sentences is **not** a mathematical statement ?

(A) 6 is less than 10 (B) The sun is not a star

(C) $\pi = \frac{22}{7}$ (D) How far is Lucknow from here ?

निम्न में से कौन-सा वाक्य एक गणितीय कथन **नहीं** है ?

(A) 6, 10 से छोटा है (B) सूर्य एक सितारा नहीं है

(C) $\pi = \frac{22}{7}$ है (D) लखनऊ यहाँ से कितनी दूर है ?

5. Let $R = \{(2, 3), (3, 3), (2, 2), (5, 5), (2, 4), (4, 4), (4, 3)\}$ be a relation on the set $\{2, 3, 4, 5\}$, then :

(A) R is reflexive and symmetric but not transitive

(B) R is reflexive and transitive but not symmetric

(C) R is symmetric and transitive but not reflexive

(D) R is an equivalence relation

माना $R = \{(2, 3), (3, 3), (2, 2), (5, 5), (2, 4), (4, 4), (4, 3)\}$ समुच्चय $\{2, 3, 4, 5\}$ पर एक संबंध है, तो :

(A) R स्वतुल्य और सममित है, परंतु संक्रामक नहीं है

(B) R स्वतुल्य तथा संक्रामक है परंतु सममित नहीं है

(C) R सममित तथा संक्रामक है परंतु स्वतुल्य नहीं है

(D) R एक तुल्यता संबंध है

6. The values of x for which $f(x) = |x| - |x+1|$ is discontinuous is :

(A) 0 (B) -1

(C) 1 (D) No values of x

x के वह मान जिनके लिए $f(x) = |x| - |x+1|$ असंतत है, हैं :

(A) 0 (B) -1

(C) 1 (D) x के किसी मान के लिए नहीं

7. If $y = e^x \sin x$, then $\frac{dy}{dx}$ equals :

यदि $y = e^x \sin x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है :

(A) $e^x(\sin x + \cos x)$ (B) $e^{-x}(\sin x - \cos x)$

(C) $e^x(\sin x - \cos x)$ (D) $e^{-x}(\sin x + \cos x)$

8. $\int \frac{x^2}{1 + x^3} dx$ equals :

$\int \frac{x^2}{1 + x^3} dx$ बराबर है :

(A) $\log|1 + 3x^2| + c$ (B) $\frac{1}{3}\log|1 + x^3| + c$

(C) $\log|1 + x^3| + c$ (D) $\frac{2}{3}\log|1 + x^3| + c$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$

(A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{6}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$

10. The degree of the following differential equation is :

निम्न अवकल समीकरण की घात है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$$

(A) 1 (B) 2

(C) 3 (D) Not defined/परिभाषित नहीं है

SECTION - B

खण्ड - ब

11. Find X and Y if $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ and $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

OR

Construct a 2×2 matrix A whose elements in the i^{th} row and j^{th} column are given by $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$.

यदि $X + Y = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ तथा $X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ है, तो X तथा Y ज्ञात कीजिए।

अथवा

2×2 का एक आव्यूह A बनाइए जिसकी i^{th} पंक्ति तथा j^{th} स्तम्भ के अवयव $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$ द्वारा प्रदत्त हैं।

12. Prove that $f : R \to R$ given by $f(x) = 2x$ is one-one and onto function.

सिद्ध कीजिए कि $f : R \to R$ जो $f(x) = 2x$ द्वारा प्रदत्त है, एकैकी तथा आच्छादक है।

13. Prove that :

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{x \to 2}\left(\frac{\sqrt{3-x}-1}{(2-x)}\right) = \frac{1}{2}.$$

14. If $y = e^x \sin x$, show that $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\, e^x \cos x$.

यदि $y = e^x \sin x$ है, तो दर्शाइए कि $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\, e^x \cos x$ है।

15. Find the area of the parallelogram whose diagonals are given by the vectors $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ and $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

उस समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण सदिशों $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ तथा $\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ द्वारा प्रदत्त हैं।

16. Write the contrapositive and converse of the following statement.

If you live in Kashmir, then you have winter clothes.

निम्न कथन का प्रतिस्थिति (contrapositive) तथा विलोम (converse) लिखिए।

यदि आप काश्मीर में रहते हैं, तो आपके पास सर्दी के कपड़े अवश्य होने चाहिए।

SECTION - C

खण्ड - स

17. Express the following matrix as the sum of a symmetric and a skew symmetric matrix.

निम्न आव्यूह को एक सममित तथा विषम सममित आव्यूहों के योग के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

18. Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - \vec{b}$ where

$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}\cdot$

यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ हैं, तो $\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} - \vec{b}$ दोनों की लम्बवत दिशा में एक इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

19. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, find $A^2 - 5A + 6I$.

OR

Using properties of determinants, prove the following :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है, तो $A^2 - 5A + 6I$ ज्ञात कीजिए।

अथवा

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

20. Prove the following :

निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{2}{11} = \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

21. Prove that $f: R \rightarrow R$ given by $f(x) = x^3 + 2$ is a bijection.

सिद्ध कीजिए कि $f: R \rightarrow R$ जो $f(x) = x^3 + 2$ द्वारा प्रदत्त है, एकैकी तथा आच्छादक है।

22. Find the value(s) of k if the following function $f(x)$ is continuous at $x = \frac{\pi}{2}$:

k का (के) मान ज्ञात कीजिए कि निम्न फलन $f(x)$, $x = \frac{\pi}{2}$ पर संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k \cos x}{\pi - 2x}, & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 3, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

23. If $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x + \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

24. Find the intervals in which the following function is (a) increasing (b) decreasing.

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x$

OR

Show that the normal at any point θ to the curve $x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$, $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$ is at a constant distance from the origin.

निम्न फलन के लिए वह अन्तराल ज्ञात कीजिए जिनमें फलन (क) वर्धमान है (ख) ह्रासमान है।

$f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x$

अथवा

दर्शाइए कि वक्र $x = a(\cos \theta + \theta \sin \theta)$, $y = a(\sin \theta - \theta \cos \theta)$ के किसी बिंदु θ पर अभिलंब मूल बिंदु से अचर दूरी पर है।

25. Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$$

26. Solve the following differential equation :

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = y\cos\left(\frac{y}{x}\right) + x$$

27. If $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$, find a vector $\vec{c}$ such that $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ and $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$.

यदि $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ तथा $\vec{b} = \hat{j} - \hat{k}$ है, तो एक ऐसा सदिश $\vec{c}$ ज्ञात कीजिए कि $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b}$ तथा $\vec{a} \cdot \vec{c} = 3$ ।

28. Find :

$$\int \frac{x + 2}{2x^2 + 6x + 5}\, dx$$

OR

Find :

$$\int \frac{8}{(x + 2)(x^2 + 4)}\, dx$$

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x + 2}{2x^2 + 6x + 5}\, dx$$

अथवा

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{8}{(x + 2)(x^2 + 4)}\, dx$$

SECTION - D
खण्ड - द

29. Find the adjoint of the matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ and show that $A(\text{adj } A) = |A|I$.

OR

Using matrices, solve the following system of equations :

$x + y + z = 2,\ 2x - y = 3,\ 2y + z = 0$

आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ का सहखंडज ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि $A(\text{adj } A) = |A|I$.

अथवा

आव्यूहों के प्रयोग से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$x + y + z = 2,\ 2x - y = 3,\ 2y + z = 0$

30. The perimeter of a triangle is 16 cm. If one side is 6 cm, find the other two sides so that the area of the triangle is maximum.

OR

Given the sum of the perimeters of a circle and square, show that the sum of their areas is least when the diameter of the circle is equal to side of the square.

एक त्रिभुज का परिमाप 16 से.मी. है। यदि एक भुजा 6 से.मी. लंबी है, तो शेष दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम हो।

अथवा

यदि एक वृत्त तथा एक वर्ग के परिमापों का योग दिया है, तो दर्शाइए कि उनके क्षेत्रफलों का योग न्यूनतम होगा यदि वृत्त का व्यास वर्ग की भुजा के बराबर है।

31. Find the area enclosed by the circle $x^2 + y^2 = a^2$ and y-axis in the first quadrant.

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ तथा y-अक्ष से घिरे प्रथम चतुर्थांश के क्षेत्रफल को ज्ञात कीजिए।

32. Find the equation of the plane passing through the intersection of two planes $x + 2y + 3z - 4 = 0$ and $2x + y - z + 5 = 0$ and which is perpendicular to the plane $5x + 3y - 6z + 8 = 0$.

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $x + 2y + 3z - 4 = 0$ तथा $2x + y - z + 5 = 0$ के प्रतिच्छेद से होकर जाता है तथा समतल $5x + 3y - 6z + 8 = 0$ के लंबवत है।

33. In a small scale industry, a manufacturer produces two types of book cases. The first type of book case requires 3 hours on machine A and 2 hours on machine B for completion whereas the second type of book case requires 3 hours on machine A and 3 hours on machine B. The machines A and B respectively run for at the most 18 hours and 14 hours per day. He earns a profit of ₹ 30 on each type of case of first type and ₹ 40 on each book case of second type. How many book cases of each type should he manufacture so as to have maximum profit. Make it an LPP and solve it graphically.

एक छोटे कारखाने का मालिक दो प्रकार के पुस्तक केस बनाता है। प्रथम प्रकार का पुस्तक केस बनाने में मशीन A पर 3 घंटे तथा मशीन B पर 2 घंटे लगते हैं जबकि दूसरे प्रकार के पुस्तक केस को बनाने पर मशीन A पर 3 घंटे तथा मशीन B पर भी 3 घंटे लगते हैं। मशीनें A तथा B क्रमश: प्रतिदिन अधिक से अधिक 18 घंटे तथा 14 घंटे तक चल सकती हैं। पहले प्रकार के प्रत्येक पुस्तक केस पर ₹ 30 लाभ तथा दूसरे प्रकार के पुस्तक केस पर ₹ 40 लाभ मिलता है। कारखाने का मालिक कितने-कितने दोनों प्रकार के पुस्तक केस अलग-अलग बनाए कि उसे अधिकतम लाभ हो। उपरोक्त को एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए।

- o 0 o -