The name "Promising Trust"

JAS-ANZ

ISO 9001:2000 CERTIFIED

RAJ RAJESH INSTITUTE

(STUDY MATERIAL)

HINDI MEDIUM

GEOMETRY & MENSURATION

BY- RAHUL RAJ

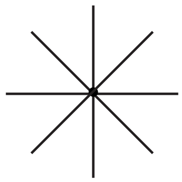
ADDRESS : 2ND & 3RD FLOOR, GOPAL MARKET, NAYA TOLA, PATNA - 4
CONTACT : +91- 9334112353 / 9308782240 / 9934090486
WEBSITE : www.rajrajeshinstitute.com

GEOMETRY

ZERO DIMENSION / NO DIMENSION

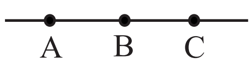
1) POINT (बिन्दु) **:** बिन्दु वह है जिसमें न लम्बाई न चौड़ाई और न मोटाई होता है।

Note-1 : किसी एक बिन्दु से अनंत रेखाएँ गुजरती है।

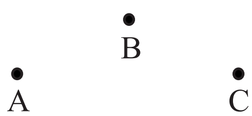


Note -2 : दो विभिन्न बिन्दुओं से एक और केवल एक रेखा खींचा जा सकता है।

Note – 3 : तीन या अधिक बिन्दुएँ सरेख (Collinear points) कहलाती हैं यदि वे एक ही रेखा पर स्थित हो । तीन या अधिक बिन्दुएँ जो एक रेखा पर स्थित नहीं हो असरेख बिन्दुएँ (Non-collinear points) कहलाती हैं।



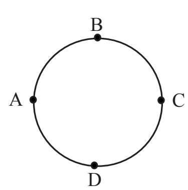
A, B & C सरेख बिन्दु हैं ।



A, B & C असरेख बिन्दु हैं ।

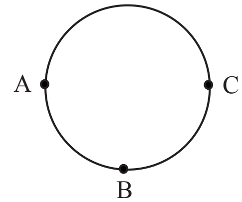
=> दो बिन्दुएँ सदा सरेख होती है ।

Note- 4 : चार या चार से अधिक बिन्दुएँ एकवृत्तीय (Concyclic) कहलाती हैं यदि इनसे होकर एक वृत्त गुजरें।



A, B, C & D एकवृत्तीय बिन्दुएँ हैं ।

Note-5 : कोई भी तीन असरेख (Non collinear points) बिन्दुएँ हमेश्षा एकवृत्तीय (Concyclic) होता है।



Note-6 : एक वृत्त हमेशा तीन असरेख बिन्दुओं से होकर गुजरती है।

ONE DIMENSION

1) LINE (रेखा) **:** ऐसी सरल रेखा जो दोनों तरफ अनन्त दूरी तक बढ़ी होती है।

रेखा PQ $(\overleftrightarrow{PQ})$

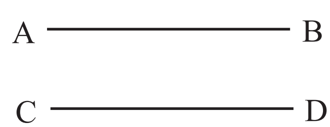
2) LINE SEGMENT (रेखाखण्ड) **:** रेखाखण्ड, रेखा का एक टुकड़ा होता है जिसका दो अन्त बिन्दु होता है।

रेखाखण्ड PQ ($\overrightarrow{PQ}$ or PQ)

3) RAY (किरण) **:** एक रेखा का वह भाग जिसका एक अंत बिन्दु हो एक किरण कहलाती है।

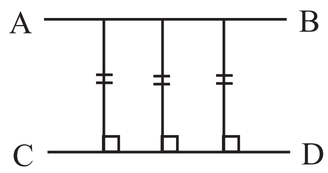
किरण PQ $(\overleftarrow{PQ})$

4) PARALLEL LINES (समान्तर / समानांतर या अप्रतिच्छेदी रेखाएँ) **:** एक तल की दो भिन्न रेखाएँ समान्तर कहलाती है यदि उनमें कोई भी बिन्दु उभयनिषठ नहीं हो चाहे वे दोनों तरफ कितनी भी बढ़ाई जाय ।



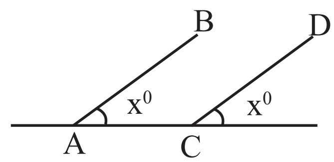
AB | | CD

Note-1: दो समांतर रेखाओं के बीच लम्बवत् दूरी हमेशा समान होता है ।



AB | | CD

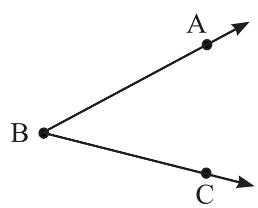
Note-2 : यदि दो रेखाखण्ड एक ही सतह के साथ समान कोण बनाये तो दोनों रेखाएँ समांतर होगी ।



AB | | CD

<u>TWO DIMENSION</u>

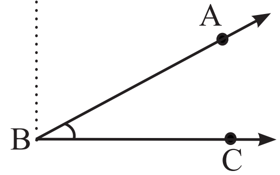
1) ANGLE (कोण) **:** यदि दो रेखाखण्डों या किरणों का एक ही अन्त बिन्दु (end point) हो तो इससे बनी आकृति को कोण कहते हैं। अन्त बिन्दु कोण का शीर्ष (Vertex) कहलाता है ।



कोण ABC (∠ABC)

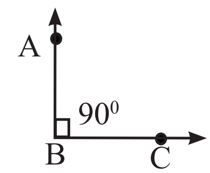
<u>कोण के प्रकार **(Types of Angle)**</u>
(According to measurement of angle)

1) Acute Angle (न्यूनकोण) : वह कोण जिसकी माप 90^0 से कम हो न्यूनकोण कहलाता है।



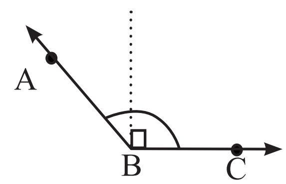
न्यूनकोण ABC (∠ABC < 90^0)

2) Right Angle (समकोण) **:** वह कोण जिसकी माप 90^0 हो समकोण कहलाता है।



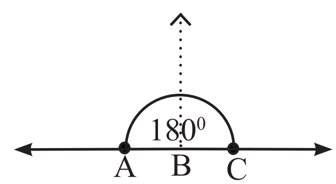
समकोण ABC (∠ABC = 90^0)

3) Obtuse Angle (अधिककोण) **:** वह कोण जिसकी माप 90^0 से अधिक तथा 180^0 से कम हो अधिक कोण कहलाता है।



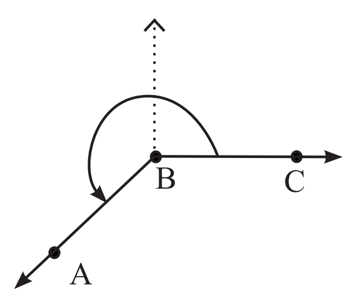
अधिक कोण ABC (90^0 < ∠ABC < 180^0)

2) Straight Angle (ऋजुकोण) **:** वह कोण जिसकी माप 180^0 हो उसे ऋजु या सरल कोण कहते हैं ।



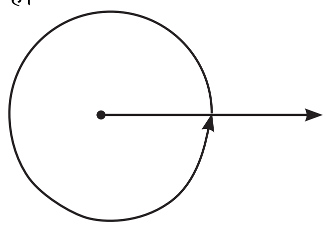
ऋजु कोण ABC (∠ABC = 180^0)

5) Reflex Angle (पुनर्युक्त कोण या प्रतिवर्त्ती कोण)**:** वह कोण जिसकी माप दो समकोण (180^0) से बड़ा तथा चार समकोण (360^0) से छोटा हो उसे पुनर्युक्त कोण कहते हैं ।



पुनर्युक्त कोण ABC (180^0 < ∠ABC ∠360^0)

6) **Complete Angle** (सम्पूर्ण कोण) **:** संपूर्ण कोण का मान 360^0 होता है।

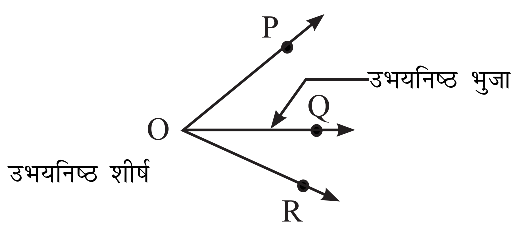


TERMS RELATED TO ANGLE
(कोण से संबंधित शब्द)

1) **Complementary Angles** (पूरक कोण)**:** यदि दो कोणों की मापों का योग 90^0 हो तो उन्हें पूरक कोण कहते हैं।

2) **Supplementary Angles** (सम्पूरक कोण) **:** यदि दो कोणों की मापों का योग 180^0 हो, तो उन्हें सम्पूरक कोण कहते हैं ।

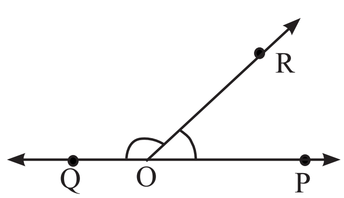
3) **Adjacent Angles** (आसन्न कोण) **:** दो कोणों को आ. सन्न कोण कहते हैं यदि उनका शीर्षा एक ही बिन्दु हो, उनकी एक उभयनिषठ भुजा (Common arm) हो और एक कोण की दूसरी भुजा उभयनिषठ भुजा के एक ओर हो और दूसरे कोण की दूसरी भुजा उभयनिषठ भुजा के दूसरी ओर हो ।



$\angle POQ$ और $\angle QOR$ आसन्न कोण हैं ।

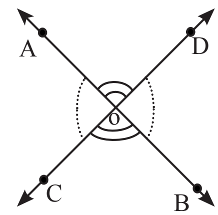
4) **Linear Pair Angles** (रैखिक युग्म कोण) **:** दो आसन्न कोणों (Adjacent Angles) जिनकी भिन्न भुजाएँ दो विपरीत किरणें हों, रैखिक युग्म कोण कहलाता है।

रैखिक युग्म कोण (दोनों कोण को मिलाकर) 180^0 का होता है।



$\angle POR + \angle QOR = 180^0$

5) **Vertically Opposite Angles** (शीर्षाभिमुख कोण) **:** दो कोणों को शीर्षाभिमुख कोण युग्म कहते है यदि उनकी भुजाएँ विपरीत किरणों के दो युग्म हों ।

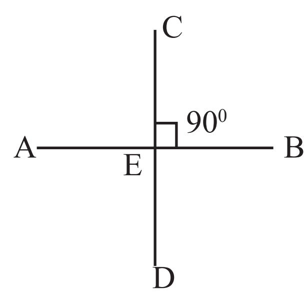


($\angle AOD$ और $\angle BOC$) शीर्षाभिमुख कोण का एक युग्म है और ($\angle AOC$ और $\angle BOD$) शीर्षाभिमुख कोण का दूसरा युग्म है।

Note : जब दो रेखाएँ एक दूसरे को काटती है तो शीर्षाभिमुख कोण समान होता है ।

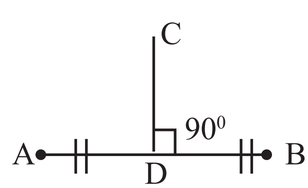
$\angle AOC = \angle BOD$ और $\angle AOD = \angle BOC$

6) **Perpendicular** (लम्ब) **:** दो रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब कहलाती है यदि उनके बीच का कोण 90^0 है।



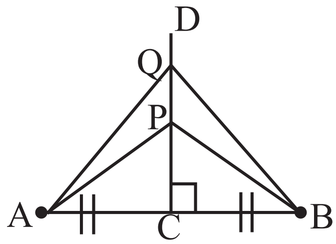
AB और CD एक दूसरे के लम्बवत् हैं। $CD \perp AB$

7) **Perpendicular Bisector** (लम्ब समद्विभाजक) **:** यदि एक रेखा किसी रेखाखण्ड पर लम्ब हो और रेखाखण्ड को दो बराबर भाग में बाँटे तो वह रेखा लम्ब समद्विभाजक कहलाता है।



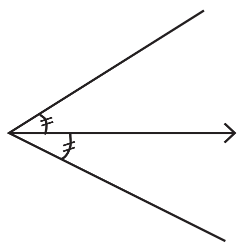
CD, AB का लम्ब समद्विभाजक है।

Note : लम्ब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिन्दु दोनों अंत बिन्दु से समदूरस्थ (Equidistant) होता है।

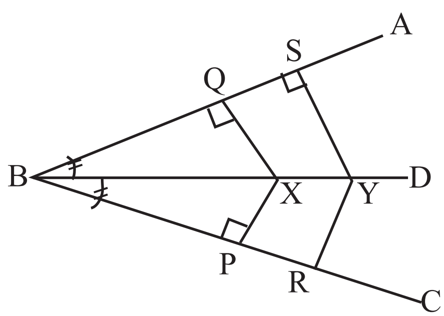


AP = PB | AQ = QB

8) Angle Bisector (अर्द्धक) **:** यदि एक रेखा किसी कोण को दो बराबर भागों में बाँटे तो वह रेखा अर्द्धक कहलाता है।



Note : अर्द्धक पर स्थित प्रत्येक बिन्दु दोनों भुजाओं से समान दूरी पर स्थित होता है।

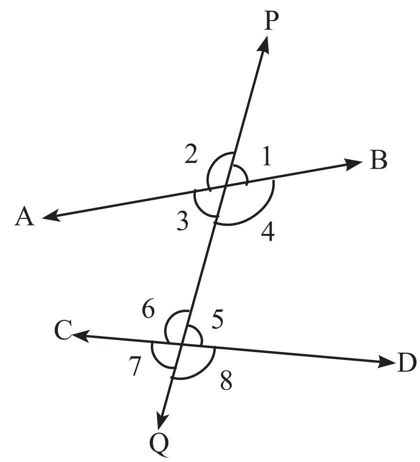


PX = QX | RY = SY

TRANSVERSAL (तिर्यक)

Transversal (तिर्यक)**:** यदि एक रेखा दो या दो से अधिक रेखाओं की भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर काटे तो उसे उन दी हुई रेखाओं की तिर्यक रेखा कहते हैं ।

तिर्यक के द्वारा बनाया गया कोण (Angle formed by transversal)



PQ एक तिर्यक रेखा है।

** तिर्यक **8** कोण बनाता है।

1) **Exterior Angles** (बाह्य कोण) **:** 1, 2, 7, & 8

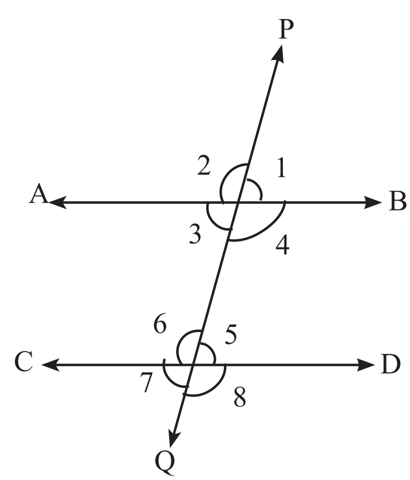
2) **Interior Angles** (अंतः कोण) **:** 3, 4, 5 & 6

3) **Four pairs of corresponding angles** (संगत कोण)**:** (2, 6), (1,5), (3,7) & (4,8)

4) **Two pairs of Alternate Interior Angles** (एकांतर अंतः कोण) **:** (3, 5) & (4, 6)

5) **Two pairs of Alternate Exterior Angles** (एकांतर बाह्य कोण) **:** 2 pair **-** (2, 8) & (1, 7)

समानांतर रेखाओं के तिर्यक



AB || CD एवं PQ तिर्यक है ।

1) संगत कोण के युग्म बराबर होते हैं ।

$\angle 1 = \angle 5,\ \angle 2 = \angle 6,\ \angle 3 = \angle 7$

& $\angle 4 = \angle 8$

2) एकांतर कोण के युग्म (अंत: एवं बाह्य) बराबर होते हैं।

$\angle 3 = \angle 5,\ \angle 4 = \angle 6,\ \angle 2 = \angle 8$

& $\angle 1 = \angle 7$

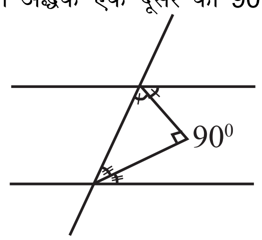
3) तिर्यक के एक की तरफ के अंत: कोणों या बाह्य कोणों का योगफल 180^0 होता है।

$\angle 3 + \angle 6 = \angle 4 + \angle 5 = \angle 2 + \angle 7$

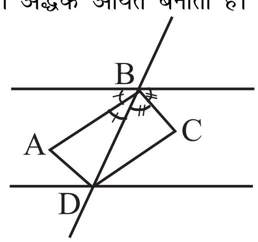
$= \angle 1 + \angle 8 = 180^0$

Note : यदि दो रेखाओं को एक तिर्यक काटती है एवं उपरोक्त में से कोई एक स्थिति को सही पाया जाता है तो दोनों रेखाएँ समांतर होगी ।

4) अंत: कोणों का अर्द्धक एक दूसरे को 90^0 पर काटता है।

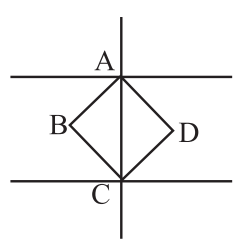


5) अंत: कोणों का अर्द्धक आयत बनाता है।



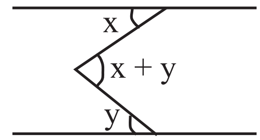
ABCD आयत है।

6) यदि तिर्यक लंबवत् हो तो अंत: कोणों का अर्द्धक वर्ग बनाता है।

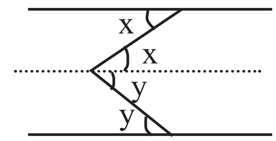


ABCD वर्ग है।

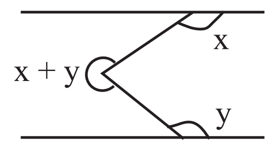
7)



Proof :



8)



(कोण की माप)

<u>MEASUREMENT OF ANGLE</u>

कोणों को मापने का तीन तरीका प्रयोग किया जाता है।

1) षाष्टिक पद्धति (Sexagesimal System or English System) (Degree)

2) गतिक पद्धति (Centesinal System or French System) (Grade)

3) वृत्तीय माप (Circular measurement) (radian)

1) षाष्टिक पद्धति **(Sexagesimal or English System) (Degree) :** इस पद्धति में एक समकोण को 90 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है, जिसे डिग्री / अंश कहा जाता है। प्रत्येक डिग्री को 60 बराबर भागों में विभाजित किया जाता है जिसे 'मिनट' कहते हैं और इसी प्रकार प्रत्येक मिनट को 60 बराबर भागों में बाँटा जाता है जिसे सेकेण्ड कहते हैं ।

60 सेकेण्ड (60")	= 1 मिनट (1')
60 मिनट (60')	= 1 डिग्री (1^0)
90 डिग्री (90^0)	= 1 समकोण

2) गतिक पद्धति **(Centesimal system or French System) (Grade) :** इस पद्धति में एक समकोण को 100 बराबर भागों में बाँटा जाता है जिसे ग्रेड कहते हैं । प्रत्येक ग्रेड को 100 बराबर भागों में बाँटा जाता है जिसे 'मिनट' कहते है और प्रत्येक मिनट को 100 बराबर भागों में बाँटा जाता है जिसे सेकण्ड कहते हैं।

100 सेकेण्ड (100")	= 1 मिनट (1')
100 मिनट (100')	= 1 ग्रेड (1^g)
100 ग्रेड (100^g)	= 1 समकोण

3) वृत्तीय माप **(Circular measurement or Radian measure) :** किसी वृत्त के चाप (arc) के द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण का रेडियन $\frac{\text{चाप}}{\text{त्रिज्या}}$ के बराबर होता है।

वृत्त की त्रिज्या के बराबर चार वृत्त के केन्द्र पर जो कोण अंतरित करता है, उसे एक रेडिया (1^c) कहा जाता है।

$$\theta = \frac{l =>}{r =>}\frac{\text{चाप की लंबाई}}{\text{त्रिज्या}}$$

$$\pi^C = 180^\circ$$

$$1^C = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

$$x^C = \left(\frac{180}{\pi}\times x\right)^\circ$$

$$x^\circ = \left(\frac{\pi}{180}\times x\right)^C$$

$$x^\circ y' z'' = \left[x\times\frac{\pi}{180} + y\times\frac{\pi}{180\times 60} + z\times\frac{\pi}{180\times 60\times 60}\right]^C$$

घड़ी की सूइयों के द्वारा बनाया गया कोण
(Angle made by Needles of a Clock)

घंटा की सूई (**Hour Needle)**

1 डायल	= 360^0
12 घंटे	= 360^0
1 घंटा	**= 30^0**

60 मिनट = 30^0

1 मिनट = $\frac{1^\circ}{2}$

मिनट की सूई **(Minute Needle)**

1 डायल	= 360^0
60 मिनट	= 360^0
1 मिनटा	**= 6^0**

Ex – 9 : 32

कोण $= \left[9\times 30 + 32\times\frac{1}{2}\right] - [32\times 6]$

$= [270+16] - [192]$

$= 286 - 192 = 94^0$

<u>POLYGON (बहुभुज)</u>

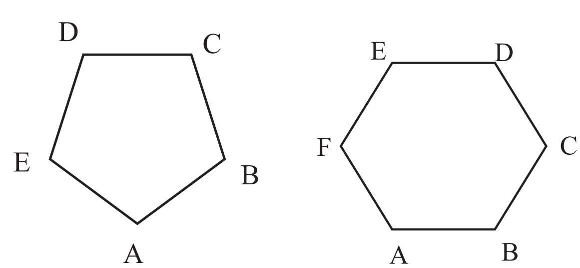
बहुभुज **(Polygon) :** एक ज्यामितीय आकृति जो कम से कम तीन रेखाखण्डों से घिरा हुआ हो, बहुभुज कहलाता है।

बहुभुज के नाम (Name of Polygons)

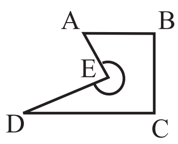
Name	No. of Sides
त्रिभुज (Triangle)	3
चतुर्भुज (Quadrilateral)	4
पंचभुज (Pentagon)	5
षट्भुज (Hexagon)	6
सप्तभुज (Heptagon)	7
अष्ट्भुज (Octagon)	8
नवभुज (Nonagon)	9
दसभुज (Decagon)	10

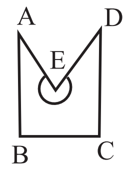
बहुभुज के प्रकार **<u>(Types of Polygons)</u>**

i) Convex Polygon (उत्तल बहुभुज) **:** यदि किसी बहुभुज के प्रत्येक कोण 180^0 से छोटा हो तो उसे उत्तल बहुभुज कहते हैं।

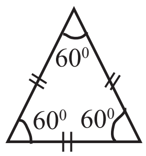


ii) Concave Polygon (अवतल बहुभुज): यदि किसी बहुभुज का कम से कम एक कोण 180^0 से ज्यादा हो उसे अवतल बहुभुज कहते हैं ।

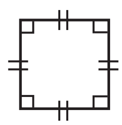


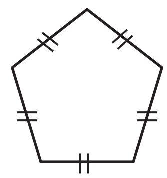


iii) Regular Polygon (सम बहुभुज) **:** यदि किसी बहुभुज की सभी भुजा एवं सभी कोण बराबर हो तो वह बहुभुज सम बहुभुज कहलाता है।

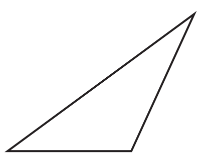


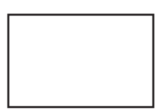
समबाहु त्रिभुज

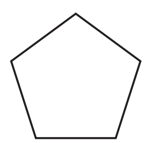

वर्ग


सम पंचभुज

iv) Non-Regular Polygon (विषम बहुभुज) **:** यदि किसी बहुभुज की कोई भी भुजा बराबर नही हो तो वह बहुभुज विषम बहुभुज कहलाता है।

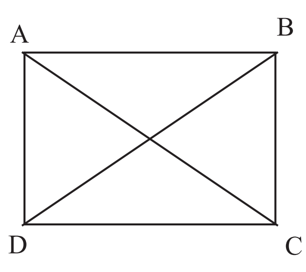

विषमबाहु त्रिभुज


आयत


पंचभुज

बहुभुज से संबंधित शब्द **(Terms related to Polygon)**

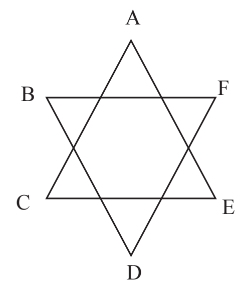
Diagonal (विकर्ण) **:** दो अक्रमागत (Non consecutive) शीर्षो (Vertices) को जोड़ने वाली रेखा को विकर्ण कहते हैं।



AC और BD विकर्ण हैं ।

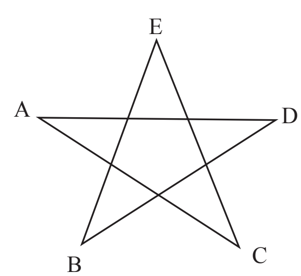
बहुभुज से संबंधित सूत्र **FORMULA related to Polygon**

1) सभी अंत: कोणों का योगफल = $(n-2) \times 180^0$
2) सभी बाह्य कोणों का योगफल = 360^0
3) विकर्णो का संख्या = $\dfrac{n(n-3)}{2} = {}^nC_2 - n$
4) ताराकृति बहुभुज के शीर्षकोणों का योगफल (sum of vertices angles of a star-shaped polygon)
 = $(n-4) \times 180^0$



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$

$= (6-4) \times 180^0 = 360^0$



$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$

$= (5-4) \times 180^0 = 180^0$

5) अंत: कोण + बाह्य कोण = 180^0

6) बाह्य कोण = 180^0 – अंत: कोण

** ***'n'*** भुजाओं वाले समबहुभुज के लिए ***(For a regular polygon of n sided)***

1) प्रत्येक अंत: कोण (Each interior angle)

$$= \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

2) प्रत्येक बाह्य कोण (Each exterior angle)

$$= \frac{360^\circ}{n}$$

3) भुजाओं की संख्या (Number of Sides)

$$= \frac{360^\circ}{\text{प्रत्येक बाह्य कोण}}$$

4) क्षेत्रफल (Area) = $\frac{n}{4}a^2 \cot\left(\frac{180}{n}\right)$

जहाँ a = भुजा की लंबाई

5) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

6) वर्ग का क्षेत्रफल = a^2

7) षट्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$

बहुभुज से संबंधित गुण
Properties related to Polygon

- किसी बहुभुज (त्रिभुज एवं चतुर्भुज को छोड़कर) अंत: कोणों का योगफल, बाह्य कोणों के योगफल से बड़ा होता है।
- त्रिभुज एकमात्र ऐसा बहुभुज है जिसमें अंत: कोणों का योगफल बाह्य कोणों के योगफल का आधा होता है ।
- चतुर्भुज एकमात्र ऐसा बहुभुज है जिसमें बाह्य कोणों का योगफल एवं अत: कोणों का योगफल समान होता है ।

त्रिभुज (TRIANGLE)

त्रिभुज (Triangle) - तीन रेखाखण्डों से बनी एक बंद ज्यामितिय आकृति को त्रिभुज कहते हैं । एक त्रिभुज में तीन भुजाएँ (sides), तीन कोण (angles) एवं तीन शीर्ष (Vertex) होते हैं ।

त्रिभुज के प्रकार (Types of triangle)
भुजाओं के आधार पर (According to side)

1) **Equilateral Triangle (समबाहु त्रिभुज) :** त्रिभुज, जिसके सभी तीन भुजाएँ बराबर होते हैं, समबाहु त्रिभुज कहलाता है।

Note (1) : समबाहु त्रिभुज में प्रत्येक कोण समान होता है।

Note (2) : समबाहु त्रिभुज में प्रत्येक कोण का माप 60^0 होता है।

2) **Isosceles Triangle (समद्विबाहु त्रिभुज) :** त्रिभुज, जिसके कोई दो भुजा बराबर हो, समद्विबाहु त्रिभुज कहलाता है।

Note (3) : समद्विबाहु त्रिभुज में दो कोण बराबर होते हैं ।

Note (4) : यदि किसी त्रिभुज के दो भुजाएँ बराबर हो तो उनके विपरीत कोण भी बराबर होते है।

Note (5) : यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों तो उनके विपरीत भुजा भी बराबर होते हैं ।

3) **Scalene Triangle (विषमबाहु त्रिभुज) :** त्रिभुज जिसके सभी तीन भुजा असमान हो, विषमबाहु त्रिभुज कहलाता है।

Note (6) : विषमबाहु त्रिभुज के सभी तीन कोण असमान होते हैं।

Note (7) : यदि किसी त्रिभुज के दो भुजा असमान हो तो बड़ी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा एवं छोटी भुजा का सम्मुख कोण छोटा होता है।

Note (8) : यदि किसी त्रिभुज के दो कोण असमान हो तो बड़े कोण की सम्मुख भुजा बड़ा एवं छोटे कोण की सम्मुख भुजा छोटा होता है ।

त्रिभुज के प्रकार (कोण के अनुसार)
Types of Triangle (According to angle)

1) **Acute-angled Triangle (न्यूनकोण त्रिभुज) :** यदि किसी त्रिभुज के सभी कोण न्यूनकोण हो तो त्रिभुज न्यूनकोण त्रिभुज कहलाता है।

Note (9) : न्यूनकोण त्रिभुज में किसी भी दो कोणों के योगफल 90^0 से बड़ा होता है।

Note (10) : <u>न्यूनकोण त्रिभुज में</u> :- $c^2 < a^2 + b^2$ (जहाँ a, b और c भुजाओं की लम्बाई है एवं c सबसे बड़ी भुजा है।)

2) **Right-angled Triangle (समकोण त्रिभुज) :** यदि किसी त्रिभुज का कोई एक कोण समकोण हो तो वह समकोण त्रिभुज कहलाता है।

Note (11) : समकोण त्रिभुज के अन्य दो कोणों का योगफल 90^0 के बराबर होता है।

Note (12) : यदि किसी त्रिभुज के दो कोणों का योगफल तीसरे कोण के बराबर हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा।

Note (13) : <u>समकोण त्रिभुज में</u> :- $c^2 = a^2 + b^2$, जहाँ a, b और c भुजाओं की लम्बाई है एवं c सबसे बड़ी भुजा की लम्बाई है।

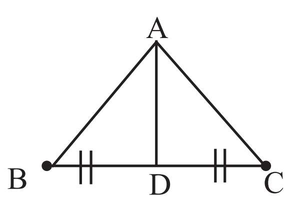
3) **Obtuse-angled Triangle (अधिक कोण त्रिभुज):** यदि किसी त्रिभुज का कोई एक कोण अधिक कोण हो तो वह अधिक कोण त्रिभुज कहलाता है।

Note (14) : यदि किसी त्रिभुज में कोई दो कोणों का योगफल 90^0 से कम हो तो वह अधिक कोण त्रिभुज होगा।

Note (15) : <u>अधिक कोण त्रिभुज में</u> :- $c^2 > a^2 + b^2$, जहाँ a, b और c तीनों भुजाओं की लम्बाई है और c सबसे बड़ी भुजा है।

(त्रिभुज से जुड़े पद)
<u>Terms related to Triangle</u>

1) **Median (माध्यिका) :** त्रिभुज के शीर्ष एवं सम्मुख भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा को माध्यिका कहते हैं । एक त्रिभुज में तीन माध्यिका होता है।

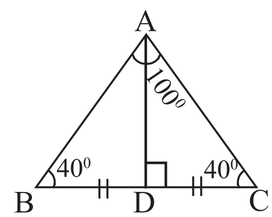


यदि BD = DC तो AD माध्यिका है।

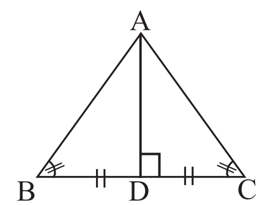
Note (16) : समबाहु त्रिभुज की सभी तीन माध्यिकाओं की लम्बाई समान होती है।

Note (17) : समद्विबाहु त्रिभुज में दो समान कोणों के शीर्षो से खींची गई माध्यिका की लम्बाई समान होता है। अतः समद्विबाहु त्रिभुज की दो माध्यिका समान लम्बाई की होती है।

Note (18) : समद्विबाहु त्रिभुज में असमान कोण के शीर्ष से विपरीत भुजा पर खींची गई माध्यिका विपरीत भुजा पर लम्ब भी होता है।



Note (19) : समद्विबाहु त्रिभुज में असमान कोण के शीर्ष से विपरीत भुजा पर खींची गई माध्यिका शीर्षकोण को समद्विभाजित करता है।



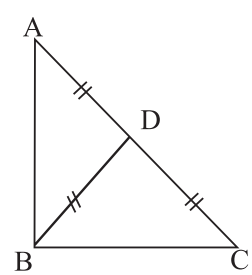
$\angle BAD = \angle DAC$

Note (20) : विषमबाहु त्रिभुज की सभी तीन माध्यिका की लंबाई असमान होता है।

Note (21) : किसी भी त्रिभुज में माध्यिका हमेशा त्रिभुज के अन्दर होता है।

Note (22) : त्रिभुज के सभी तीन माध्यिका एक बिन्दुगामी (concurrent) होता है। इसका मतलब यह है कि सभी तीन माध्यिका एक दूसरे को किसी एक ही बिन्दु पर काटती है।

Note (23) : समकोण त्रिभुज में समकोण वाले शीर्ष से कर्ण (Hypotenuse) पर खींची गई माध्यिका कर्ण के आधा के बराबर होता है।

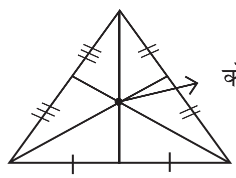


$$BD = \frac{1}{2} AC$$

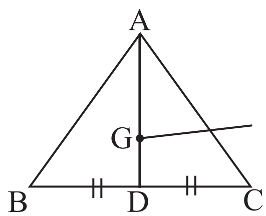
अथवा ,

यदि किसी त्रिभुज में माध्यिका अपने संगत भुजा की आधी हो तो त्रिभुज समकोण त्रिभुज होगा हौर माध्यिका कर्ण पर खींची गई होगी।

2) Centroid (केन्द्रक या गुरूत्व केन्द्र) : त्रिभुज की तीनों माध्यिका हमेशा एक दूसरे को एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है। इसे प्रतिच्छेद बिन्दु को केन्द्रक कहते हैं ।

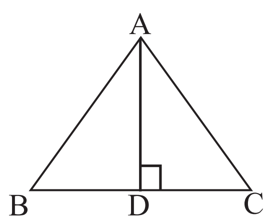


Note (24) : केन्द्रक माध्यिका को 2 : 1 के अनुपात में विभाजित करता है।



AG : GD = 2 : 1

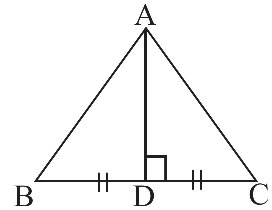
3) Altitude / Perpendicular / Height (ऊँचाई / लम्ब) : शीर्ष से सम्मुख भुजा को जोड़ने वाली सरल रेखा जो भुजा के साथ 90^0 का कोण बनाये लम्ब कहलाता है।



AD भुजा BC का लम्ब है।

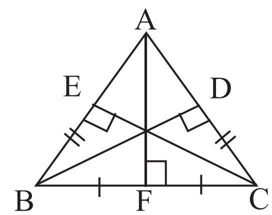
Note (25) : समबाहु त्रिभुज का सभी तीन लम्बों की लम्बाई समान होता है।

Note (26) : समबाहु त्रिभुज में किसी भुजा पर शीर्ष से डाला गया लम्ब उस भुजा का माध्यिका भी होता है।



AD लम्ब है एवं माध्यिका भी है ।

Note (27) : समद्विबाहु त्रिभुज में समान कोणों वाले शीर्षों से समान भुजाओं पर खींचा गया, दोनों शीर्ष लंब की लम्बाई समान होता है एवं असमान कोण से असमान भुजा पर खींचा गया शीर्ष लंब माध्यिका भी होता है एवं कोण का अर्द्धक भी होता है।



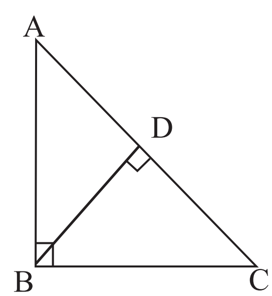
यदि AB = BC than BD = CE

AF कोण $\angle A$ का अर्द्धक एवं BC पर माध्यिका है।

Note (28) : विषमबाहु त्रिभुज में तीनों लम्ब असमान लम्बाई होता है।

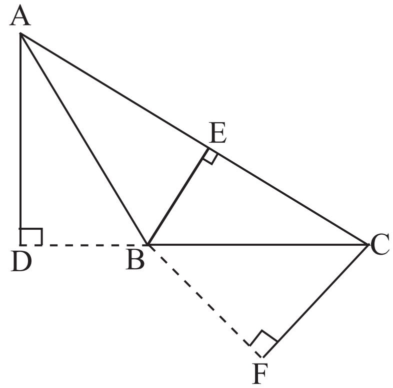
Note (29) : न्यूनकोण त्रिभुज में सभी तीन लम्ब त्रिभुज के अन्दर होता है ।

Note (30) : समकोण त्रिभुज में समकोण बनाने वाली दो भुजा ही लम्ब होता है और समकोण बनाने वाली शीर्ष से कर्ण पर डाला गया लम्ब त्रिभुज के अन्दर होता है।



AC, AB और AD लम्ब हैं ।

Note (31) : अधिक कोण त्रिभुज में दोनों न्यूनकोण वाले शीर्ष से खींचा गया लम्ब त्रिभुज के बाहर होता है जबकि अधिक कोण वाले शीर्ष से खींचा गया लम्ब त्रिभुज के अन्दर होता है।



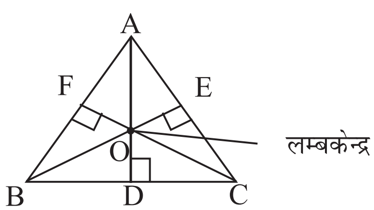
लम्ब AD, BE और CF तीनों भुजाओं क्रमशः BC, AC और AB पर खींचा गया है।

Note (32) : सबसे बड़ी भुजा पर सबसे छोटा शीर्षलम्ब एवं सबसे छोटी भुजा पर सबसे बड़ा शीर्षलंब होता है।

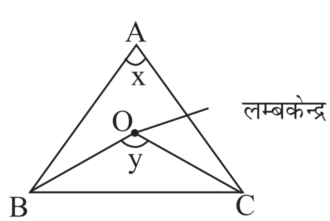
Note (33) : शीर्ष से सम्मुख भुजा को जोड़ने वाली सभी रेखाओं में लम्बवत् रेखा सबसे छोटा होता है।

Note (34) : तीनों शीर्ष लंब एक बिन्दुगामी (concurrent) होता है।

4) Orthocentre (लम्बकेन्द्र) : तीनों शीर्षलंब एक-दूसरे को एक ही बिन्दु पर काटते हैं और यह प्रतिच्छेद बिन्दु 'लम्ब केन्द्र' कहलाता है।



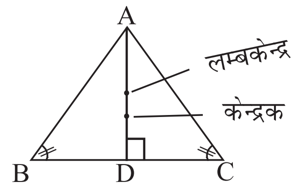
Note (35) : किसी भुजा के द्वारा लम्बकेन्द्र पर बनाया गया कोण विपरीत कोण के सम्पूरक (supplementary) होता है।



$x + y = 180^0$

Note (36) : समबाहु त्रिभुज में केन्द्रक तथा लंबकेन्द्र एक ही बिन्दु होता है ।

Note (37) : समद्विबाहु त्रिभुज में केन्द्रक तथा लम्ब केन्द्र दो विभिन्न बिन्दु होता है जो कि असमान कोण के शीर्ष से असमान भुजा पर डाले गये लंब या माध्यिका पर स्थित होता है।



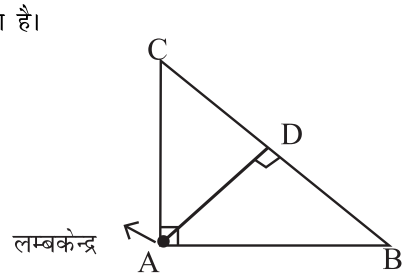
Note (38) : समद्विबाहु त्रिभुज में शीर्ष, केन्द्रक तथा लम्बकेन्द्र तीन संरेख बिन्दु होता है।

Note (39) : लम्बकेन्द्र एवं माध्यिका को जोड़नेवाली रेखा यदि किसी भुजा के साथ 90^0 का कोण बनाये या भुजा को समद्वि भाजित करे तो त्रिभुज, समद्विबाहु होगा ।

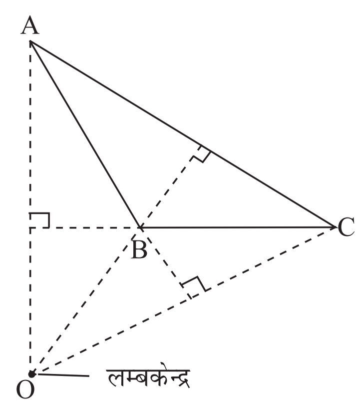
Note (40) : विषमबाहु त्रिभुज में शीर्ष, केन्द्र तथा लम्ब केन्द्र तीन असरेख बिन्दु होता है।

Note (41) : न्यूनकोण त्रिभुज में लंबकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर होता है।

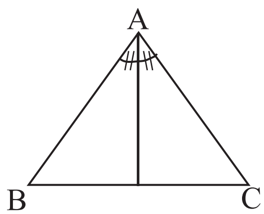
Note (42) : समकोण त्रिभुज में लम्बकेन्द्र समकोण बनाने वाला शीर्ष होता है।



Note (43) : अधिककोण त्रिभुज में लम्बकेन्द्र त्रिभुज के बाहर होता है।



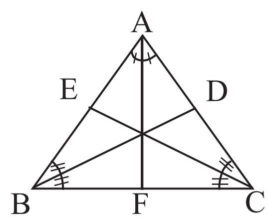
5) Angle Bisector (कोण अर्द्धक) : शीर्ष से सम्मुख भुजा को जोड़ने वाली रेखा जो शीर्षकोण को दो बराबर भागों में बाँट दे कोण अर्द्धक कहलाता है।



Note (44) : समबाहु त्रिभुज में सभी तीन अर्द्धक समान लंबाई के होते हैं ।

Note (45) : समबाहु त्रिभुज में, कोण अर्द्धक, लम्ब एवं माध्यिका एक ही रेखा होता है।

Note (46) : समद्विबाहु त्रिभुज में दो समान कोणों का कोण अर्द्धक लम्बाई में समान होता है और असमान कोण का अर्द्धक विपरीत भुजा पर लम्ब एवं माध्यिका होता है।



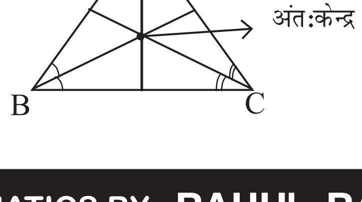
त्रिभुज ΔABC में, $\angle B = \angle C$ एवं BD, CE और AF अर्द्धक है तो BD = CE

Note (47) : विषमबाहु त्रिभुज में सभी तीन अर्द्धक असमान लम्बाई के होते हैं ।

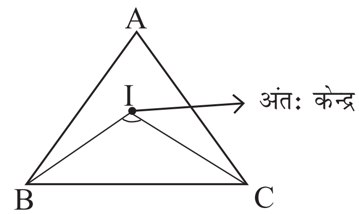
Note (48) : अर्द्धक हमेशा त्रिभुज के अन्दर स्थित होता है।

Note (49) : सभी तीन अर्द्धक एकबिन्दुगामी (concurrent) होता है।

6) Incentre (अंतः केन्द्र) : सभी तीन अर्द्धकों का प्रतिच्छेद बिन्दु अंतः केन्द्र कहलाता है।

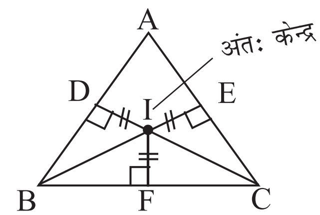


Note (50) : किसी भुजा के द्वारा अंतः कोण पर बनाया गया कोण 90 + विपरीत कोण का आधा होता है।



$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

Note (51) : अंतः केन्द्र तीनों भुजाओं से समान दूरी पर स्थित होता है।



ID = IE = IF

Note (52) : समबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्ब केन्द्र तथा अंतः केन्द्र एक ही बिन्दु होता है।

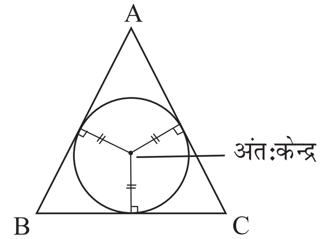
Note (53) : समद्विबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्बकेन्द्र तथा अंतः केन्द्र तीन विभिन्न बिन्दु होता है जो कि असमान कोण वाले शीर्ष से विपरीत भुजा पर खींचे गये लम्ब या माध्यिका या अर्द्धक पर स्थित होता है।

Note (54) : समद्विबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्बकेन्द्र तथा अंतः केन्द्र तीन विभिन्न संरेख (collinear) बिन्दु होता है।

Note (55) : विषमाबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्बकेन्द्र तथा अंतः केन्द्र तीन विभिन्न असंरेख (Non-collinear) बिन्दु होता है।

Note (56) : किसी भी त्रिभुज में अंतः केन्द्र त्रिभुज के अंदर होता होता है।

7) Incircle (अंतःवृत्त) : अंतः वृत्त एक ऐसा वृत्त है जो त्रिभुज के अन्दर इस प्रकार स्थित होता है ताकि वह तीनों भुजाओं को स्पर्श कर सके एवं इस वृत्त का केन्द्र त्रिभुज का अंतः केन्द्र होता है।



Note (57) :

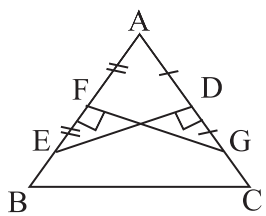
$$\text{अंत:त्रिज्या} = \frac{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}{\text{त्रिभुज का अर्द्धपरिमाप}}$$

8) **Perpendicular Bisector (लम्ब समद्विभाजक) :** यदि कोई सरल रेखा त्रिभुज के भुजा के मध्य बिन्दु होकर गुजरे एवं भुजा के साथ 90^0 का कोण बनाये तो उस सरल रेखा को लम्ब समद्विभाजक कहते हैं ।

Note (58) : समबाहु त्रिभुज में सभी तीन लम्ब समद्विभाजकों की लम्बाई समान होती है।

Note (59) : समबाहु त्रिभुज में लम्ब समद्विभाजक, माध्यिका, लम्ब एवं अर्द्धक एक ही रेखा में होता है।

Note (60) : समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाओं पर खींचा गया लम्ब समद्विभाजक लम्बाई में समान होता है।



DE = FG

Note (61) : समद्विबाहु त्रिभुज में समान भुजाओं का लम्ब समद्विभाजक शीर्ष होकर नहीं गुजरता है।

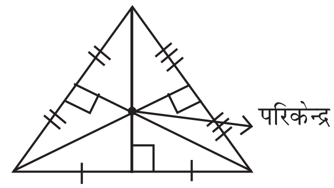
Note (62) : समद्विबाहु त्रिभुज में असमान भुजा पर खींचा गया लम्ब समद्विभाजक उस भुजा का लम्ब, कोण अर्द्धक एवं माध्यिका भी होता है।

Note (63) : विषमबाहु त्रिभुज में सभी तीन लम्ब समद्विभाजक लम्बाई में असमान होता है।

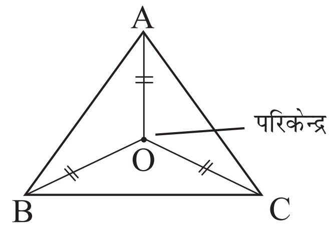
Note (64) : विषमबाहु त्रिभुज में सभी तीन लम्ब समद्विभाजक शीर्ष होकर नहीं गुजरता है।

Note (65) : सभी तीन लम्ब समद्विभाजक एक बिन्दुगामी (concurrent) होता है।

9) **Circumcentre (परिकेन्द्र) :** त्रिभुज के सभी तीन लम्ब समद्विभाजक एक दूसरे को एक निश्चित बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं । इस प्रतिच्छेद बिन्दु को त्रिभुज का परिकेन्द्र कहते हैं ।

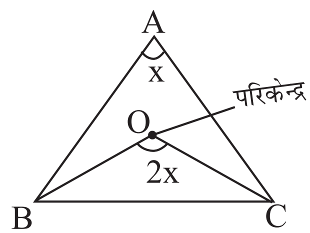


Note (66) : परिकेन्द्र तीनों शीर्षों से समान दूरी पर स्थित होता है।



OA = OB = OC

Note (67) : किसी भुजा द्वारा परिकेन्द्र पर बनाया गया कोण सम्मुख कोण के दुगुना होता है।



Note (68) : समबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्बकेन्द्र, अंत:केन्द्र तथा परिकेन्द्र एक ही बिन्दु होता है।

Note (69) : समद्विबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्बकेन्द्र, अंत: केन्द्र तथा परिकेन्द्र चार अलग-अलग बिन्दु होता है जो एक ही रेखाखण्ड पर स्थित होता है और वह रेखाखण्ड असमान भुजा का लम्ब या माध्यिका होता है।

Note (70) : समद्विबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्बकेन्द्र, अंत:केन्द्र तथा परिकेन्द्र चार संरेख बिन्दु होता है।

Note (71) : विषमबाहु त्रिभुज में केन्द्रक, लम्बकेन्द्र, अंत: केन्द्र तथा परिकेन्द्र चार अंसरेख बिन्दु होता है।

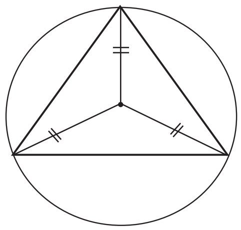
Note (72) : न्यूनकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के अन्दर होता है।

Note(73): समकोण त्रिभुज में परिकेन्द्र कर्ण का मध्य बिन्दु होता है।

Note (74) : अधिक कोण त्रिभुज में परिकेन्द्र त्रिभुज के बाहर होता है।

Note(75): परिकेन्द्र और किसी भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा भुजा पर लम्ब होता है, अथवा परिकेन्द्र से किसी भुजा पर डाला गया लम्ब भुजा को समद्विभाजित करता है।

10) Circumcircle (परिवृत्त) : एक वृत्त जो किसी त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर गुजरती है एवं उसका केन्द्र त्रिभुज का परिकेन्द्र होता है। वह वृत्त उस त्रिभुज का परिवृत्त कहलाता है।



Note (76) : परिवृत्त की त्रिज्या =

$$\frac{\text{तीनों भुजाओं का गुणनफल}}{4 \times \text{त्रिभुज का क्षेत्रफल}}$$

Note (77) : समकोण त्रिभुज में परित्रिज्या कर्ण का आधा होता है।

Note (78) : समकोण त्रिभुज में कर्ण (Hypotenuse) उस त्रिभुज के परिवृत्त का व्यास होता है।

Note (79) : समबाहु त्रिभुज में-

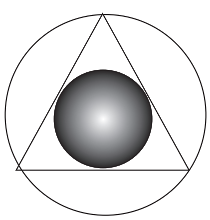
(i) अंत:त्रिज्या : परित्रिज्या = 1 : 2

(ii) अंत: वृत्त का क्षेत्रफल : परिवृत्त का क्षेत्रफल = 1 : 4

(iii) अंत: त्रिज्या = $\frac{a}{2\sqrt{3}}$

(iv) परित्रिज्या = $\frac{a}{\sqrt{3}}$

(v) छायांकित भाग का क्षेत्रफल : अनाच्छादित भाग का क्षेत्रफल = 1 : 3

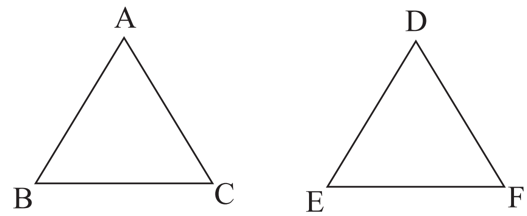


(त्रिभुजों की सर्वांगसमता)
Congruence of Triangle

दो त्रिभुज सर्वांगसम कहलाता है, यदि वे आकार (shape) और माप (size) में समान हों ।

या,

दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे यदि और केवल यदि एक त्रिभुज को दूसरे त्रिभुज पर इस प्रकार अध्यारोपित किया जा सके ताकि यह त्रिभुज दूसरे त्रिभुज को पूर्ण रुप से ढँक लें ।



यदि ΔABC को ΔDEF पर इस प्रकार रखा गया कि ΔABC के शीर्ष ΔDEF के शीर्ष पर इस क्रम में पड़े-

$A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E, C \leftrightarrow F$

तो निम्नलिखित छह समानता प्राप्त होगी -

AB = DE, BC = EF, CA = FD

(संगत भुजा समान होता है।)

$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$

(संगत कोण समान होता है।)

(i) (संगत भुजा) Corresponding sides = दो त्रिभुजों में समान कोणों की सम्मुख भुजाओं को संगत भुजा कहते हैं।

(ii) (संगत कोण) Corresponding angles)= दो त्रिभुजों में समान भुजाओं के सम्मुख कोणों को संगत कोण कहते हैं ।

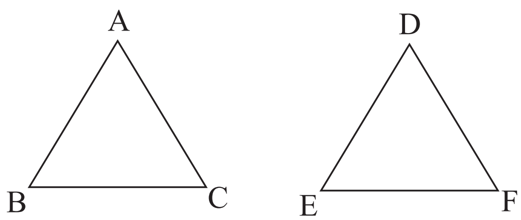
(iii) यदि $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है तो
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ और
AB = DE, BC = EF, AC = DF

(iv) यदि $\Delta DEF \cong \Delta ABC$ और $\Delta DEF \cong \Delta PQR$ तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

(दो त्रिभुजों में सर्वांगसमता के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध की कसौटियाँ)
(Sufficient Conditions (Criteria) for Congruence of Triangles)

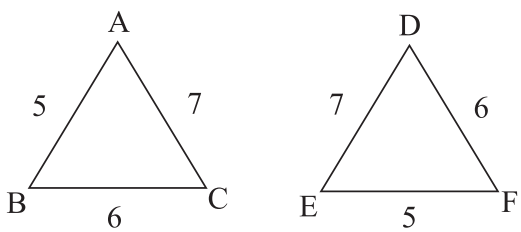
1) भुजा-भुजा-भुजा **(S-S-S)** सर्वांगसमता प्रमेय: यदि एक त्रिभुज की तीन भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की क्रमश: तीन भुजाओं के बराबर हों तो वे दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(i)



यदि AB = DE, BC = EF & AC = DF,
तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

(ii)



(a) $\Delta ABC \cong \Delta EFD$ (सही)

(b) $\Delta ABC \cong \Delta DFE$ (गलत)

(c) $\Delta ABC \cong \Delta FED$ (गलत)

(d) $\Delta CAB \cong \Delta DEF$ (सही)

(e) $\Delta BAC \cong \Delta FED$ (सही)

(iii) PQ = LM, QR = MN & PR = LN

(a) $\Delta PQR \cong \Delta LMN$ (सही)

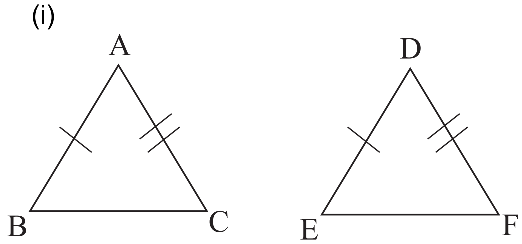
(b) $\Delta PRQ \cong \Delta LNM$ (सही)

(c) $\Delta QRP \cong \Delta MNL$ (सही)

(d) $\Delta QPR \cong \Delta LMN$ (गलत)

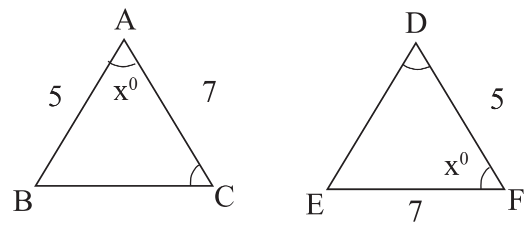
2) भुजा-कोण-भुजा **(S-A-S)** सर्वांगसमता प्रमेय **:** दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ तथा उनके अन्तर्गत कोण, दूसरे त्रिभुज के तदनुरूपी दोनों भुजाओं तथा उनके अन्तर्गत कोण के बराबर हों ।

(i)



यदि AB = DE, AC = DF & $\angle A = \angle D$

तो $\Delta ABC \cong \Delta DEF$



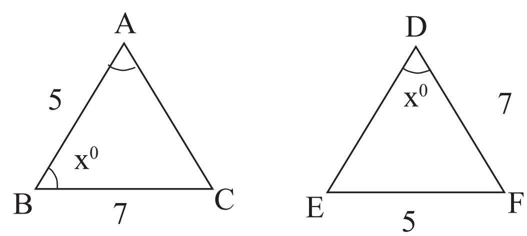
(a) $\Delta ACB \cong \Delta FED$ (सही)

(b) $\Delta BAC \cong \Delta DFE$ (सही)

(c) $\Delta BCA \cong \Delta FED$ (गलत)

(d) $\Delta CBA \cong \Delta DEF$ (गलत)

(iii)

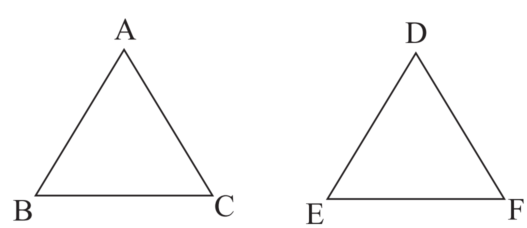


उपरोक्त दोनों त्रिभुज सर्वांगसम नहीं है क्योंकि अंतर्गत कोण बराबर होना चाहिए ।

(iv) PQ = ST, QR = TM & $\angle Q = \angle T$

तो $\Delta PQR \cong \Delta STM$

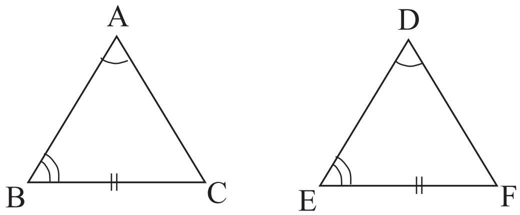
3) कोण-भुजा-कोण **(A-S-A)** सर्वांगसमता प्रमेय **:** यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनकी अंतरित भुजा क्रमशः दूसरे त्रिभुज के दो संगत कोणों और उनकी अंतरित भुजा के बराबर हों तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।



यदि $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और BC = EF
तो,

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$

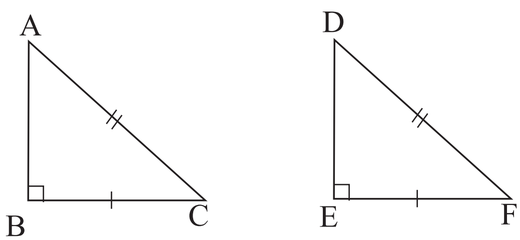
4) कोण-कोण-भुजा **(A-A-S)** सर्वांगसमता प्रमेय **:** यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा (जो कोणों के अंतर्गत न हों) क्रमशः दूसरे त्रिभुज के संगत कोणों और भुजा के बराबर हों, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।



यदि $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ और BC = EF
तो,

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

5) समकोण-कर्ण-भुजा **(R-H-S)** सर्वांगसमता प्रमेय **:** यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक भुजा दूसरे समकोण त्रिभुज के क्रमशः कर्ण और संगत भुजा के बराबर हो, तो वे समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।



AC = DF, BC = EF और $\angle B = \angle E = 90^0$
तो,

$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

सर्वांगसमता से संबंधित प्रमेय
(Properties Related To Triangles)

Note-1 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे तो उनके संगत भुजा समान होगा ।

Note-2 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम होंगे तो उनके संगत कोण समान होगा ।

Note-3 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम होगा तो वे समान कोण वाला होगा लेकिन यदि दो त्रिभुज समान कोा वाला होगा तो काई जरूरी नहीं है कि वे सर्वांगसम होगा ।

Note-4 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम होगा तो उनका क्षेत्रफल और परिमाप समान होगा ।

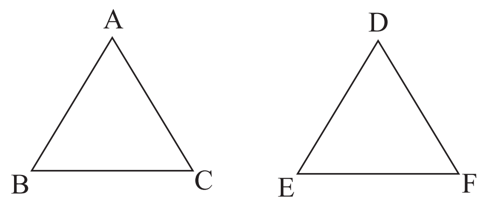
Note-5 : यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम होगा तो उसके सभी संगत भाग बराबर होगा ।

त्रिभुजों की समरूपता
(Similarity Of Triangles)

दो त्रिभुज समरूप कहलाते हैं यदि वे आकार (shape) में समान हों लेकिन कोई आवश्यक नहीं है कि उनके माप (size) भी समान हों ।

या

दो त्रिभुज समरूप कहलाते हैं यदि उनके संगत कोण बराबर हों एवं संगत भुजा समानुपाती हो ।

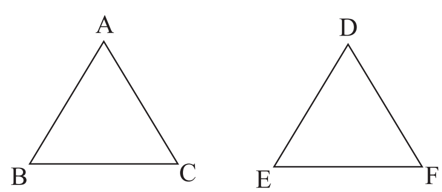


यदि $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ और

$$\frac{AD}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \text{ तो } \Delta ABC \sim \Delta DEF$$

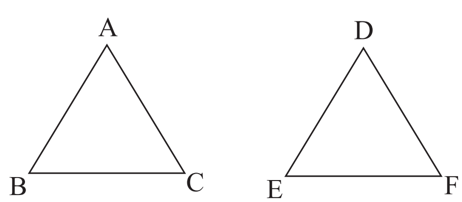
त्रिभुज की समरूपता के लिए कसौटियाँ
(Criteria Of Similarity)

1) **कोण-कोण (A – A) /कोण-कोण-कोण (A – A – A) :** यदि किसी त्रिभुज के दो कोण, दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं ।



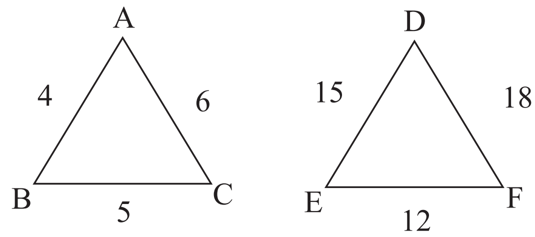
यदि $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ & $\angle C = \angle F$ तो $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

2) **भुजा-भुजा-भुजा (S–S–S) :** यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हो तो दोनों त्रिभुज समरूप होगा ।
(i)



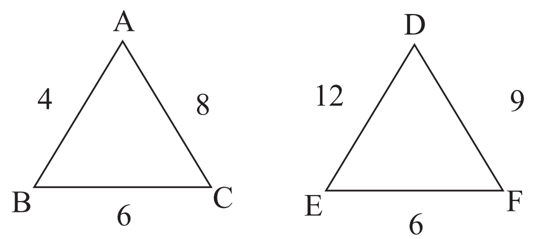
यदि $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, तो $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(ii)



$$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{DF}\text{ , तो }\ \Delta ABC \sim \Delta FED$$

(iii)



4 → 6

6 → 9

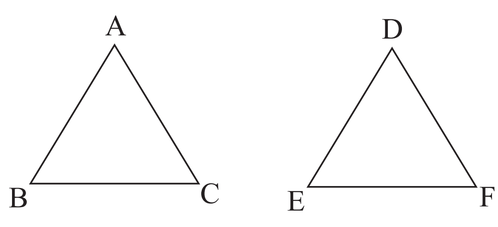
8 → 12

$$\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$$

$$\frac{AB}{EF}=\frac{BC}{FD}=\frac{CA}{DE}\text{ , तो }\ \Delta ABC \sim \Delta EFD$$

3) भुजा-कोण-भुजा (S – A – S) : यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के एक कोण के बराबर हो तथा इन कोणों को अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं ।

(i)



$\angle A = \angle D$ और $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}$

तो $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

(ii) $\dfrac{AB}{EF}=\dfrac{AC}{DF}$ और $\angle A = \angle F$ तो $\Delta ABC \sim \Delta FED$

त्रिभुज के समरूपता पर आधारित गुण
(Properties related to Similarity)

Note-1 : यदि दो त्रिभुज समरूप होगें तो उनकी संगत भुजा समानु. पाती होगा ।

यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तो $\dfrac{AB}{DE}=\dfrac{AC}{DF}=\dfrac{BC}{EF}$

Note-2 : यदि दो त्रिभुज समरूप होंगे तो उनके सभी संगत भाग (कोण को छोड़कर) समानुपाती होंगे । इसका मतलब उनके संगत भुजा का अनुपात = संगत माध्यिका का अनुपात = संगत ऊँचाई का अनुपात = संगत कोण अर्द्धक का अनुपात = संगत लम्ब समद्विभाजक का अनुपात ।

Note- 3 : यदि दो त्रिभुज समरूप होंगे तो वे कोणिक होंगे और यदि दो त्रिभुज समान-कोणिक होंगे तो वे समरूप होंगे ।

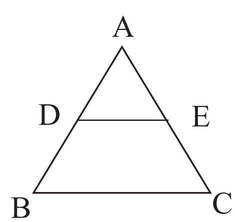
यदि $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ तो

$\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E\ \&\ \angle C = \angle F$

Note- 4 : यदि दो त्रिभुज समरूप होंगे तो उनके परिमाप को अनुपात उनके संगत भुजा के अनुपात के समान होगा ।

Note-5 : यदि दो त्रिभुज समरूप होंगे तो उनके क्षेत्रफल का अनुपात उनके संगत भुजा के अनुपात के वर्ग के बराबर होगा ।

Note-6 : किसी त्रिभुज के दो भुजाओं को जोड़ने वाली रेखा जो तीसरे भुजा के समांतर हो वह त्रिभुज को दो भाग में बाँटती है और एक नया त्रिभुज बनाती हो तो कि वास्तविक त्रिभुज के समरूप होती है।



यदि DE || BC तो दो त्रिभुज ΔADE और ΔABC में

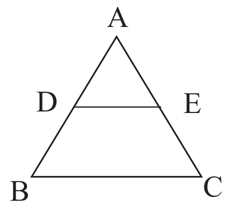
$\angle A = \angle A$

$\angle D = \angle B$

$\angle E = \angle C$

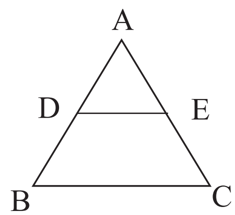
तो $\Delta ADE \sim \Delta ABC \quad \because \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{DE}{BC}$

Note-7 : (मूलभूत समानुपातिकता प्रमेय का थेल्स प्रमेय) (Basic proportionality theorem or Thales theorem)- यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समानान्तर अन्य दो भुजाओं को भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए रेखा खींची जाएँ तो अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं ।



यदि DE | | BC तो $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

Note – 8 :



यदि DE | | BC तो,

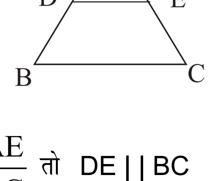
(i) $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

(ii) $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (iii) $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

(iv) $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (iv) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

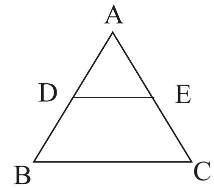
(vi) $\frac{AB}{DB} = \frac{AC}{EC}$ (vii) $\frac{DB}{AB} = \frac{EC}{AC}$

Note-9 : (थेल्स प्रमेय का विलोम- Converse of the basic proportionally theorem) – यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है।



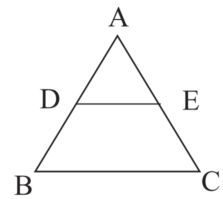
यदि $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ तो DE | | BC

Note-10 : किसी त्रिभुज के एक भुजा के मध्य बिन्दु से गुजरने वाली रेखा जो दूसरे भुजा के समानान्तर हो, वह तीसरे भुजा को समद्वि भाजित करती है ।



यदि DE | | BC और 'D' भुजा AB का मध्य बिन्दु हो
तो AE = EC

Note-11 : त्रिभुज के किसी दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा तीसरी भुजा की आधी एवं समानान्तर होती है।



यदि D और E AB एवं AC का मध्य बिन्दु हो तो

(i) DE | | BC

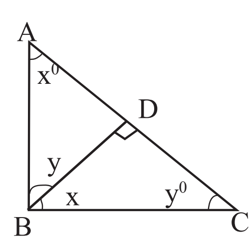
(ii) DE = $\frac{1}{2}$ BC

(iii) Δ ADE का क्षेत्रफल : Δ ABC का क्षेत्रफल = 1 : 4

(iv) ΔADE का क्षेत्रफल : ☐ DBCE का क्षेत्र0 = 1 : 3

(v) Δ ABC का क्षेत्रफल : ☐ DBCE का क्षेत्र0 = 4 : 3

Note-12 : यदि समकोण त्रिभुज में समकोण वाले शीर्ष से कर्ण (Hypotenuse) पर लम्ब डाला जाता है तो त्रिभुज दो भागों में बँट जाता है और दो नया समरूप त्रिभुज प्राप्त होता है जो कि मूल त्रिभुज के भी समरूप होता है।



$\Delta ABD \sim \Delta BCD \sim \Delta ACB$

(a) (i) $AB^2 = AC \times AD$

(ii) $BC^2 = AC \times CD$

(iii) $BD^2 = AD \times CD$

(b) (i) $$\frac{AB^2}{BD^2} = \frac{AC}{CD}$$

(ii) $$\frac{BC^2}{BD^2} = \frac{AC}{AD}$$

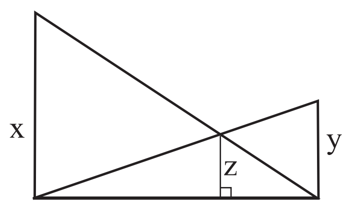
(iii) $$\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD}{CD}$$

(c) (i) $$\frac{1}{BD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2}$$

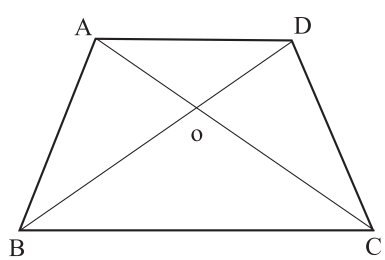
(ii) $$BD = \frac{AB \times BC}{AC}$$

Note-13 : x एवं y मीटर के दो पोल एक दूसरे से 'p' मीटर की दूरी पर स्थित है (x > y) | एक पोल के शीर्ष से दूसरे पोल के पाद एवं दूसरे पोल के शीर्ष से पहले पोल के पाद को जोड़ने वाली रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दु की ऊँचाई z मीटर हो तो x, y एवं z के बीच संबंध होगा –

(i) $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ (ii) $z = \frac{xy}{x+y}$



Note-14 : समलम्ब चतुर्भुज के विकर्ण चतुर्भज को चार त्रिभुज में बाँटते हैं । समान्तर भुजाओं से जुड़े दो त्रिभुज समरूप होते हैं जबकि असमांतर भुजाओं से जुड़े दो त्रिभुज क्षेत्रफल में समान होते हैं।

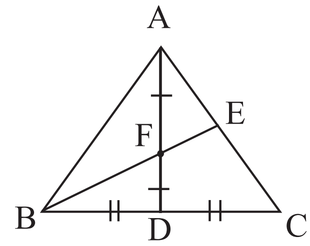


यदि AD || BC तो

(i) $\Delta AOD \sim \Delta COB$ &

(ii) Δ AOB का क्षेत्रफल = ΔCOD का क्षेत्रफल

Note-15 : शीर्ष एवं एक माध्यिका के मध्य बिन्दु को जोड़ने वाली रेखा तीसरे भुजा को 1 : 2 के अनुपात बाँटती है।

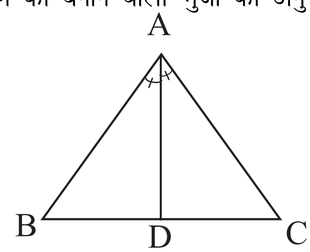


यदि AD माध्यिका हो एवं F, AD का मध्य बिन्दु हो तो

(i) AE : EC = 1 : 2

(ii) AE = $\frac{1}{3}AC$

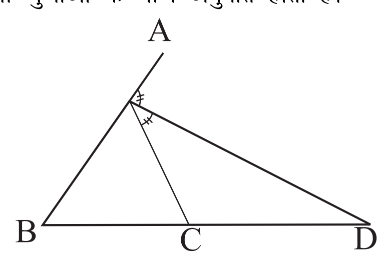
Note-16 : किसी त्रिभुज के एक कोण का आंतरिक द्विभाजक विपरीत भुजा को आंतरिक रूप से उसी अनुपात में विभाजित करता है जो उस कोण को बनाने वाली भुजा का अनुपात होता है।



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

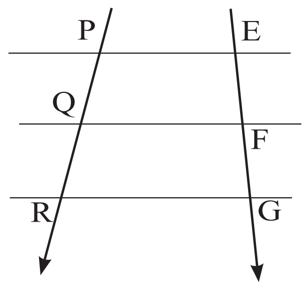
Note-17 : यदि किसी त्रिभुज के एक कोण को बाँटने वाली रेखा विपरीत भुजा को उसी अनुपात में बाँटे जो उस कोण को बनाने वाली रेखा के बीच अनुपात हो तो वह रेखा उस कोण का द्विभाजक होता है।

Note-18 : किसी कोण का बाह्य द्विभाजक विपरीत भुजा को बाह्य रूप से उसी अनुपात में विभाजित करती है जो उस कोण को बनाने वाली भुजाओं के बीच अनुपात होता है।



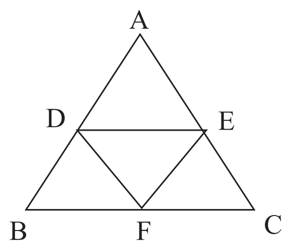
$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

Note -19 : यदि तीन या तीन से अधिक समांतर रेखाएँ दो तिर्यक के द्वारा प्रतिच्छेद होता हो तो उनके द्वारा बनाया गया अंत:खण्ड समानुपाती होता है।



$$\frac{PQ}{QR} = \frac{EF}{FG}$$

Note -20 : त्रिभुज के तीन भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने पर चार सर्वांगसम त्रिभुज बनता है जिनमें से प्रत्येक त्रिभुज मूल त्रिभुज के समरूप होता है ।



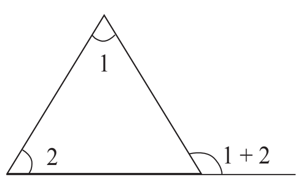
त्रिभुज के गुण
(Properties Related To Triangle)

1) किसी त्रिभुज के तीनों कोणों का योगफल 180^0 होता है।

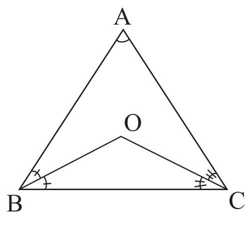
2) किसी त्रिभुज के दो भुजाओं का योगफल तीसरे से बड़ा होता है।

3) किसी त्रिभुज के दो भुजाओं का अन्तर तीसरे से छोटा होता है।

4) यदि किसी त्रिभुज के एक भुजा को बढ़ाया जाय तो उससे बना बाह्य कोण उसके विपरीत दो अंत:कोणों के योगफल के बराबर होता है।

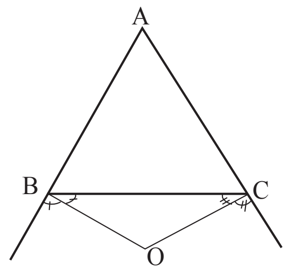


5) त्रिभुज के किसी दो कोणों के आंतरित द्विभाजक के द्वारा बनाया गया कोण 90^0 + तीसरे कोण के आधा के बराबर होता है।



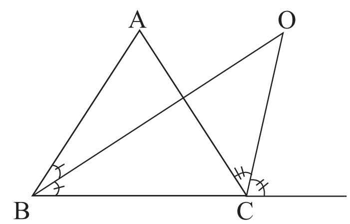
$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

6) त्रिभुज के किसी दो कोणों के बाह्य द्विभाजक के द्वारा बनाया गया कोण 90^0 – तीसरे कोण के आधा के बराबर होता है।



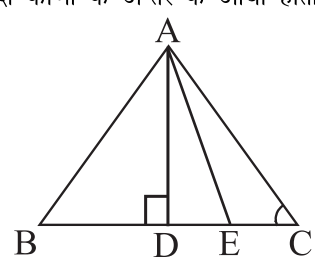
$$\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$$

7) किसी त्रिभुज के एक कोण के आंतरित द्विभाजक एवं दूसरे कोण के बाह्य द्विभाजक के द्वारा बनाया गया कोण तीसरे कोण का आधा होता है।



$$\angle BOC = \frac{1}{2}\angle A$$

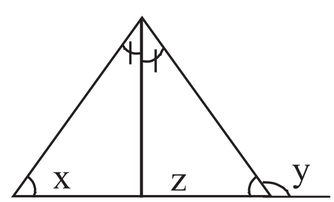
8) किसी त्रिभुज के एक कोण के आंतरिक द्विभाजक एवं उसी कोण से विपरीत भुजा पर डाले गये लम्ब के द्वारा शीर्ष पर बनाया गया कोण अन्य दो कोणों के अन्तर के आधा होता है।



यदि $AD \perp BC$ और AE कोण A का द्विभाजक हो तो

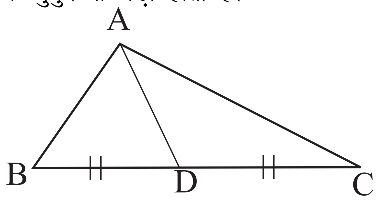
$$\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$$

9) किसी त्रिभुज का एक अंत: कोण एवं उसी भुजा पर बना बाह्य कोण का योगफल उसी भुजा पर विपरीत कोण के अर्द्धक के द्वारा उसी ओर बनायें गये कोण का दुगुना होता है।



x + y = 2z

10) त्रिभुज के किसी दो भुजाओं का योगफल तीसरे पर खींचे गये माध्यिका के दुगुने से बड़ा होता है।

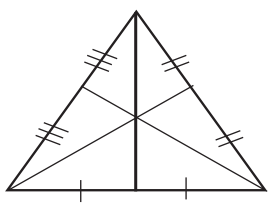


AB + AC > 2 AD

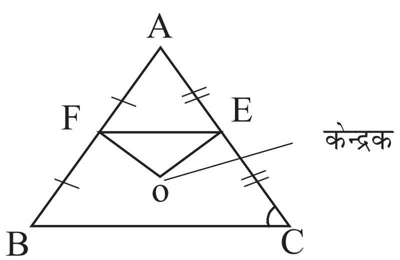
11) किसी त्रिभुज का परिमाप उसके तीनों माध्यिकाओं के योगफल से बड़ा होता है।

12) त्रिभुज के तीनों ऊँचाईयों का योगफल उसके तीनों भुजाओं के योगफल से छोटा होता है।

13) त्रिभुज के तीनों माध्यिका त्रिभुज को समान क्षेत्रफल वाले छः छोटे त्रिभुज में बाँटती है।

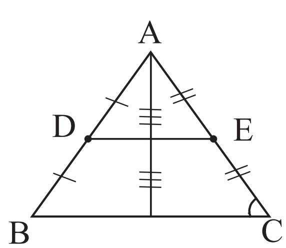


14) केन्द्रक एवं किसी दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं के द्वारा बनाया गया त्रिभुज का क्षेत्रफल मूल त्रिभुज का $\frac{1}{12}$ गुणा होता है।

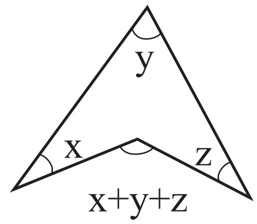


ΔOFE का क्षेत्रफल = $\frac{1}{12}$ x ΔABC का क्षेत्रफल

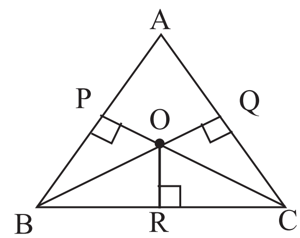
15) शीर्ष से विपरीत भुजा को जोड़ने वाली सभी रेखाएँ अन्य दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा के द्वारा समद्विभाजित होती है।



16)



17) किसी समबाहु त्रिभुज के अन्दर स्थित किसी बिन्दु से तीनों भुजाओं की लम्बवत् दूरी का योगफल उस त्रिभुज के ऊँचाई के बराबर होता है।



समबाहु त्रिभुज ABC की ऊँचाई = OP + OQ + OR

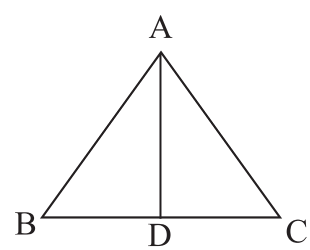
18) समबाहु त्रिभुज में –

(i) भुजा : ऊँचाई = $2 : \sqrt{3}$

(ii) (भुजा)^2 : (ऊँचाई)^2 = 4 : 3

(iii) 3 x (भुजा)^2 = 4 x (ऊँचाई)^2

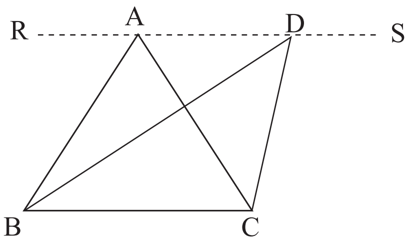
19) त्रिभुज के एक शीर्ष से विपरीत भुजा को जोड़ने वाली रेखा त्रिभुज को दो भागों में बाँटती है और इन दोनों त्रिभुज के क्षेत्रफल का अनुपात उनके आधार के अनुपात के बराबर होता है।



$$\frac{\Delta ABD \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta ADC \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{BD}{DC}$$

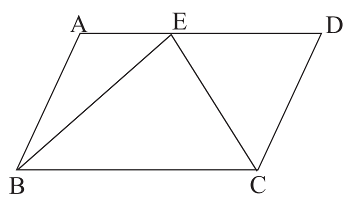
20) माध्यिका त्रिभुज को दो समान क्षेत्रफल वाले त्रिभुज में बाँटती है।

21) समान आधार एवं समान समांतर रेखाओं के बीच स्थित दो त्रिभुज क्षेत्रफल में समान होते हैं ।



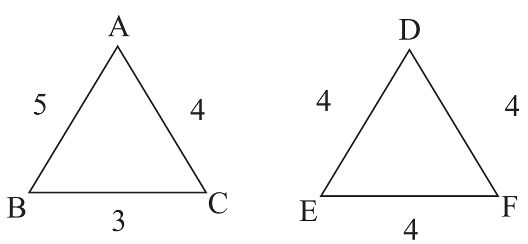
यदि RS || BC तो ΔABC का क्षेत्र0 = ΔBDC का क्षेत्र0

22) एक ही आधार एवं समान समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।



ΔBEC का क्षेत्र0 = $\frac{1}{2}$ x समांतर □ ABCD का क्षेत्र0

23) समान परिमाप वाले दो त्रिभुज में समाबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिक होता है।

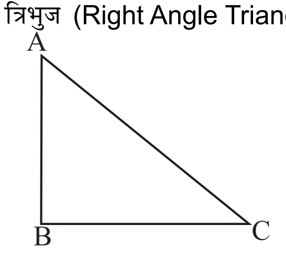


ΔDEF का क्षेत्र0 > ΔABC का क्षेत्र0

24) एक ही वृत्त के अन्तर्गत दो त्रिभुज में समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिक होता है।

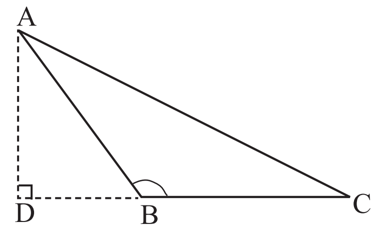
25) पाइथागोरस प्रमेय (Pythagoras Theorem)

(i) समकोण त्रिभुज (Right Angle Triangle) में –



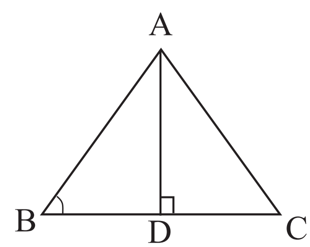
$AC^2 = AB^2 + BC^2$

(ii) अधिक कोण (Obtuse Angle) त्रिभुज में–



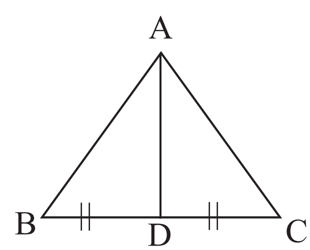
$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BD$

(iii) न्यूनकोण (Acute Angle) त्रिभुज में –



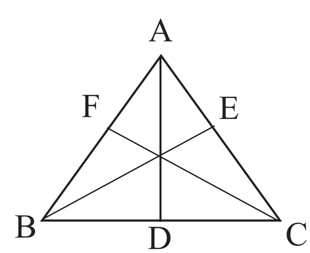
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BD$

(iv)



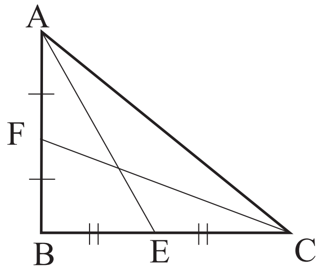
यदि AD माध्यिका हो तो
$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$

(v)



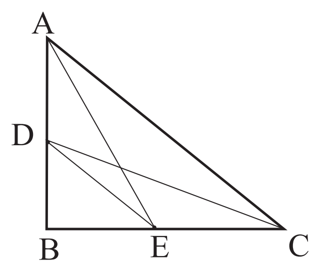
AD, BE एवं CF माध्यिका हैं तो
$3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$

(vi) समकोण त्रिभुज में न्यूनकोण वाले दोनों शीर्षो से खींचे गये माध्यिकाओं के वर्गो के योगफल का चार गुणा, कर्ण के वर्ग के पाँच गुना के बराबर होता है।



$4(AE^2 + CF^2) = 5AC^2$

(vii) त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसमें कोण B समकोण है। D और E, AB तथा BC पर स्थित दो बिन्दु हैं तो $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$



(viii) Basic Pythagorean Triplets –

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25),

(8, 15, 17), (9, 40, 41), (11, 60, 61)

$$n + \frac{n}{2n+1}$$

If n = 1 =>

$$1 + \frac{1}{2\times1+1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{(4)_{\pm1}}{(3)}(5)$$

(3, 4, 5)

If n = 2 =>

$$2 + \frac{2}{2\times2+1} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{(12)_{\pm1}}{(5)}(13)$$

(5, 12, 13)

त्रिभुज से संबंधित सूत्र
(Formula Related To Triangle)

1) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ x आधार x ऊँचाई

2) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c}$

जहाँ, $s = \frac{a+b+c}{2}$ और a, b एवं c भुजा की लंबाई है।

3) त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{4}{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c}$

जहाँ, $s = \frac{a+b+c}{2}$ और a, b एवं c माध्यिका की लंबाई है।

4) समबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $= \frac{\sqrt{3}}{2} \times$ भुजा

5) समबाहु त्रिभुज की भुजा $= \frac{2}{\sqrt{3}} \times$ ऊँचाई

6) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \text{भुजा}^2$

7) समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{(\text{ऊँचाई})^2}{\sqrt{3}}$

8) समद्विबाहु त्रिभुज की ऊँचाई $= \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$
जहाँ b समान भुजा की लंबाई है।

9) समद्विबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}$

चतुर्भुज (Quadrilateral)

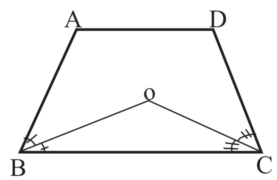
चार भुजाओं से घिरे ज्यामितीय आकृति को चतुर्भुज कहते हैं।

चतुर्भुज से संबंधित गुण
(Properties Related To Quadrilateral)

1) चतुर्भुज के सभी अंत: कोणों का योगफल 360^0 होता है।

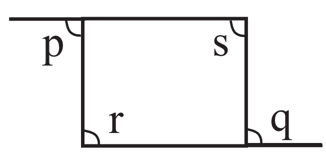
2) चतुर्भुज के सभी बाह्य कोणों का योगफल 360^0 होता है।

3) किसी दो लगातार कोणों (consecutive angles) के द्विभाजकों द्वारा बनाया गया कोण अन्य दो कोणों के योगफल का आधा होता है।



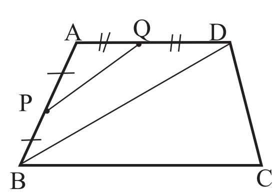
$$\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D)$$

4) चतुर्भुज के किसी दो विपरीत बाह्य कोणों का योगफल अन्य दो अंत: कोणों के योगफल के बराबर होता है।



$r + s = p + q$

5) चतुर्भुज के किसी दो सन्निकट भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को जोड़नेवाली रेखा संगत विकर्ण के समांतर और उसका आधा होता है।



$PQ \,||\, BD$ & $PQ = \frac{1}{2}BD$

6) किसी चतुर्भुज के मध्यबिन्दुओं को जोड़नेवाली रेखा से बना चतुर्भुज समांतर चतुर्भुज होता है।

7) किसी चतुर्भुज के मध्य बिन्दुओं को जोड़नेवाली रेखा से बना चतुर्भुज का क्षेत्रफल मूल चतुर्भुज का आधा होता है।

चतुर्भुज के प्रकार
(Types Of Quadrilateral)

1) Parallelogram (समांतर चतुर्भुज)

2) Rectangle (आयत)

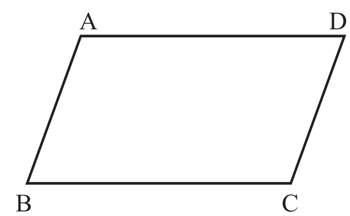
3) Square (वर्ग)

4) Rhombus (समचतुर्भुज)

5) Trapezium (समलम्ब चतुर्भज)

<u>समांतर या समानांतर चतुर्भुज (Parallelogram)</u>

ऐसा चतुर्भुज जिसके विपरीत भुजा का दोनों युग्म समानान्तर हो, समानान्तर चतुर्भुज कहलाता है।



AD || BC और AB || CD

कोई चतुर्भुज समानान्तर चतुर्भुज होगा यदि निम्न में से कोई एक धारण करता हो-

1) विपरीत भुजा का प्रत्येक युग्म आपस में समानान्तर हो ।

या

2) विपरीत भुजा का प्रत्येक युग्म आपस में समान हो ।

या

3) विपरीत कोण का प्रत्येक युग्म आपस में बराबर हो ।

या

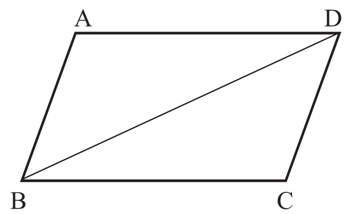
4) विपरीत भुजा का एक युग्म आपस में बराबर तथा समानान्तर हो।

या

5) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करे ।

समांतर चतुर्भुज के गुण
(Properties related to parallelogram)

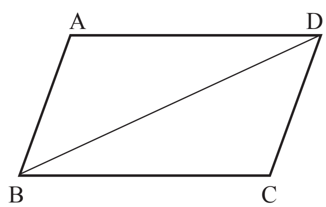
1) समांतर चतुर्भुज के दोनों विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं तथा प्रत्येक विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो सर्वांगसम त्रिभुज में समद्विभाजित करता है ।



$\Delta ABD \cong \Delta CDB$

2) समांतर चतुर्भुज के कोणों के अर्द्धकों द्वारा आयत बनता है।

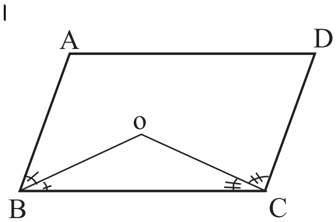
3) किसी भी दो लगातार कोणों का योगफल 180^0 होता है।



$\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D =$

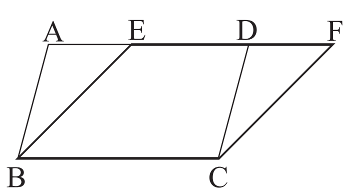
$\angle D + \angle A = 180^0$

4) किसी भी दो लगातार कोणों के अर्द्धक एक दूसरे को 90^0 पर काटता है।



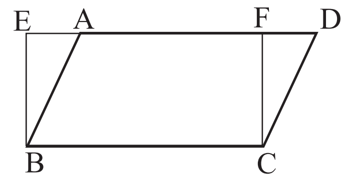
$\angle BOD = 90^0$

5) समान आधार एवं समान समांतर रेखाओं के बीच स्थित दो समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल समान होता है।



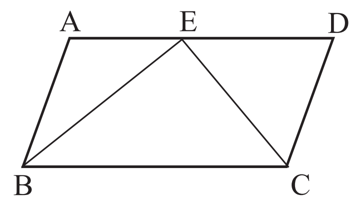
समांतर ☐ ABCD का क्षेत्र0 = समांतर ☐ EBCF का क्षेत्र0

6) समान आधार एवं समान समांतर रेखाओं के बीच स्थित समांतर चतुर्भुज एवं आयत का क्षेत्रफल समान होता है।



समांतर ☐ ABCD का क्षेत्र0 = आयत EBCF का क्षेत्र0

7) समान आधार एवं समान समांतर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज का क्षेत्रफल समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल के आधा होता है।

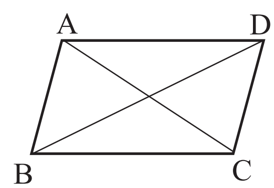


ΔBEC का क्षेत्र0 = $\frac{1}{2}$ समांतर ☐ ABCD का क्षेत्र0

8) एक वृत्त के अंतर्गत (Inscribed in-circle) समांतर चतुर्भुज या तो आयत या वर्ग होता है।

9) एक वृत्त के बहिर्गत (circumscribed in-circle) समांतर चतुर्भुज या तो समचतुर्भुज या वर्ग होता है।

10) समांतर चतुर्भुज के भुजाओं के वर्ग का योगफल उनके विकर्णों के वर्ग के योगफल के बराबर होता है।



(i) $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

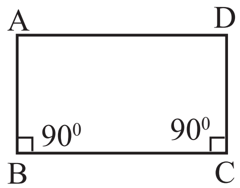
(ii) $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$

11) समांतर चतुर्भुज का क्षेत्र0 = आधार x ऊँचाई

12) यदि किसी समांतर चतुर्भुज का विकर्ण बराबर हो तो उसका प्रत्येक कोण 90^0 का होता है। इसका मतलब यह आयत या वर्ग होगा ।

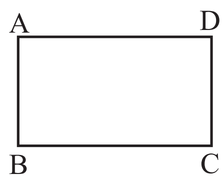
आयत (Rectangle)

आयत एक ऐसा समांतर चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक कोण 90^0 होता है।



आयत के गुण (Properties of Rectangle)

1) विपरीत भुजा के दोनों युग्म आपस में बराबर होते हैं ।



AD = BC और AB = CD

2) प्रत्येक कोण 90^0 के बराबर होता है।

3) विकर्ण बराबर होते हैं ।

4) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं लेकिन लम्बवत् नहीं होते हैं ।

5) विकर्ण कोण का अर्द्धक नहीं होता है।

6) आयत के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा समचतुर्भुज होता है।

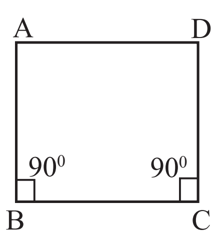
7) आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई x चौड़ाई

8) आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

9) आयत का विकर्ण = $\sqrt{l^2 + b^2}$

<u>वर्ग (Square)</u>

वर्ग एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता है जिसका प्रत्येक भुजा बराबर एवं प्रत्येक कोण समकोण होता है।



AB = BC = CD = DA

वर्ग के गुण (Properties of Square)

1) प्रत्येक भुजा बराबर होता है।

2) प्रत्येक कोण 90^0 के बराबर होता है।

3) विर्कण बराबर होता है।

4) विकर्ण एक दूसरे को लम्बवत् समद्विभाजित करता है।

5) विकर्ण कोणों का अर्द्धक होता है।

6) क्षेत्रफल = (भुजा $)^2$

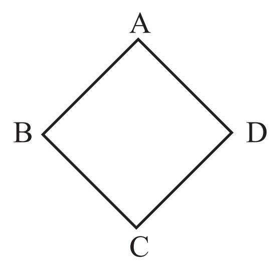
7) परिमाप = 4 x भुजा

8) विकर्ण = $\sqrt{2} \times$ भुजा

9) वर्ग के मध्य बिन्दुओं को जोड़ने वाली रेखा वर्ग होता है ।

समचतुर्भुज (Rhombus)

समचतुर्भुज एक ऐसा समांतर चतुर्भुज होता जिसका प्रत्येक भुजा बराबर होता है।



AB = BC = CD = DA

समचतुर्भुज के गुण (Properties of Rhombus)

1) प्रत्येक भुजा बराबर होता है।

2) विपरीत कोणों का युग्म आपस में बराबर होता है।

3) विकर्ण बराबर नहीं होता है।

4) विकर्ण एक दूसरे को लम्बवत् समद्विभाजित करता है।

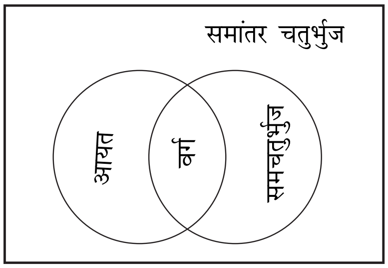
5) विकर्ण कोणों का अर्द्धक होता है।

6) क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ विकर्णों का गुणनफल

7) परिमाप = 4 x भुजा

8) समचतुर्भुज के भुजाओं के मध्यबिन्दुओं को जोड़नेवाली रेखा आयत होता है।

समांतर चतुर्भुज, आयत, वर्ग एवं समचतुर्भुज के बीच संबंध -

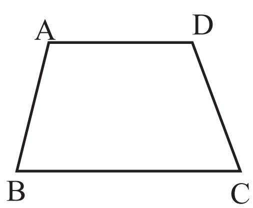


सभी समांतर चतुर्भुज के विकर्ण, भुजा, कोण के गुण

विकर्ण भुजा कोण के गुण	समांतर चतुर्भुज	आयत	सम चतुर्भुज	वर्ग
1) विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करता है।	✓	✓	✓	✓
2) विकर्ण की लंबाई बराबर होता है।	×	✓	×	✓
3) विकर्ण कोण अर्द्धक होता है।	×	×	✓	✓
4) विकर्ण लम्बवत् होता है।	×	×	✓	✓
5) विकर्ण चार सर्वांगसम त्रिभुज बनाता है।	×	×	✓	✓
6) सभी भुजा बराबर होता है।	×	×	✓	✓
7) सभी कोण समकोण होता है।	×	✓	✓	×

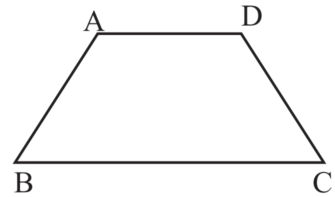
<u>Trapezium (समलम्ब चतुर्भुज)</u>

ऐसा चतुर्भुज जिसमें विपरीत भुजा का एक युग्म समांतर हो, समलम्ब चतुर्भुज कहलाता है।



AD | | BC

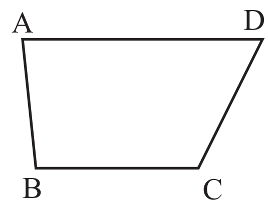
यदि असमांतर भुजा की लम्बाई समान हो तो यह समलंब समद्विबाहु (Isosceles trapezium) चतुर्भुज कहलाता है।



AD | | BC & AB = CD

समलम्ब चतुर्भुज के गुण
<u>(Properties related to trapezium)</u>

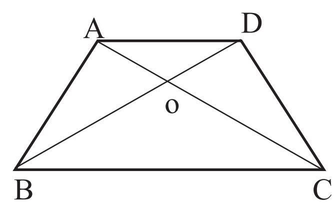
1) दोनों समांतर भुजाओं से जुड़े लगातार कोणों के युग्म (consecutive angles along both parallel sides) सम्पूरक होता है।



यदि AD | | BC तो

$\angle A + \angle B = \angle D + \angle C = 180^0$

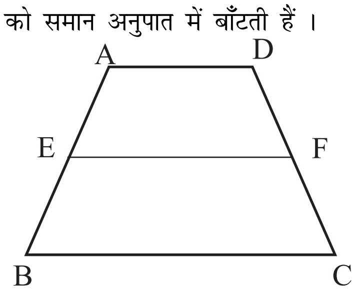
2) समलंब चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समानुपातिक खण्डों में विभक्त करते हैं ।



$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{OB}$$

3) यदि किसी चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समानुपातिक खण्डों में विभक्त करें तो यह चतुर्भुज समलम्ब चतुर्भुज होगा।

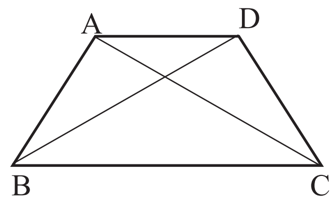
4) समलंब चतुर्भुज के समांतर भुजाओं के समांतर रेखा असमांतर भुजाओं को समान अनुपात में बाँटती हैं ।



AD | | EF | | BC तो

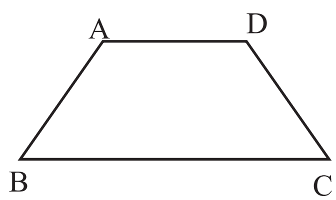
$$\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC}$$

5) समलम्ब समद्विबाहु चतुर्भुज (Isosceles trapezium) के विकर्ण बराबर होते हैं ।



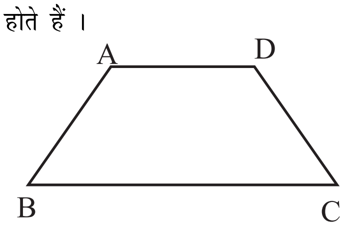
यदि AD | | BC & AB = CD तो
AC = BD

6) समलम्ब समद्विबाहु चतुर्भुज के प्रत्येक समांतर भुजाओं से जुड़े लगातार कोण (consecutive angles along each parallel sides) बराबर होते हैं ।



$\angle B = \angle C$ & $\angle A = \angle D$

7) समलम्ब समद्विबाहु चतुर्भुज के प्रत्येक विपरीत कोण के युग्म सम्पूरक होते हैं ।



$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^0$

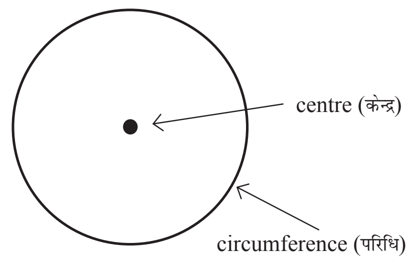
8) समलम्ब समद्विबाहु चतुर्भुज के शीर्ष एकवृत्तीय (Concyclic) होते हैं ।

9) समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल =

$\frac{1}{2}$ (समांतर भुजाओं का योग) x ऊँचाई

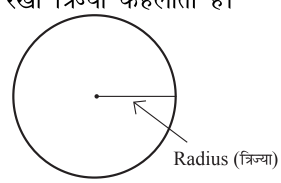
CIRCLE (वृत्त)

वृत एक ऐसा बन्द वक्र है जिसपर स्थित प्रत्येक बिन्दु एक स्थिर बिन्दु *(Fixed Point)* से समान दूरी पर स्थित होता है। यह स्थिर बिन्दु *(Fixed point)* वृत्त का केन्द्र *(Centre of circle)* कहलाता है।

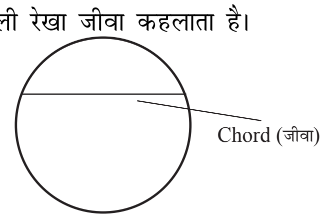


वृत्त से सम्बन्धित शब्द
(Terms related to Circle)

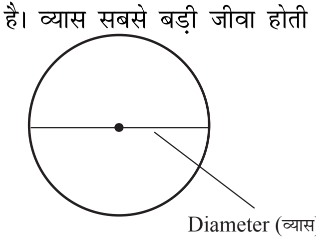
1) **त्रिज्या (Radius) :** वृत्त के केन्द्र एवं परिधि पर के बिन्दु को जोड़ने वाली रेखा त्रिज्या कहलाती है।



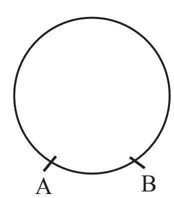
2) **जीवा (Chord) :** वृत्त के परिधि पर स्थित किसी दो बिन्दु को जोड़ने वाली रेखा जीवा कहलाता है।



3) **व्यास (Diameter)** वृत्त के केन्द्र गुजरने वाली जीवा व्यास कहलाता है। व्यास सबसे बड़ी जीवा होती है।



4) **चाप (Arc of a circle) :** वृत्त का एक खंड चाप कहलाता है।

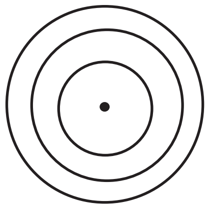


चाप को घड़ी के विपरीत दिशा में (counter clock wise) निरूपित किया जाता है।

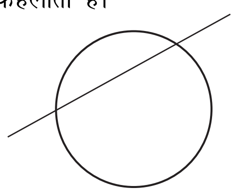
लघु चाप (Minor arc) : - $\overset{\frown}{AB}$

दीर्घ चाप (Major arc) : - $\overset{\frown}{BA}$

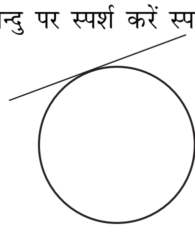
5) सकेन्द्रिय वृत्त (Concentric Circles): यदि दो या दो से अधिक वृत्तों के समान केन्द्र हो तो ये वृत्त सकेन्द्रिय वृत्त कहलाते हैं ।



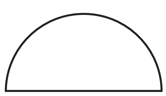
6) प्रतिच्छेदी रेखा (Secant of a circle) : प्रतिच्छेदी रेखा एक ऐसी सरल रेखा जो वृत्त को किन्हीं दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें प्रतिच्छेदी रेखा कहलाती है।



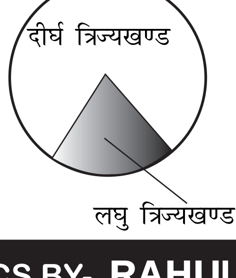
7) र्स्पशरेखा (Tangent of a circle): एक ऐसी रेखा जो वृत्त को केवल एक ही बिन्दु पर स्पर्श करें स्पर्श रेखा कहलाती है।



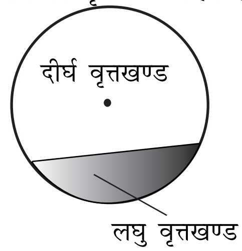
8) अर्द्धवृत्त (Semicircle) : किसी वृत्त का व्यास परिधि को दो समान चाप में विभाजित करता है और प्रत्येक चाप अर्द्धवृत कहलाता है।



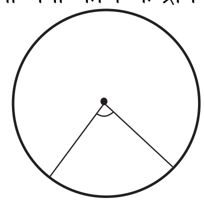
9) त्रिज्यखण्ड (Sector of a circle) : दो त्रिज्या एवं एक चाप के द्वारा घिरे भाग को त्रिज्यखण्ड कहते हैं ।



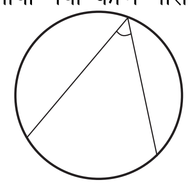
10) वृत्तखण्ड (Segment of a circle) : एक जीवा एवं एक चाप के द्वारा घिरे भाग को वृत्तखण्ड कहते हैं ।



11) केन्द्रीय कोण (Central Angle) : किसी चाप या जीवा के द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण केन्द्रीय कोण कहलाता है।

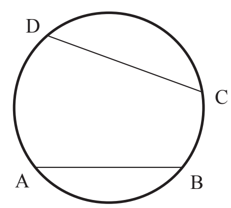


12) परिधि कोण (Inscribed Angle) : किसी चाप या जीवा के द्वारा परिधि पर बनाया गया कोण परिधि कोण कहलाता है।



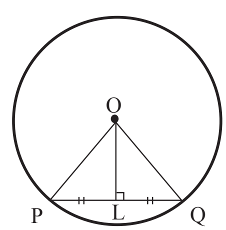
वृत्त से संबंधित प्रमेय
(Properties related to Circle)

1. यदि किसी वृत्त के दो चाप सर्वागसम हो तो उसके संगत जीवा समान होंगें ।



If $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ then AB = CD

2. वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है।



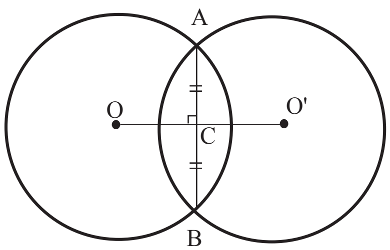
यदि $OL \perp PQ$ तो PL = LQ

3. वृत्त के केन्द्र और जीवा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली रेखा जीवा पर लम्ब होती है।

4. किसी जीवा का लम्ब समद्विभाजक केन्द्र होकर गुजरती है।

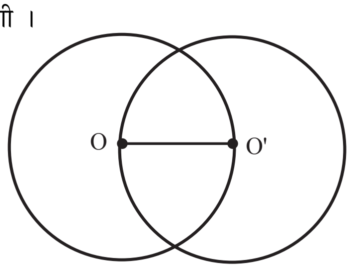
5. दो या दो से अधिक जीवाओं का लम्ब समद्विभाजक एक दूसरे को केन्द्र पर काटता है।

6. यदि दो वृत्त एक-दूसरे को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करें तो उनके केन्द्रों से होकर जाने वाली रेखा उभयनिष्ठ जीवा का लम्ब समद्वि भाजक होता है।

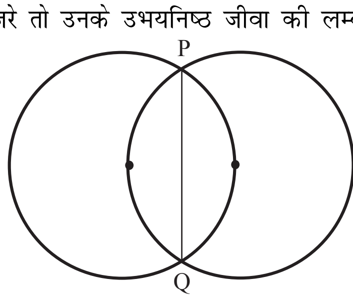


AC = BC and OC ⊥ AB

7. यदि दो वृत्त एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें एवं एक-दूसरे के केन्द्र होकर गुजरे तो दोनों वृत्त सर्वांगसम होंगें अर्थात् उनकी त्रिज्याएँ समान होगी ।



8. यदि दो वृत्त एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें एवं एक दूसरे के केन्द्र होकर गुजरे तो उनके उभयनिष्ठ जीवा की लम्बाई $\sqrt{3}r$ होगी।

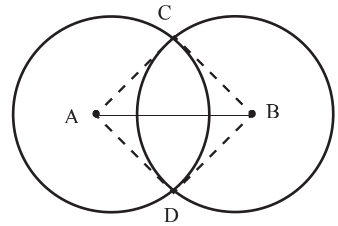


$PQ = \sqrt{3}\ r$

9. दो समांतर जीवाओं का समद्विभाजक केन्द्र होकर गुजरती है।

10. यदि किसी वृत्त का व्यास दो जीवाओं को समद्विभाजित करे तो दोनों जीवाएँ समांतर होगी ।

11. यदि दो वृत्त एक दूसरे को प्रतिच्छेद करें तो उनके केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा प्रतिच्छेद बिन्दु पर समान कोण बनाती है।

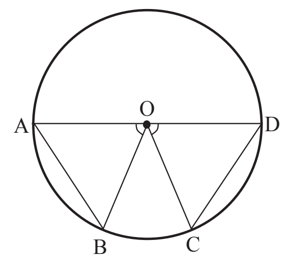


$\angle ACB = \angle ADB$

12. समान लंबाई की दो जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित होती है।

13. यदि दो जीवाएँ केन्द्र से समान दूरी पर स्थित हो तो दोनों जीवाएँ की लम्बाई समान होगी ।

14. एक वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण बनाती है।

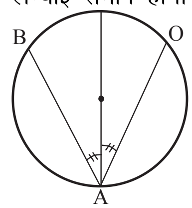


If AB = CD then ∠AOB = ∠COD

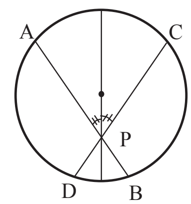
15. यदि एक वृत्त की दो जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण बनाती है, तो जीवाएँ समान (बराबर) होगी ।

16. यदि दो जीवाएँ लम्बाई असमान होगी तो बड़ी जीवा केन्द्र के ज्यादा नजदीक होगी ।

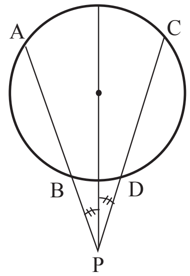
17. यदि दो जीवाएँ एक दूसरी को प्रतिच्छेद करें एवं वे उनके प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाली व्यास के साथ समान कोण बनाये तो दोनों जीवाएँ की लम्बाई समान होगी एवं उनके टुकड़ों की भी लम्बाई समान होगी ।



AB = AC



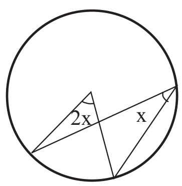
AB = CD
AP = CP
PD = PB



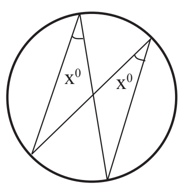
$AB = CD$
$AP = CP$
$BP = DP$

18. यदि दो जीवाएँ एक दूसरे को समद्विभाजित करे तो दोनों जीवाएँ व्यास होगी ।

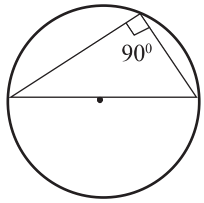
19. एक चाप द्वारा केन्द्र पर अंतरित कोण वृत्त के शेष भाग के किसी बिन्दु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।



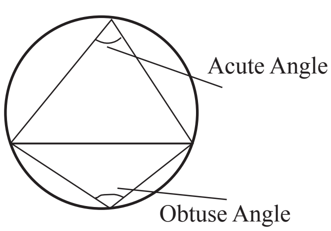
20. एक ही वृत्तखंड के कोण बराबर होते हैं ।



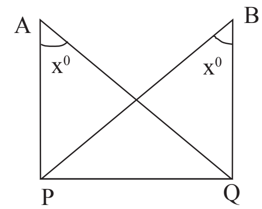
21. अर्द्धवृत्त का कोण समकोण होता है।



22. किसी जीवा के द्वारा छोटे वृत्तखण्ड में बनाया गया कोण अधि कोण एवं बड़े वृत्तखंड में बनाया गया कोण न्यूनकोण होता है।

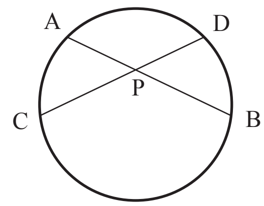


23. यदि दो बिन्दुओं को मिलानेवाला रेखाखण्ड दो अन्य बिन्दुओं पर जो इस रेखाखण्ड के एक ही ओर स्थित हो, समान कोण अंतरित करता हो तो ये चार बिन्दु एक वृत्तीय होते हैं ।

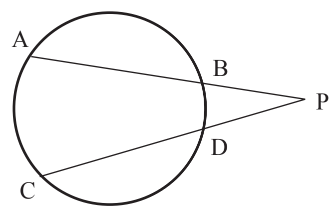


A, P, B, Q एकवृत्तीय *(Concyclic)* है।

24. यदि दो जीवा एक दूसरे को वृत्त के अन्दर या बाहर प्रतिच्छेद करे तो उनके खण्डों *(segment)* का गुणनफल समान होता है।

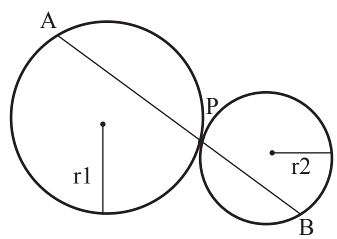


$PA \times PB = PC \times PD$



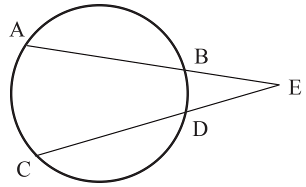
$PA \times PB = PC \times PD$

25. यदि दो वृत्त एक दूसरे को स्पर्श करे तो स्पर्श बिन्दु से होकर गुजरने वाली रेखा जो दोनों वृत्तों को स्पर्श करें, उस रेखा को स्पर्श बिन्दु उनके त्रिज्याओं के अनुपात में विभाजित करती है।



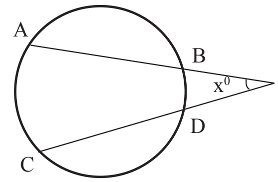
$$\frac{PA}{PB} = \frac{r1}{r2}$$

26. दो समान जीवाएँ *AB* तथा *CD* को जब बढ़ाया जाता है तो वह एक दूसरे को *P* बिन्दु पर काटती है तो *BE = DE* और *AE = CE*

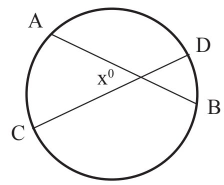


यदि $AB = CD$, तो $BE = DE$ और $AC = CE$

27. यदि दो जीवा एक दूसरे को प्रतिच्छेद करे तो उनके द्वारा प्रतिच्छेद बिन्दु पर बनाया गया कोण –



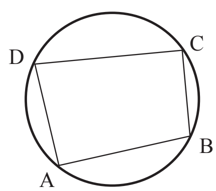
$x = \frac{1}{2}$ X (चाप *AC* के द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण – चाप *BD* के द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण *)*



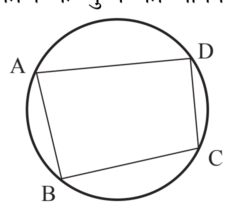
$x = \frac{1}{2}$*(* चाप *AC* के द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण + चाप *BD* के द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण *)*

चक्रीय चतुर्भुज (Cyclic Quadrilateral)

Cyclic quadrilateral (चक्रिय चतुर्भुज *) :* ऐसा चतुर्भुज जिसके सभी चार शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हो चक्रिय चतुर्भुज कहलाता है।



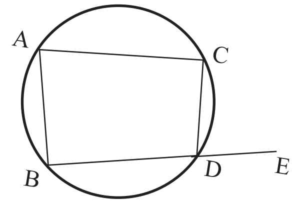
1. प्रत्येक विपरीत कोण के युग्म का योगफल 180^0 होता है।



$\angle A + \angle C = 180^0$ और $\angle B + \angle D = 180^0$

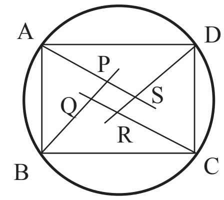
2. यदि किसी चतुर्भुज के प्रत्येक विपरीत कोण के युग्म का योगफल 180^0 हो तो वह चतुर्भुज चक्रिय चतुर्भुज होगा ।

3. यदि किसी चक्रिय चतुर्भुज के एक भुजा को बढ़ाया जाय तो उससे बना बहिष्कोण उसके विपरीत अंत:कोण के बराबर होता है।



$\angle CDE = \angle A$

4. किसी चक्रीय चतुर्भुज के कोणों के अर्द्धकों के द्वारा बना चतुर्भुज भी चक्रीय होता है।

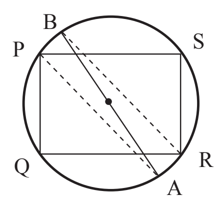


PQRS एक चक्रीय चतुर्भुज है।

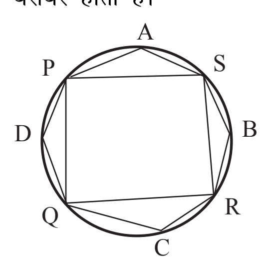
5. यदि किसी चक्रीय चतुर्भुज के दो भुजा समांतर हो तो शेष दोनों भुजा की लंबाई समान होगी एवं विकर्ण की भी लंबाई समान होगी ।

6. यदि किसी चक्रिय चतुर्भुज के दो विपरीत भुजाओं की लंबाई समान होगी तो शेष दोनों भुजा समांतर होगी ।

7. चक्रीय चतुर्भुज PQRS में दो विपरीत कोण, $\angle P$ और $\angle R$ के अर्द्धक वृत्त को दो बिन्दुओं A तथा B पर काटे तो रेखाखण्ड AB वृत्त का व्यास होगा ।

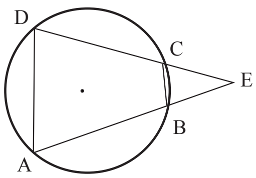


8. चक्रीय चतुर्भुज के सभी चार वृत्तखण्डों के कोणों का योगफल 6 समकोण के बराबर होता है।

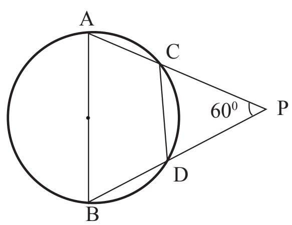


$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 90^0 \times 6 = 540^0$

9. ABCD एक चक्रिय चतुर्भुज है। यदि भुजा AB और DC को बढ़ाया जाय ताकि वे एक दूसरे को E पर काटे तो $\Delta EBC \sim \Delta EDA$.

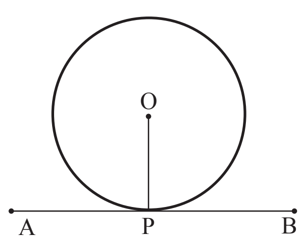


10. AB वृत्त का व्यास है तथा जीवा CD की लंबाई त्रिज्या के बराबर है । AC और BD को बढ़ाने पर वे एक दूसरे को P पर काटते हैं तो $\angle APB = 60^0$



स्पर्श रेखा एवं उसके गुण
(Tangent And Its Properties)

1) वृत्त के किसी बिन्दु पर की स्पर्श रेखा, स्पर्श बिन्दु प खींची गई त्रिज्या पर लम्ब होती है।



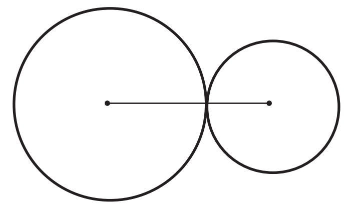
$OP \perp AB$

2) वह रेखा जो त्रिज्या के छोर बिन्दु (end point) से होकर जाती है और इस पर (त्रिज्या) लम्ब है, वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

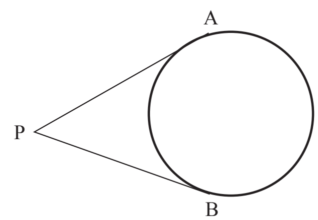
3) वृत्त के किसी एक बिन्दु पर एक एवं केवल एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है।

4) किसी स्पर्श रेखा के स्पर्श बिन्दु पर डाला गया लम्ब वृत्त के केन्द्र होकर गुजरता है।

5) यदि दो वृत्त एक-दूसरे को स्पर्श करें तो उनके स्पर्श बिन्दु उनके केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित होता है।

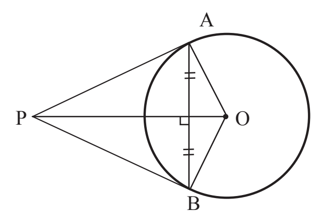


6) वृत्त के बाहर स्थित किसी एक बिन्दु से दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती है और इन दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाई समान होती है।



PA = PB

7)



(i) PA = PB

(ii) $\Delta PAO \cong \Delta PBO$

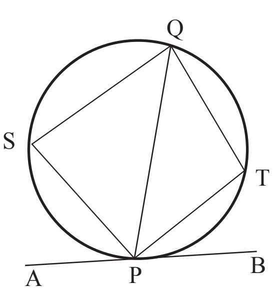
(iii) $\angle P + \angle O = 180^0$

(iv) PO $\angle P$ एवं $\angle O$ का द्विभाजक है।

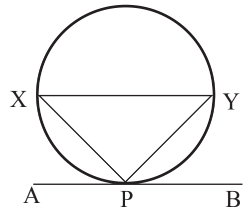
(v) OP, AB का लम्ब समद्विभाजक है।

(vi) $\widehat{AB} < \widehat{BA}$

8) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा द्वारा बनाया गया एकान्तर वृत्तखण्ड का कोण समान होता है।

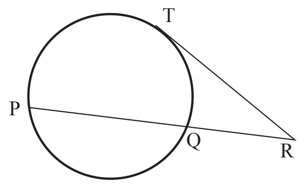


$\angle QPB = \angle PSQ$ & $\angle QPA = \angle PTQ$



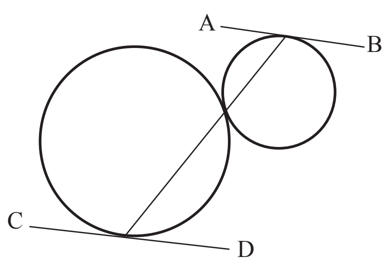
$\angle APX = \angle PYX$ & $\angle BPY = \angle PXY$

9) यदि एक जीवा एवं एक स्पर्श रेखा वृत्त के बाहर एक दूसरे को प्रतिच्छेद करे तो जीवा के खण्डों (segments of chord) का गुणनफल स्पर्श रेखा के वर्ग के बराबर होता है।



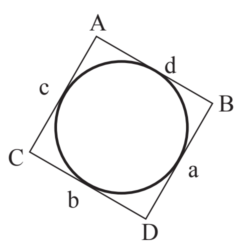
$PR \times RQ = TR^2$

10) यदि दो वृत्त एक दूसरे को बाह्यत: स्पर्श करे तो स्पर्श बिन्दु से गुजरने वाली रेखा के अंत बिन्दुओं पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती है।



AB | | CD

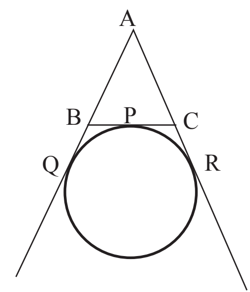
11) एक वृत्त के परिगत खींचे गये चतुर्भुज के सम्मुख भुजाओं का योग बराबर होता है।



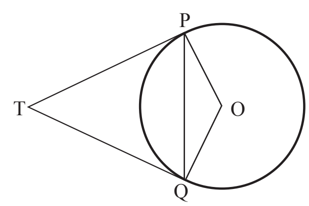
AB + DC = BC + DA

Area = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

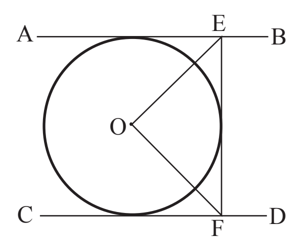
12) यदि एक वृत्त त्रिभुज ABC के भुजा BC को P बिन्दु पर स्पर्श करता है एवं भुजा AB तथा AC को बढ़ाने पर Q तथा R पर स्पर्श करता है तो AQ = $\frac{1}{2}$ (ΔABC का परिमाप)



13) यदि बिन्दु T से O केन्द्र वाले एक वृत्त के दो बिन्दुओं P तथा Q पर स्पर्श रेखाएँ TP तथा TQ खींची गई हो तो $\angle PTQ = 2\angle OPQ$.

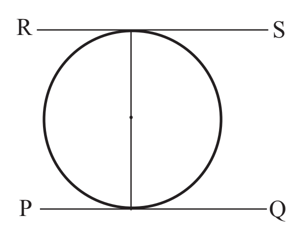


14)



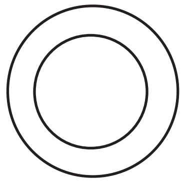
यदि AB | | CD तो $\angle EOF = 90^0$

15) वृत्त के व्यास के दोनों अंत बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा समांतर होती है।

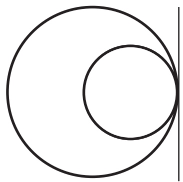


PQ | | RS

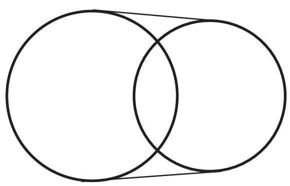
16) दो वृत्तों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखाएँ (Common tangent of two circles)



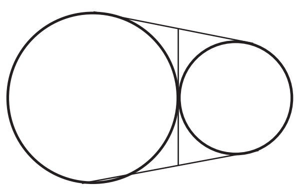
एक भी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा नहीं



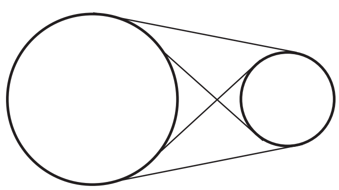
एक उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा



दो उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा

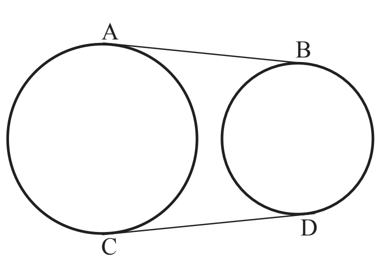


तीन उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा



चार उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा

17) दो वृत्तों के दो उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखाएँ (Direct common tangents) की लम्बाई समान होती है।

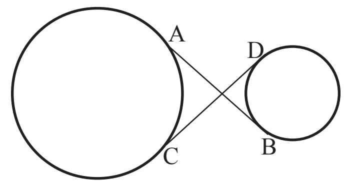


AB = CD

18) उभयनिष्ठ अनुस्पर्श रेखा की लम्बाई (Length of direct common tangent) = $\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$,

d = केन्द्रों के बीच की दूरी

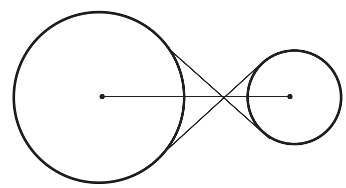
19) दो वृत्तों के दो उभयनिष्ठ अनुप्रस्थ स्पर्श रेखाओं (Transverse common tangents) की लम्बाई समान होती है।



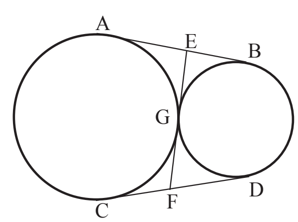
AB = CD

20) उभयनिष्ठ अनुप्रस्थ स्पर्श रेखा की लम्बाई (Length of transverse common tangents) = $\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$

21) दो वृत्तों के उभयनिष्ठ अनुप्रस्थ रेखाओं की प्रतिच्छेद बिन्दु उनके केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा पर स्थित होता है।



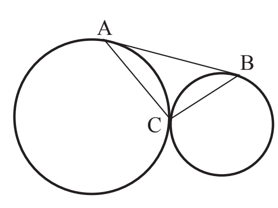
22)



(i) AB = CD = EF

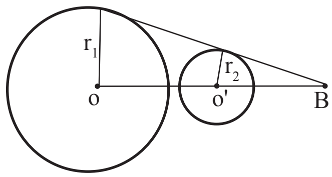
(ii) AE = EB = EG = GF = CF = FD

23)



$\angle ACB = 90^0$

24) यदि दो वृत्त की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा एवं उनके केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा एक दूसरे को किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करे तो प्रतिच्छेद बिन्दु उनके केन्द्रों को जोड़ने वाली रेखा को बाह्य रुप से उनके त्रिज्याओं के अनुपात में विभाजित करती है।



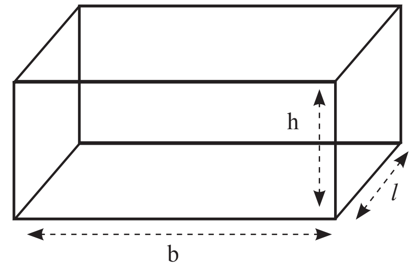
$$\frac{BO}{BO'} = \frac{r_1}{r_2}$$

वृत्त के क्षेत्रफल एवं परिमाप
(Area and Perimeter of Circle)

1. वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2
2. वृत्त का परिमाप = $2\pi r$
3. अर्द्धवृत्त का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}\pi r^2$
4. अर्द्धवृत्त का परिमाप = $(\pi+2)r$
5. चतुर्थांस का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}\pi r^2$
6. चतुर्थांस का परिमाप = $\left(\frac{\pi}{2}+2\right)r$ v
7. त्रज्यखण्ड का क्षेत्रफल = $\frac{\theta}{360^\circ} \times \pi r^2$
8. चाप की लम्बाई = $\frac{\theta}{360^\circ} \times 2\pi r$

क्षेत्रमिति (MENSURATION- 3D)

CUBOID (Parallelepiped) घनाभ (समांतर षट्फलक)



1) (आयतन) Volume = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई
= Area of base x height

2) (आयतन) Volume = लंबाई x चौड़ाई x ऊँचाई
(l x b x h)

3) (आयतन) Volume = $\sqrt{A_1 \times A_2 \times A_3}$
जहाँ A_1, A_2 तथा A_3 क्रमशः तीन संलग्न सतहों का क्षेत्रफल है ।

4) (विकर्ण) Diagonal = $\sqrt{\text{ल0}^2 + \text{चौ0}^2 + \text{ऊँ0}^2}$

5) (पार्श्वीय सतह का क्षेत्रफल या चारों दीवारों का क्षेत्रफल)
Lateral surface Area or Area of four walls
= आधार का परिमाप x ऊँचाई

6) पार्श्वीय सतह का क्षेत्रफल (Lateral surface Area) = 2 (लं0 + चौ0) x ऊँ0

7) सम्पूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface area)
= 2(लं0 x चौ0 + चौ0 x ऊँ0 + लं0 x ऊँ0)

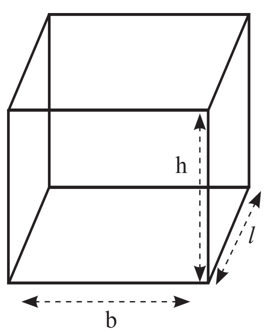
8) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area)
= (लं0 + चौ0 + ऊँ)^2 - (विकर्ण)^2

9) ढक्कनदार बॉक्स के लिए (For a box having closed top)
(i) भीतरी लम्बाई = बाहरी लम्बाई – 2 x मोटाई
(ii) बाहरी लम्बाई = भीतरी लम्बाई + 2 x मोटाई
(iii) भीतरी चौड़ाई = बाहरी चौड़ाई – 2 x मोटाई
(iv) बाहरी चौड़ाई = भीतरी चौड़ाई + 2 x मोटाई
(v) भीतरी ऊँचाई = बाहरी ऊँचाई – 2 x मोटाई
(vi) बाहरी ऊँचाई = भीतरी ऊँचाई + 2 x मोटाई

10) बिना ढक्कन का बॉक्स के लिए (A box having open top)

(i) भीतरी लम्बाई = बाहरी लम्बाई – 2 x मोटाई
(ii) बाहरी लम्बाई = भीतरी लम्बाई + 2 x मोटाई
(iii) भीतरी चौड़ाई = बाहरी चौड़ाई – 2 x मोटाई
(iv) बाहरी चौड़ाई = भीतरी चौड़ाई + 2 x मोटाई
(v) भीतरी ऊँचाई = बाहरी ऊँचाई – मोटाई
(vi) बाहरी ऊँचाई = भीतरी ऊँचाई + मोटाई

<u>CUBE (घन / समषट्फलक)</u>



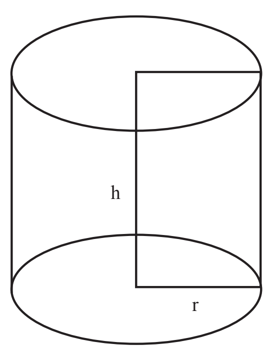
1) आयतन = भुजा^{3}

2) पार्श्वीय सतह का क्षेत्रफल (Lateral surface Area) = 4 x भुजा^{2}

3) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area) = 6 x भुजा^{2}

4) विकर्ण (Diagonal) = $\sqrt{3}$ x भुजा

<u>Right Circular cylinder (लम्ब वृत्तीय बेलन)</u>



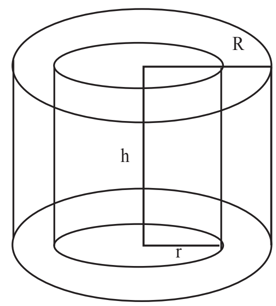
1) आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई
2) आयतन = $\pi r^2 h$

3) वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल (Curved surface Area)
= आधार का परिमाप x ऊँचाई

4) वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (Curved surface Area)
$= 2\pi rh$

5) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area)
$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\,(h + r)$

<u>Hollow Cylinder (खोखला बेलन)</u>



1) वस्तु की मोटाई (Thickness of material)
$= R - r$

t

2) उपरी या निचली सतह का क्षेत्रफल (Area of each end) $= \pi(R^2 - r^2)$

3) बाह्य सतह का क्षेत्रफल (External surface Area)
$= 2\pi Rh$

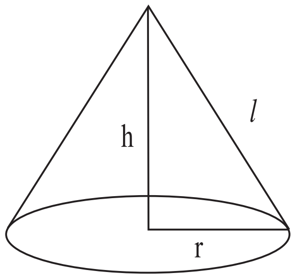
4) अंदरूनी सतह का क्षेत्रफल (Internal surface Area) $= 2\pi rh$

5) वक्र पृष्ठ क्षेत्रफल (Curved surface Area)
$= 2\pi Rh + 2\pi rh$
$= 2\pi\,(R + r)\,h$

6) संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल (Total surface Area)
$= 2\pi RH + 2\pi rh + 2(\pi R^2 - \pi r^2)$
$= 2\pi\,(R + r)(R - r + h)$

7) धातु का आयतन (Volume of material) = बाहरी आयतन – भीतरी आयतन
$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$
$= \pi\,(R^2 - r^2)\,h$

Right Circular Cone (लंब वृत्तीय शंकु)



h = कोण की ऊँचाई *(height of cone)*

ℓ = तिर्यक ऊँचाई *(slant height of cone)*

r = कोण के आधार की त्रिज्या (*radius of cone)*

1) तिरछी ऊँचाई (Slant height) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

2) आयतन (Volume) =

$\frac{1}{3} \times$ Area of base x height

3) आयतन (Volume) = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

4) वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (Curved surface Area)

= $\frac{1}{2} \times$ आधार का परिमान x ऊँचाई = $\pi r \ell$

5) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area)
= $\pi rl + \pi r^2$ = $\pi r(\ell + r)$

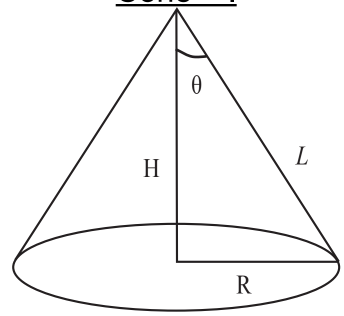
6) यदि किसी त्रिज्यखण्ड से एक कोण बना हो तो (If a cone is formed by sector of a circle then)

(i) कोण की तिरछी ऊँचाई (Slant height of cone)
= त्रिज्यखण्ड की त्रिज्या (Radius of sector)

(ii) कोण के आधार का परिधि (Circumference of base of cone) = त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई (length of arc of sector)

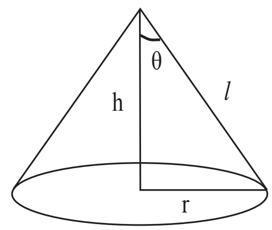
7) यदि दो शंकु (cones) का शीर्षकोण समान हो तो (Two cones having equal vertex angle)

Cone – I



शंकु -I का आयतन = A
शंकु -I का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = B

Cone – II



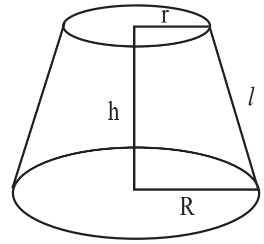
शंकु -II का आयतन = a
शंकु -II का वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = b

(i) $\frac{H}{h} = \frac{L}{\ell} = \frac{R}{r}$

(ii) $\frac{A}{a} = \frac{H^3}{h^3} = \frac{L^3}{l^3} = \frac{R^3}{r^3}$

(iii) $\frac{B}{b} = \frac{H^2}{h^2} = \frac{L^2}{\ell^2} = \frac{R^2}{r^2}$

Frustum of Cone (छिन्नक)



1) छिन्नक के तिर्यक ऊँचाई (Slant height of frustum) = $\sqrt{h^2 + (R-r)^2}$

2) आयतन (Volume) = $\frac{1}{3} \times \pi (R^2 + r^2 + R \cdot r)\, h$

3) आयतन (Volume) = $\frac{h}{3}\ (A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 A_2}\ )$

जहाँ A_1 एवं A_2 आधार और शीर्ष का क्षेत्रफल है

4) वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल (Curved surface Area)
$= \pi\ (R + r)\ \ell$

5) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area)
$= \pi\ (R + r)\ \ell\ + \pi R^2 + \pi r^2$
$= \pi\ [\ (R+r)\ \ell\ + R^2 + r^2\ ]$

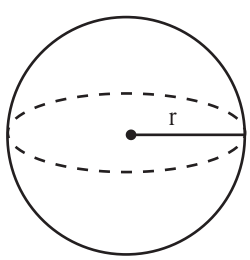
6) उस शंकु की ऊँचाई जिसे काटकर छिन्नक बनाया गया है (Height of cone of which frustum is a part) $= \frac{hR}{R-r}$

7) उस शंकु की तिरछी ऊँचाई जिसे काटकर छिन्नक बनाया गया है (Slant height of cone of which frustum is a part) $= \frac{\ell R}{R-r}$

8) छिन्नक के ऊपरी भाग के शंकु का ऊँचाई (Height of cone of upper part of frustum)
$= \frac{hr}{R-r}$

9) छिन्नक के ऊपरी भाग के शंकु का तिर्यक ऊँचाई (Slant height of cone of upper part of frustum) $= \frac{\ell R}{R-r}$

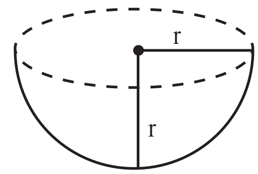
SPHERE (गोला)



1) आयतन (Volume) = $\frac{4}{3}\ \pi\ r^3$

2) संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल (Surface Area) = $4\ \pi r^2$

HEMISPHERE (अर्द्धगोला)

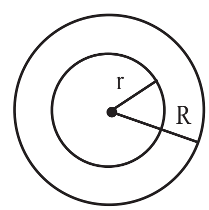


1) आयतन (Volume) = $\frac{2}{3}\ \pi r^3$

2) वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल (Curved surface Area)
$= 2\pi r^2$

3) संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल (Total surface Area)
$= 3\pi r^2$

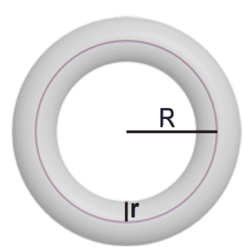
SPHERICAL SHELL (गोलाकार खोल)



1) वस्तु का आयतन (Volume of material)
$= \frac{4}{3}\ \pi\ (R^3 - r^3)$

2) बाह्य पृष्ठ का क्षेत्रफल (Outer surface Area)
$= 4\pi R^2$

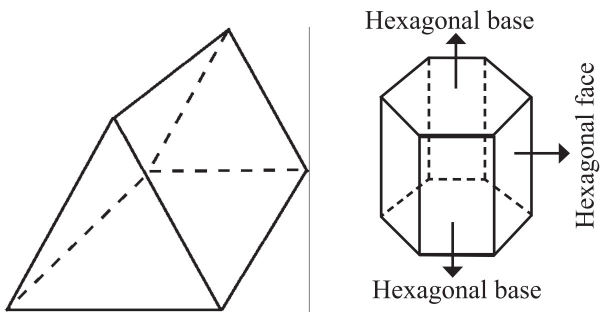
TORUS



1) आयतन (Volume) = $2 \times \pi^2 \times R \times r^2$

2) पृष्ठीय क्षेत्रफल (Surface Area) = $4 \times \pi^2 \times R \times r$

PRISM (प्रिज्म)

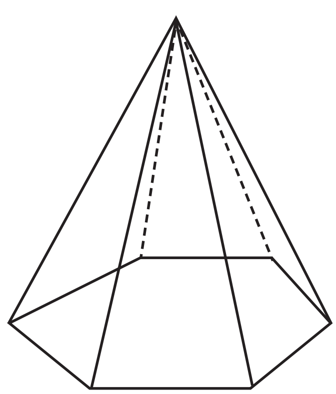


1) आयतन (Volume) = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई

2) पार्श्वीय सतह का क्षेत्रफल (Lateral surface Area)
= आधार का परिमाप x ऊँचाई

3) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area) = पार्श्वीय सतह का क्षेत्रफल + 2 x आधार का क्षेत्रफल

PYRAMID



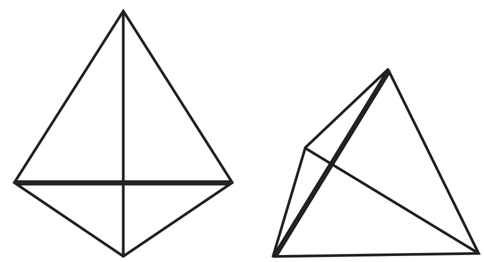
1) आयतन (Volume) = $\frac{1}{3} \times$ आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई

2) पार्श्वीय सतह का क्षेत्रफल (Lateral surface Area)

= $\frac{1}{2} \times$ आधार का परिमाप x तियक ऊँचाई

3) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area) = पार्श्वीय सतह का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

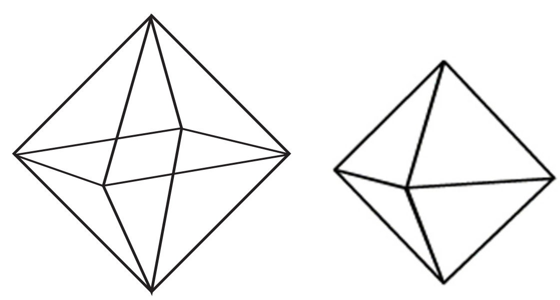
TETRAHEDRON (समचतुष्फलक)



1) आयतन (Volume) = $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

2) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area)
= $\sqrt{3}\, a^2$

OCTAHEDRON (समअष्टफलक)



1) आयतन (Volume) = $\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$

2) संपूर्ण सतह का क्षेत्रफल (Total surface Area)
= $2\sqrt{3}\, a^2$